# L'ENSEIGNEMENT
# MATHÉMATIQUE

# L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE.

## REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

**C.-A. LAISANT**
Docteur ès sciences,
Ancien examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique de Paris.

**H. FEHR**
Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université de Genève.

AVEC LA COLLABORATION DE

**A BUHL**
Docteur ès sciences
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.



*Organe officiel de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.*

QUINZIÈME ANNÉE

1913



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS

1913

GENÈVE
IMPRIMERIE ALBERT KÜNDIG

# AUX LECTEURS

DE

# « L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE »

---

Notre Revue, avec le présent numéro, commence sa quinzième année. Il n'est pas sans intérêt, dans les conditions actuelles, au lendemain presque du Congrès de Cambridge, de jeter un rapide coup d'œil en arrière, d'en déduire quelques conséquences probables pour l'avenir, et d'indiquer les conclusions qui s'ensuivent, à notre avis, et qui méritent l'attention de nos lecteurs.

Lors de la création de *L'Enseignement mathématique*, notre pensée dominante fut de faire plus complètement connaître aux professeurs de chaque pays les efforts qui se produisaient dans les autres, à tous les degrés de l'enseignement. De toutes parts, une très grande bonne volonté était dépensée par les professeurs, en vue de perfectionner les programmes et les méthodes, de mieux associer entre elles les diverses branches ou les diverses catégories de l'enseignement, d'organiser partout celui-ci de manière à répondre le mieux possible aux besoins des élèves qui le reçoivent. Mais en général les programmes, les méthodes, l'organisation et les projets de perfectionnements des pays étrangers, même des pays voisins, res-

taient inconnus, ou tout au moins connus incomplètement et imparfaitement de l'immense majorité.

L'œuvre à entreprendre avait donc et n'a cessé de conserver un caractère essentiellement international. Le Congrès de Zurich s'était tenu en 1897 avec un plein succès; sans cette circonstance nous n'aurions sans doute pas osé tenter la création de notre Revue. Les sciences mathématiques, internationales autrefois, alors qu'elles étaient cultivées et représentées par un tout petit nombre d'hommes se servant du latin, avaient perdu ce caractère, si nécessaire à leurs progrès; les Congrès les lui ont rendu sous une forme plus moderne. Et *L'Enseignement mathématique*, s'associant à cette évolution, s'est efforcé d'en faire profiter les professeurs, et non plus seulement les chercheurs.

De nombreuses monographies sur l'organisation de l'enseignement dans la plupart des pays, des enquêtes comme celle sur la méthode de travail des mathématiciens, et surtout les efforts qui ont abouti à la création de la Commission de l'enseignement au Congrès de Rome (1908) n'ont cessé de marquer cette préoccupation internationale dont nous nous sommes toujours inspirés. Sans forfanterie, nous avons le droit de nous en réjouir, car le mérite des succès obtenus revient pour une grosse part à nos collaborateurs, sans lesquels notre initiative serait sûrement restée stérile.

Aujourd'hui, après le Congrès de Cambridge, alors que l'œuvre de la Commission internationale de l'enseignement doit être poursuivie pendant quatre années au moins, et que de nouvelles propositions utiles semblent devoir surgir, il faut plus que jamais persévérer, et multiplier les efforts qui tendent vers des améliorations profitables à tous.

Avec un programme tel que le nôtre, et la volonté de ne jamais donner à notre Revue un caractère particulariste, il est permis de s'étonner — et quelques-uns se sont étonnés — que *L'Enseignement mathématique* ait été rédigé exclusivement jusqu'ici dans une seule langue. Au début, ce fut presque une obligation. En ne nous y soumettant pas, nous risquions de compromettre l'œuvre entreprise.

Mais aujourd'hui les Congrès internationaux successifs ont fait leurs preuves. Et la Commission internationale de l'enseignement mathématique a fait choix de notre Revue comme organe accrédité. Or, dans ces Congrès, les quatre langues principales : *allemand, anglais, français* et *italien* sont en usage. D'autre part, l'emploi de la langue internationale *esperanto* s'est généralisé de plus en plus.

Dans ces conditions, nous avons résolu d'admettre des articles rédigés dans l'une des cinq langues précitées, tout en conservant en principe l'usage du français pour la plupart des rubriques. Nous voyons à cette modification plusieurs avantages. D'abord, pour la reproduction de discours ou de conférences, nous évitons le risque d'un affaiblissement de la forme qu'apporte souvent la meilleure des traductions. En second lieu, c'est une satisfaction légitime donnée à nos confrères des divers pays. Enfin, pour certains documents, la traduction peut faire perdre du temps et amener des retards appréciables, alors que les documents dont il s'agit présentent un caractère d'urgence.

Nous devons ajouter qu'un assez grand nombre de publications scientifiques, mathématiques ou autres, dont le caractère international n'est assurément pas plus accentué que celui de *L'Enseignement mathématique,* sont

entrées dans cette voie depuis un certain nombre d'années.

En terminant, c'est pour nous un devoir d'apporter à nos collaborateurs, depuis les plus illustres jusqu'aux plus modestes, l'expression d'une gratitude bien méritée; et nous leur demandons à tous de nous continuer leurs marques de bienveillance. Nous avons même la certitude qu'à ceux d'hier et d'aujourd'hui viendront s'en adjoindre d'autres, grâce aux facilités nouvelles que nous leur offrons.

Entouré de tous ces appuis, aidé de tous ces concours, *L'Enseignement mathématique* s'efforcera de poursuivre sa mission éducative, qui est en même temps une œuvre de concorde et d'harmonie; car tous les hommes, dans tous les pays, sous toutes les latitudes, directement ou indirectement, sont intéressés au progrès de la science, dont le progrès de l'enseignement ne saurait être séparé.

*Les Directeurs :*

C.-A. Laisant. H. Fehr.



Phototypie SADAG.

Louis Havet

# HENRI POINCARÉ

---

Ainsi que *L'Enseignement Mathématique* l'a annoncé dans son numéro du 15 septembre 1912, nous ne pouvons laisser passer la disparition si douloureuse et si prématurée d'Henri Poincaré, sans consacrer à son souvenir un peu plus qu'une courte notice nécrologique.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait la Rédaction de cette Revue, en me confiant la tâche de jeter un coup d'œil sur une des œuvres mathématiques les plus gigantesques ; mais, à coup sûr, je ne remplirai cette tâche que très imparfaitement.

Ceux qui ont complètement étudié et entièrement compris l'œuvre d'Henri Poincaré sont certainement fort peu nombreux, surtout si l'on considère l'œuvre et non des fragments qui peuvent être développés pour des raisons d'intérêt particulier. Tout au plus, peut-on imaginer et souhaiter l'avènement d'une école qui marchera sur les traces du Maître, retrouvera par d'autres méthodes bien des résultats qui semblent peu accessibles aux géomètres de niveau moyen, école qui donnera l'impression de faire des découvertes en mettant simplement au grand jour les richesses d'une mine repérée en son ensemble mais encore bien peu exploitée.

Ce qui suit est forcément très incomplet, parce que je me suis surtout attaché à parler de ce que je connaissais. Ce n'est qu'un effort obscur où je n'ai pu mettre toute la science mais seulement toute mon admiration.

Il n'est pas entré non plus dans mes conceptions de donner

de longs détails biographiques et encore moins de faire une bibliographie analytique. Je ne pourrais mieux faire que n'a fait M. Ernest Lebon dans sa *Collection des Savants du jour*; le volume qu'il consacre à Henri Poincaré vient d'avoir sa deuxième édition arrêtée au 25 mai 1912 alors que le grand géomètre est mort le 17 juillet. Le plus remarquable est qu'entre ces deux dates si rapprochées, ce dernier ait encore pu préparer trois ou quatre publications nouvelles. Toutefois les 495 écrits classés par M. Lebon n'en constituent pas moins une liste fondamentale à laquelle je ne puis que renvoyer.

Qu'ajouter aussi au sujet des innombrables témoignages officiels reçus par l'illustre savant. Né le 29 avril 1854, il fut élu Membre de l'Académie des Sciences le 31 janvier 1887, c'est-à-dire alors qu'il avait à peine 33 ans! Tout le reste est à l'avenant! Toutes les Académies du monde avaient tenu à honneur de se l'attacher!

Plutôt que de revenir sur une longue énumération de titres officiels, j'aimerais à tracer la physionomie du Maître sous la forme plus familière de l'anecdote. Il semble que l'on soit peu riche à cet égard.

Le Dr Toulouse, dans son *Enquête médico-psychologique*, nous dépeint Henri Poincaré comme n'étant ni liant ni confidentiel (p. 137). C'était peut-être vrai, s'il faut entendre par là qu'il n'aimait pas se lier rapidement avec les inconnus. Cette réserve est naturelle, elle s'impose même absolument à l'homme qui a acquis le droit d'en juger beaucoup d'autres et qui justement a le scrupule très noble de ne point diminuer sa liberté par de trop nombreuses liaisons. Beaucoup de personnages, d'une envergure infiniment moindre, doivent ainsi s'interdire les liens et les confidences.

Mais, pour ma part, je n'ai jamais approché le grand savant sans le trouver souriant, sympathique, serviable.

Les discours les plus académiques l'ont dépeint parfois sous une forme qui m'a profondément choqué. Pourquoi insister par exemple sur les distractions d'un esprit génial quand il est évident qu'elles sont en dehors de cet esprit. Ce qu'il faudrait proposer à l'admiration, c'est plutôt le tra-

vail que produisait cette intelligence quand il lui arrivait de perdre la conscience du monde vulgaire. J'imagine qu'un tel homme a dû avoir souvent la sensation qu'il n'était qu'une pensée! Et nous risquerions de le tourner en ridicule dans de tels moments! C'est un véritable sacrilège.

Mais, pour ne point paraître trop sévère, je raconterai volontiers une petite scène éminemment consciente et spirituelle dont il me fut donné d'être témoin. C'était en juillet 1899. Je subissais à la Sorbonne les épreuves du certificat d'Astronomie. Une fois interrogé, j'écoutais les réponses de mes camarades. L'un d'eux, très jeune (ceci a de l'importance pour la suite) ne brillait pas et Henri Poincaré, qui l'examinait, diminuant peu à peu ses exigences, finit par lui poser de toutes petites questions de cosmographie et notamment celle-ci : « Combien y a-t-il de petites planètes? » Nous étions, je le répète, en 1899, année pour laquelle le simple *Annuaire du Bureau des Longitudes* indique 445 de ces astéroïdes.

Malheureusement, après de longues hésitations, le candidat opina pour 150. Du coup l'examinateur, qui attendait la réponse en se promenant les mains derrière le dos, s'arrêta net et répliqua malicieusement : « Il doit y avoir longtemps que vous avez appris cela! »

Pour en revenir à notre humble publication, nous ne pouvons point ne pas faire remarquer que nous perdons en Henri Poincaré un des membres du Comité de Patronage de *L'Enseignement Mathématique*. Il fut d'ailleurs un collaborateur[1] de la première heure. Sans doute, tous les journaux mathématiques s'honoraient aussi en publiant ses travaux; puissions-nous, si peu que ce soit, nous honorer encore en publiant un dernier hommage à la mémoire de la pensée géniale qui vient de disparaître.

---

[1] Voici la liste des articles d'Henri Poincaré qui ont été publiés par *L'Enseignement Mathématique :* La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement (T. I, 1899, p. 157). — La notation différentielle et l'enseignement (T. I, 1899. p. 106), — Les définitions générales en mathématiques (T. VI, 1904 p. 257). — L'invention mathématique (T. X, 1908, p. 357). — Discours d'ouverture du Congrès de l'A. F. A. S. tenu à Lille (T. XI, 1909, p. 384),

## Le Géomètre.

Les premiers travaux de mathématiques pures qui illustrèrent Henri Poincaré ont trait à la théorie des fonctions abéliennes et des fonctions plus générales qu'il appela fonctions fuchsiennes.

Ils apparaissent, à partir de 1880, dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Le Mémoire fondamental intitulé *Théorie des groupes fuchsiens* inaugure magistralement les *Acta Mathematica*. On peut déjà voir de ce côté une ligne admirablement continue qui, dessinée il y a plus de trente ans, se prolonge, au travers des œuvres les plus diverses, pour aboutir au Mémoire *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques* publié encore aux *Acta Mathematica* en 1908 et qui semble ainsi dater d'hier.

Vers 1880 les travaux d'analyse semblant les plus ardus et les plus importants étaient ceux dus aux grands géomètres alors vivants qui s'appelèrent Briot, Bouquet, Weierstrass et surtout Hermite.

La théorie des fonctions elliptiques, sans avoir peut-être le cachet classique relativement élémentaire qu'on peut lui donner maintenant, était cependant devenue parfaitement claire. On savait depuis longtemps qu'après les courbes unicursales il convenait de placer celles, telles que les cubiques, dont les coordonnées s'exprimaient en fonction elliptique, c'est-à-dire en fonction *uniforme* d'un paramètre variable. L'intuition indiquait même qu'un théorème analogue devait avoir lieu pour une courbe *algébrique* quelconque et de grands efforts étaient faits, notamment par l'école allemande, pour l'établir définitivement. Mais pour cela, il fallait apporter à la théorie des fonctions abéliennes des perfectionnements analogues à ceux dont la théorie des fonctions elliptiques avait déjà bénéficié. Ce fut la première gloire d'Henri Poincaré alors qu'une seconde, non moins éclatante, devait coïncider presque exactement avec elle.

L'école allemande, dirigée par les recherches de Fuchs, appliquait aussi avec succès les méthodes de Cauchy à l'étude

des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. On sentait vaguement que de nouvelles fonctions devaient correspondre à de telles équations, tout comme les fonctions abéliennes correspondaient à des intégrales portant explicitement sur des différentielles algébriques. D'ailleurs, les fonctions elliptiques, considérées par rapport au module, avaient naturellement conduit Hermite aux fonctions *modulaires* qui satisfaisaient à des équations différentielles linéaires, fort particulières il est vrai. Henri Poincaré généralisa les choses avec une rapidité foudroyante. Il aperçut, dans la théorie des fonctions abéliennes, les fonctions qui devaient jouer un rôle analogue à celui des fonctions modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques, et il se trouva que ces fonctions étaient celles qui intégraient les équations différentielles linéaires précédemment considérées. Il enlevait ainsi à l'Allemagne la gloire que celle-ci était sur le point de conquérir mais il fut le plus généreux des vainqueurs, envers la nation rivale, en donnant aux nouvelles fonctions le nom de *fonctions fuchsiennes*.

Il ne faudrait point maintenant considérer de tels résultats uniquement comme des triomphes du passé. Ils se mêlent de plus en plus et ont d'ailleurs été mêlés par Henri Poincaré lui-même aux recherches des géomètres de la jeune génération. Ils peuvent servir et ont effectivement servi de base à une étude générale des fonctions analytiques.

Ces fonctions forment pour le débutant un écheveau passablement compliqué, surtout si l'on veut sortir de la considération directe des fonctions uniformes. Pour en faire une étude approfondie, faudra-t-il considérer les uns après les autres tous les éléments de l'ensemble?

Heureusement non! Quelques fonctions seulement, adroitement choisies et dont les singularités seront étudiées à fond, constitueront de véritables clefs d'or pour l'étude de classes extrêmement étendues d'autres fonctions. Que l'on considère, par exemple, les formules de Cauchy et de Taylor qui, quoique insuffisantes pour tous les problèmes de l'analyse moderne, n'en sont pas moins les premiers instruments fondamentaux dont il faille se préoccuper. Qu'y-a-t-il d'abso-

lument essentiel dans ces formules? Rien d'autre que la simple fraction rationnelle

$$\frac{1}{z - a}.$$

Pour parler un langage tout à fait moderne, c'est là le *noyau* de la formule de Cauchy. La singularité extrêmement simple constituée par le pôle $a$ règle le développement de la fraction en série entière et, du même coup, les conditions d'existence du développement taylorien d'une fonction analytique *quelconque*.

Sans vouloir établir une véritable comparaison entre ces points rudimentaires et des théories d'aspects fort divers, on peut juger cependant de la puissance des méthodes appuyées sur l'étude préliminaire de fonctions présentant, au lieu du pôle simple de la fraction précédente, des singularités appartenant à d'autres types. Ainsi les célèbres théorèmes de M. Emile Picard sur l'allure d'une fonction analytique quelconque, dans le voisinage d'un point singulier essentiel, dérivent d'une propriété particulière d'une fonction modulaire particulière elle-même.

Quelle ne dût pas être la puissance d'Henri Poincaré en possession de ses fonctions abéliennes, fuchsiennes et de tous les types dérivés qu'il en tira. Le Mémoire qui prouve peut-être le mieux cette extraordinaire puissance me paraît être celui qui a trait à l'uniformisation des fonctions analytiques et auquel j'ai déjà fait allusion plus haut.

Après avoir fait l'admiration des géomètres d'il y a trente ans en complétant, après Riemann, l'uniformisation des fonctions multiformes *à un nombre fini de branches*, il arrive à des résultats analogues pour les fonctions en possédant une infinité. *Depuis lors l'étude des fonctions analytiques quelconques est ramenée à l'étude des fonctions uniformes et des transcendantes inverses de celles-ci.*

Rien qu'en ce qui précède, nous voyons déjà se dessiner une ligne admirable et grandiose. Ce n'est qu'une route indiquée dans un pays cultivé sur bien d'autres points, entre lesquels on pourrait tracer d'autres routes, mais je ne me

sens point la compétence nécessaire pour les tracer toutes, celles que je viens d'indiquer suffisant à forcer l'admiration. D'ailleurs il semblait être dans l'esprit de mon illustre maître de créer ou de s'assimiler les théories les plus générales avec des points de départ assez quelconques.

Il contribua énormément, dans ces dernières années, au perfectionnement de la théorie des équations intégrales due à M. Fredholm. Or, pour raisonner comme je le faisais tout à l'heure à propos de la formule de Cauchy, on peut encore se demander ce qu'il y a d'absolument essentiel dans ces équations intégrales. Rien d'autre que les *noyaux*. Et ces noyaux sont d'abord des potentiels ou des fonctions possédant des singularités analogues, fonctions que la Physique mathématique avait primitivement considérées mais sans faire justement la synthèse dont le mérite appartient à M. Fredholm. Henri Poincaré connaissait admirablement les fondements exposés dans ses Mémoires *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (*American Journal,* 1889. *Rendiconti,* Palerme, 1894). Il jugea la synthèse d'un coup d'œil, parut y apporter sans efforts les plus utiles contributions et reprit même ses recherches sur les marées à l'aide de la nouvelle théorie.

D'autre part, les équations intégrales correspondent à des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. A ce point de vue, Henri Poincaré fut un créateur, en étudiant les caractères de convergence des déterminants d'ordre infini.

Des fonctions analytiques à une seule variable il sut également passer avec aisance aux fonctions qui en contiennent deux ou plusieurs. Son célèbre mémoire *Sur les résidus des intégrales doubles (Acta Mathematica, T. IX)* contient, en ce sens, la véritable extension du théorème de Cauchy qui avait été vainement cherchée avant lui. Et il apparaît alors que la périodicité des intégrales doubles est intimement liée à celle des intégrales abéliennes.

Je m'arrête car je n'ai point l'intention, comme je l'ai déjà dit, d'écrire un article encyclopédique. Ainsi je laisse de côté les recherches sur les courbes réelles définies par des

équations différentielles. Ce n'est pas la partie la moins importante de l'œuvre car elle joue un rôle essentiel en Mécanique céleste, science sur laquelle l'illustre géomètre nous a laissé des ouvrages d'un caractère suffisamment didactique.

Au contraire il ne nous laisse rien de semblable, quant à ces fonctions analytiques auxquelles il a cependant si merveilleusement travaillé. Tout est dans des mémoires isolés. En de nombreux endroits de son *Traité d'Analyse*, M. Emile Picard nous a fait connaître des fragments de ces trésors. Les ouvrages didactiques de M. Appell sur les fonctions elliptiques, sur les fonctions algébriques et leurs intégrales, peuvent constituer aussi d'importants travaux d'approche pour qui veut s'initier aux résultats dus à Henri Poincaré ; mais qui n'aurait désiré cependant que ce dernier publie lui-même un ouvrage, à début relativement élémentaire, sur les fonctions abéliennes et fuchsiennes.

Peut-être ne jugeait-il point ces théories suffisamment parfaites et préférait-il continuer à les étendre.

Il est certain aussi que la possibilité de marcher sans cesse à de nouveaux résultats diminuait chez lui le désir de s'attarder à exposer ceux qui déjà lui semblaient acquis.

## L'Astronome.

Si l'Astronomie est — ne serait-ce que d'après l'étymologie du mot — l'étude des lois présidant au mouvement des astres, nul ne fut, à notre époque, plus astronome qu'Henri Poincaré.

Les lois de Képler — dont la loi de Newton est une conséquence très simple — règlent très aisément le mouvement relatif de deux corps célestes, le soleil et une planète par exemple. Que l'on adjoigne un troisième corps et l'on se trouve en présence des difficultés les plus formidables et les plus inattendues. Et cependant ce fameux Problème des trois corps s'impose absolument. Impossible de s'en tenir toujours au mouvement d'une seule planète, sans considération

des perturbations provenant d'une autre. Impossible, en particulier, de faire la théorie de la Lune sans tenir compte de l'influence perturbatrice du Soleil.

Et cependant, ainsi posé, le problème n'avait jamais pu être poussé bien loin. Lagrange en transforma les équations de manières diverses et intéressantes, mais ne fit guère apparaître autre chose que les intégrales des aires et des forces vives, conformément aux lois les plus générales de la Dynamique. Laplace, dans des cas extrêmement particuliers, montra que le problème admettait des solutions périodiques, mais les trois corps formaient toujours les sommets d'un triangle équilatéral ou étaient toujours en ligne droite.

C'est à Henri Poincaré que revient encore la gloire d'avoir établi l'existence de solutions périodiques infiniment plus générales, d'avoir montré que le problème n'admet point d'intégrales à propriétés analytiques simples, en dehors précisément de celles des aires et des forces vives, et notamment point d'intégrales uniformes. De plus ses méthodes se trouvèrent propres à faire une synthèse de toutes celles employées, un peu au hasard, pour résoudre le problème dans les cas où les besoins pratiques demandaient impérieusement des résultats, quels qu'ils soient. Bien plus il montra que ces méthodes pratiques avaient des infirmités profondément insoupçonnées et dont la révélation fut une véritable stupéfaction.

A l'occasion de son soixantième anniversaire, en 1889, S. M. le Roi de Suède et de Norvège, Oscar II, ouvrit un concours entre les géomètres du monde entier. Préoccupation bien digne de ces âpres contrées scandinaves qui virent naître Abel! Le premier mémoire couronné fut celui d'Henri Poincaré *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique* lequel contient déjà toutes les merveilles précédentes. D'ailleurs le même concours fut un triomphe général pour l'école française car le mémoire *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs*, immédiatement placé après le précédent, était dû à M. Paul Appell. Les deux écrits remplissent à eux seuls le tome XIII des *Acta Mathematica*.

Quelques années plus tard, en développant son travail,

Henri Poincaré devait en tirer les trois admirables volumes intitulés *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste.*

Dans le premier volume il établit rigoureusement l'existence des solutions périodiques, examine les solutions infiniment voisines et, à l'aide de ces éléments, cherche à rétablir les solutions quelconques, représentées par des séries entières en $\mu$ (cette lettre désignant un rapport de masses généralement très petit), que les praticiens obtenaient d'une manière quasi empirique. C'est ici que se place la révélation stupéfiante mentionnée plus haut et qui se trouvait déjà dans le mémoire des *Acta*. Quand, partant des solutions périodiques et de leurs transformées infiniment voisines, on cherche à bâtir une solution plus générale (qualifiée de *solution asymptotique*), la construction de celle-ci, dans la méthode d'Henri Poincaré, dépend de certaines équations différentielles linéaires à coefficients constants dans lesquelles la variable, bien entendu, est le temps. Mais les solutions contiennent alors $\mu$ non pas sous forme de séries entières, comme il arrivait dans la pratique, mais sous forme de fractions de la forme

$$\frac{A_n}{1 + a_n\mu},$$

Comment établir l'accord ? Rien de plus simple *au point de vue formel.* La simple division développe la fraction précédente en série entière. Oui, mais le rayon de convergence est alors mesuré par la valeur absolue de $-\frac{1}{a_n}$, *et il se trouve que les $a_n$ grandissent au delà de toute limite. Les séries entières en $\mu$ sont toujours divergentes.* Cependant, dira-t-on, elles n'avaient point cette apparence dans les calculs des astronomes. Ceux-ci ne prenant que les premiers termes, constataient leur rapide décroissance et voyaient bien qu'il n'y avait point d'inconvénient pratique à négliger les autres ! Tout cela est exact mais c'est là un phénomène de convergence asymptotique déjà présenté par bien d'autres séries, telles celles de Stirling, qui sont d'une construction extrêmement simple par rapport à celles de la Mécanique céleste.

La découverte d'Henri Poincaré consistait précisément à éclairer la nature intime de développements sur lesquels on ne savait à peu près rien au point de vue analytique pur.

Le second volume des *Méthodes nouvelles* est surtout consacré à la comparaison des méthodes qu'il rattache aux siennes propres. Les idées de Gyldén notamment y tiennent une place considérable. Et, chose curieuse, alors que Gyldén semble avoir d'abord servi de guide à Henri Poincaré, la puissance de ce dernier fut telle qu'il passa rapidement avant son guide et rectifia bientôt des erreurs que celui-ci commettait. Le Mémoire *Sur la Méthode horistique de Gyldén* (*Acta Mathematica*, 1905) est, à cet égard, d'une lecture singulièrement suggestive.

Le troisième volume a surtout trait à l'emploi de la notion d'*invariant intégral*. Le mouvement d'un liquide, pour prendre un exemple relativement simple, est en général régi par des équations d'une étude déjà fort compliquée. Pourtant le *volume* du liquide est une chose simple à concevoir et qui se conserve quelque compliquée que soit l'agitation des particules. C'est là un *invariant intégral*. Dans un tel cas, cet invariant est plutôt une donnée de la question qu'une conséquence des équations du mouvement, mais Henri Poincaré remarqua précisément que de tels invariants existent même dans les cas où ils ne sont pas visibles à l'avance de manière aussi évidente. Les conséquences qu'il en tire sont nombreuses. Ils correspondent notamment, dans le problème des trois corps, à l'existence de certaines solutions périodiques.

De telles solutions sont toujours caractérisées par l'existence de courbes fermées, ce qui est évident, en particulier, pour les trajectoires des corps si la périodicité consiste, pour ceux-ci, à revenir à des positions déjà occupées. Mais comment reconnaître qu'aux inextricables équations du mouvement correspondent certaines courbes fermées? L'un des plus beaux raisonnements consiste à attacher à ces courbes de certaines intégrales multiples qui, comme l'intégrale double qui figure dans la formule de Stokes, ne sont bien au fond que des intégrales de ligne *si la courbe est fermée.*

Ainsi l'invariant intégral prouve l'existence de la solution périodique.

Pour l'heure actuelle tous ces merveilleux résultats ne semblent compris que de manière partielle ; en tous cas il ne semblent pas avoir fait naître des travaux d'une ampleur proportionnée à celle de l'exemple donné par le génial créateur. Peut-être, comme l'a dit Sir G.-H. Darwin en remettant à Henri Poincaré la Médaille d'Or de la Société astronomique de Londres, l'ouvrage précédent sera-t-il, pour le prochain demi-siècle, la mine d'où des chercheurs plus humbles extrairont leurs matériaux. (*Voir* E. Lebon, *loc. cit., p.* 48.)

C'est dans un ordre d'idées plus modeste, mais encore passablement élevé, que sont conçues les *Leçons de Mécanique Céleste* professées à la Sorbonne. J'ai déjà rendu compte de ces trois nouveaux volumes dans *L'Enseignement Mathématique*[1] ce qui me permet d'être un peu plus bref à leur égard. Ce qui frappe surtout en eux c'est l'extrême habileté avec laquelle toutes les équations sont immédiatement écrites sous la forme canonique et la manière de rattacher à la méthode de la variation des constantes la question fondamentale de la destruction des termes séculaires.

Le second volume est consacré, dans une première partie, au développement de la fonction perturbatrice. Les belles recherches sur les périodes des intégrales doubles y interviennent constamment. Dans la seconde partie, consacrée à la Théorie de la Lune, nous sommes directement conduits aux équations linéaires écrites par Hill pour le mouvement du nœud et du périgée lunaires.

La Théorie des Marées occupe tout le troisième volume. Ainsi que je l'ai déjà dit plus haut (p. 15) elle emprunte un

[1] Voici d'ailleurs la liste des publications d'Henri Poincaré qui ont été analysées dans cette Revue. Les noms propres en italique sont ceux des auteurs des analyses. — La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes (*C.-E. Guye*. — T. I, 1899, p. 228). — Electricité et Optique (*A. Buhl*. — T. IV, 1902, p. 307). — Wissenschaft und Hypothese (*H. Fehr*. — T. VII, 1905, p. 330). — Leçons de Mecanique Celeste (*A. Buhl*): Tome I. — Théorie générale des perturbations (T. VIII, 1906, p. 248). — Tome II. — Fonction perturbatrice et Théorie de la Lune (T. XI, 1909, p. 231). — Tome III. — Théorie des Marées (T. XII, 1910, p. 256). — Savants et écrivains (*X*.-T. XII, 1910, p. 259). — Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik (*A. Buhl*. — T. XII, 1910, p. 446). — Calcul des probabilités (*A. Buhl*. — T. XIV, 1912, p. 165). — Hypothèses cosmogoniques (*A. Buhl*. — T, XIV, 1912, p, 167). Mentionnons aussi l'étude du docteur Toulouse sur Henri Poincaré, récemment analysée par *Ed. Claparède*. (T. XIV, 1912 p. 81).

caractère ultra-moderne à la théorie des équations intégrales de Fredholm.

Dans ces admirables développements, Henri Poincaré fait à beaucoup de géomètres l'effet d'être isolé : lui seul pouvait se retourner dans l'infinie variété de ces questions ardues. Cette impression vient probablement de la concision de son style mais cependant, si l'on persiste à l'étudier, on est rapidement convaincu qu'il n'a jamais cherché à s'enfermer dans une tour d'ivoire. Au contraire, il citait avec empressement tous ceux à qui il empruntait quelque chose et semblait heureux de fondre leurs travaux avec les siens. Dans les si difficiles chapitres qu'il consacre à la non-existence des intégrales uniformes du problème des trois corps (*Méthodes nouvelles*, t. I, chapitres V et VI), il montre tout le parti qu'il tire des célèbres résultats de M. Darboux concernant l'obtention des coefficients des termes de rang élevé dans la série de Taylor.

Dans le tome II des *Leçons*, il joint soigneusement aux siens les travaux de M. Picard sur la périodicité des intégrales doubles et emprunte à M. Appell ses séries hypergéométriques à deux variables pour aborder le développement de la fonction perturbatrice. Sa gloire lui semblait sans doute plus chère quand elle était celle de la Sorbonne et plus généralement de cette école française, maintenant consternée par l'immense perte qu'elle vient de faire.

Ce qu'il y a d'effrayant, c'est qu'il n'a jamais cherché à donner le moindre caractère définitif à ses travaux de mécanique céleste. Sans cesse il y ajoutait quelque chose de nouveau, disait y apercevoir des lacunes que personne n'avait vues mais qui étaient pour lui prétexte à de nouvelles et importantes publications.

Quelques semaines avant sa mort paraissait dans les *Rendiconti* du Cercle mathématique de Palerme un article *Sur un théorème de Géométrie* dans lequel il revient encore à ses chères solutions périodiques du Problème des trois corps. Il s'agit cette fois de reconnaître l'existence de certaines d'entre elles pour des valeurs de $\mu$ non très petites, ce qu'il rattache à l'existence d'un invariant intégral

relatif à de certaines transformations qu'il considère comme purement géométriques.

Il montre les grandes difficultés qu'il rencontre et exprime ainsi le regret de ne pouvoir les vaincre complètement : « Il semble, dans ces conditions, que je devrais « m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas « résolu la question ; mais après les inutiles efforts que j'ai « faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage « était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant « quelques années ; cela serait très bien si j'étais sûr de « pouvoir le reprendre un jour, mais, à mon âge, je ne puis « en répondre. D'un autre côté, l'importance du sujet est « trop grande et l'ensemble des résultats obtenus trop con- « sidérable déjà, pour que je me résigne à les laisser défini- « tivement infructueux. Je puis espérer que les géomètres « qui s'intéresseront à ce problème et qui seront sans doute « plus heureux que moi, pourront en tirer quelque parti et « s'en servir pour trouver la voie dans laquelle ils doivent « se diriger ».

Quels mots ajouter, dit M. Paul Painlevé, à ce testament scientifique si noble et si simple ? Rien, en effet. Tout commentaire risquerait de détruire le sublime provenant de tant de modestie s'ajoutant à tant de valeur.

L'honneur de continuer à la Sorbonne l'enseignement d'Henri Poincaré échoit à M. Paul Appell, qui reprend la chaire de Mécanique céleste sous le titre de « Mécanique analytique et Mécanique céleste ».

Ceci n'étonnera personne, non seulement parce que les travaux des deux géomètres présentent de nombreux contacts, non seulement parce que les équations de la dynamique ont été mises, par M. Appell, sous des formes nouvelles et originales, qui pourraient bien donner, en mécanique céleste, des surprises analogues à celles qu'Henri Poincaré tirait de la forme canonique, mais aussi parce que l'éminent successeur a souvent manifesté le désir de voir quelque géomètre ou astronome se reporter aux travaux d'Henri Poincaré pour essayer de les rendre plus accessibles en quelque cas particulier simple et heureusement choisi. Par suite, le

géomètre ou l'astronome en question ne pouvaient vraisemblablement espérer de meilleur guide.

## Le Physicien.

Le passage de la Mécanique Céleste à la Physique mathématique, ou réciproquement, paraît avoir été fait par Henri Poincaré avec une aisance extrême, avec une continuité absolue.

Au moment où les grands problèmes de la Physique s'offrirent à lui, les esprits étaient particulièrement en butte à l'obsession mécaniste. Il fallait trouver des explications mécaniques de la lumière, de l'électricité, bref, de tous les phénomènes. L'école anglaise, avec Maxwell, et après des efforts aussi considérables que bizarres, semblait bien entrevoir quel devait être le véritable résultat mais la clarté n'était pas la qualité dominante de Maxwell. Ce dernier entassait les unes sur les autres des théories d'apparences contradictoires ; quand on les avait toutes lues, non seulement on ne savait point quelle était la bonne, mais on avait encore l'impression extrêmement déconcertante que l'auteur avait tout fait pour empêcher un choix définitif.

La véritable pensée de Maxwell nous fut clairement livrée par Henri Poincaré, notamment dans ses admirables leçons de la Sorbonne publiées sous le titre *Electricité et Optique*. Si l'on veut une théorie mécanique de l'électricité ou de la lumière, c'est à dire si l'on veut construire les équations des phénomènes électriques ou lumineux *en partant des équations de la Dynamique*, la chose est possible *d'une infinité de manières*. Choisissons la manière qui nous semble être la plus commode et la plus féconde, mais quant à en imaginer une qui nous livrerait un mécanisme unique, définitif et nous ferait connaître une vérité physique absolue, ceci n'appartient plus à la physique mais à la métaphysique.

Une telle conclusion ébranle douloureusement l'esprit de celui qui la conçoit pour la première fois. L'homme, dit Henri Poincaré, ne se résigne pas aisément à ignorer le fond des choses.

Mais quelle consolation pour celui qui se débarrasse courageusement de la préoccupation purement mystique des vérités premières et qui sait chercher les conséquences accessibles de théories semblant arbitraires à la base et pourtant sans cesse génératrices de faits éclatants et merveilleux.

Toutes vagues qu'elles étaient, les théories de Maxwell conduisaient cependant à concevoir la lumière comme résultant d'oscillations électriques à période très courte. Hertz réalisa les oscillations auxquelles son nom est resté attaché, oscillations qui furent immédiatement assimilées par tout le monde à de la lumière à grande longueur d'onde. Nous devons d'abord à Henri Poincaré un magistral exposé de ces géniales créations, exposé qu'il féconda bientôt de ses propres réflexions. Là encore il appliqua toutes les ressources de son analyse. Les séries divergentes qu'il a employées en Mécanique Céleste interviennent dans ses recherches sur la diffraction des ondes hertziennes (*Rendiconti*, Palerme, 1910). Les équations intégrales jouent pour lui un rôle analogue. Quand Max Planck explique l'émission par le rôle d'une infinité d'oscillateurs hertziens de périodes diverses (théorie des Quanta), Henri Poincaré tire immédiatement du calcul des probabilités une confirmation de cette théorie.

La lumière longitudinale ne l'embarrasse pas plus que la lumière transversale, d'où ses contributions à l'étude des rayons cathodiques.

Ce qui est extraordinaire en tout ceci, c'est le pouvoir d'expliquer toutes les expériences et même d'en susciter sans en faire par soi-même. Ce n'est peut-être pas la première fois qu'arrive une telle chose car personne n'a encore oublié, je pense, cet extraordinaire Américain qui s'appelait Willard Gibbs et qui, sans jamais faire le moindre travail de laboratoire, a livré aux physiciens et aux chimistes des résultats que ceux-ci vérifiaient par un labeur acharné. Mais, alors que Willard Gibbs avait surtout des préoccupations physico-chimiques, il semble plutôt qu'Henri Poincaré n'était jamais préoccupé longtemps dans une direction donnée. C'est, dès qu'on annonçait quelque fait, qu'il trouvait immédiatement dans son arsenal analytique quelque méthode qui

s'y appliquait, alors qu'il l'avait créée autrefois en vue d'autre chose. Et cette méthode donnait toujours du nouveau.

Il y a d'ailleurs là un triomphe manifeste de la Physique mathématique, telle qu'elle a été si souvent taxée d'impuissance par les physiciens. Henri Poincaré y débuta par ses cours de la Sorbonne sur le potentiel newtonien, l'élasticité, la propagation de la chaleur, etc. C'est bien le point de vue mathématique où l'on semble parler le langage physique uniquement pour interpréter certaines solutions d'équations différentielles. Quel mépris certains praticiens n'ont-ils point montré pour de telles méthodes ! Et cependant, entre les mains d'un géomètre, elles ont donné de nombreux résultats d'un caractère indéniablement physique. La télégraphie sans fil y a trouvé des perfectionnements ; les aurores polaires si longtemps mystérieuses ont révélé tout au moins une grande partie de leurs secrets, les hypothèses cosmogoniques ont pu être approfondies aussi bien dans leurs caractères physiques que dans leurs caractères mécaniques, la chaleur solaire, les étoiles nouvelles ou variables ont été considérées à des points de vue nouveaux. La nouvelle mécanique d'Hertz et de Lorentz, où les masses sont fonctions des vitesses, exige toutes les connaissances qu'un physicien peut avoir sur la structure électrique des atomes. Et comme, dans ces récentes théories de la matière, l'atome apparaît comme construit à l'image d'un système planétaire, Henri Poincaré semblait revenir par là vers ses recherches concernant la stabilité de tels systèmes. Admirable unité sous la si grande diversité apparente des problèmes examinés. D'ailleurs la comparaison entre l'ensemble des corpuscules constituant la matière sur laquelle nous expérimentons et l'ensemble des corps célestes de la Voie lactée, l'a notablement préoccupé. Ce dernier ensemble, réduit à une échelle des plus minuscules, lui semble devoir donner la matière radiante des tubes de Crookes. Cette originale conclusion, donnée pour la première fois dans le *Bulletin de la Société astronomique de France,* en 1906, semble avoir intéressé son illustre auteur de manière de plus en plus précise

et c'est ainsi qu'elle revient dans les *Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques* qu'il a publiées en 1911.

En résumé, il unit la Physique et la Mécanique Céleste comme l'ont fait Newton, Lagrange, Laplace, Cauchy, mais au milieu de complexités modernes dont ces précurseurs ne pouvaient avoir aucune idée.

De plus, la mécanique nouvelle le conduit à une critique extrêmement pénétrante des principes fondamentaux de l'ancienne et particulièrement du principe de la réaction égale et contraire à l'action. Ceci ne pouvait être fait sans recourir justement aux conceptions qui donnent à la matière un substratum électrique, qui limitent les vitesses des masses en mouvement à la vitesse de la lumière et rendent ces mêmes masses fonctions des vitesses. Ainsi la physique nouvelle, tout en profitant du secours d'un géomètre de génie, a pu permettre à celui-ci de revenir examiner les bases de la mécanique newtonienne.

## Le Philosophe.

Jamais philosophie ne fut mieux appuyée sur la Science que celle d'Henri Poincaré. La variété infinie des hypothèses physiques qui permettent, aussi logiquement l'une que l'autre, d'expliquer les phénomènes observés, et entre lesquelles on ne se décide au fond que pour des raisons de commodité, l'a conduit directement à la conception *pragmatiste* de la vérité.

Il en est de même de ses recherches si profondes sur les principes de la géométrie. Tout d'abord, la géométrie non-euclidienne correspond à des propriétés spatiales des fonctions fuchsiennes, tout comme la géométrie et la trigonométrie euclidiennes correspondent à des propriétés spatiales de fonctions élémentaires. La première ne constitue donc point une « grimace scientifique », un « paradoxe sans utilité », une « plaisanterie logique », comme l'ont dit certains philosophes qui n'ont d'ailleurs pas laissé des noms bien remarquables, mais que M. Gino Loria a eu cepen-

dant le scrupule de citer dans ses excellentes *Theorien der Geometrie* (Leipzig, 1888).

Ce n'est pas davantage le « plus incohérent des édifices » ayant une « base volontairement fausse », comme l'écrit, bien mal à propos, M. Félix le Dantec dans son récent volume de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine intitulé : *Contre la Métaphysique* (p. 82). Il y a autant de cohérence dans la théorie des fonctions fuchsiennes que dans la trigonométrie classique.

Des êtres ne faisant que de l'analyse et n'ayant aucune conception spatiale auraient pu cependant construire analytiquement les fonctions circulaires, elliptiques, abéliennes, fuchsiennes, etc. Il se trouve que les hommes conçoivent un espace dont les propriétés les plus simples correspondent précisément aux plus simples des fonctions précédentes. Rien n'empêche d'imaginer d'autres êtres, ayant simplement même logique, mais ayant, quant au reste, évolué de façon différente et de manière à imaginer un espace non-euclidien. De ces êtres ou de nous, qui possèderait la « vraie » géométrie ? Poser ainsi la question, c'est la résoudre et c'est montrer qu'il n'y a pas de géométries plus ou moins vraies, mais seulement des géométries plus ou moins « commodes ».

C'est cette substitution de la notion du commode et de l'utile à la notion du vrai qui fait rattacher au pragmatisme une grande part de la philosophie d'Henri Poincaré. Mais je crois bien qu'au fond il mérite mieux encore que l'étiquette du système précédent. J'hésite même à me servir à son égard d'aucune étiquette en *isme* et j'ai l'impression que M. René Berthelot a écrit un gros volume [1] pour combattre contre des moulins à vent.

Ce qui me frappe avant tout chez mon illustre maître, c'est un idéalisme qui peut à coup sûr se placer parmi les plus purs et les plus élevés, celui où la pensée seule semble retrouver en leurs sommets tous les systèmes philosophi-

---

[1] Un romantisme utilitaire. Le pragmatisme chez Nietsche et chez Poincaré. — F. Alcan. Paris, 1911.

ques, même en y comprenant ceux qui ne sont pas idéalistes. Sa pensée n'aboutit pas à un système ; elle les domine tous et se crée sans cesse de nouveaux horizons non encore catalogués.

D'autre part, imaginons un polyglotte absolument universel, connaissant les milliers d'idiomes qui se partagent la surface du globe et qui ne trouverait rien de plus commode que de parler à tous les représentants de notre espèce les divers langages compris par eux, cela avec une telle aisance qu'il ne penserait même point à dire sur quelle langue portent ses préférences personnelles. Bien que ce ne soit là qu'une comparaison très grossière, Henri Poincaré, vis-à-vis des innombrables langages philosophiques *et même religieux*, fait souvent penser à un tel polyglotte.

Ainsi le haut degré d'objectivité de ses résultats scientifiques ne permet pas de lui reprocher de les avoir embrouillés par des considérations métaphysiques.

Mais quand après avoir merveilleusement profité, comme les savants les plus réalistes, de l'espace, du temps, de la force, etc., il voulait nous montrer qu'il n'était pas dupe des cadres où il avait cependant si bien travaillé, il devenait un métaphysicien prodigieux. Tout ce qui encadre l'analyse est analysé et il essaie de montrer que nous avons inventé les cadres aussi bien que leur contenu. C'est alors qu'il ne croit plus ni à l'espace ni au temps, inventions pensées pour localiser commodément la pensée. Celle-ci devient « l'éclair qui est tout ».

Et si l'idéalisme correspond vraiment à ce rôle de la pensée, ne faut-il pas admettre que l'homme qui, dans les temps modernes, a su penser ainsi, a eu un idéalisme supérieur, que nous ne comprenons qu'imparfaitement mais qui nous entraînera justement à penser davantage ; c'est vraiment le propre de la véritable philosophie que de ne pouvoir se transmettre de façon intégrale mais plutôt de faire toujours et toujours penser.

L'idéalisme d'Henri Poincaré me semble aussi remarquable par l'élimination possible de bien des formes de mysticisme. Tout être apprenant à penser commence par être mys-

tique : il s'assimile, modifie, ou invente une religion. Sinon la Nature éveille en lui un sentiment de poésie supérieure ou de suprême justice. S'il fait de la Science il y trouve une abondante matière pour des premières rêveries toujours objectivées. Il part volontiers, à cheval sur un rayon de lumière, pour parcourir l'espace infini, cette sphère dont la surface est partout et le centre nulle part. Il est finalement étreint, vaincu par de tels sentiments d'infinitude et c'est la rêverie mystique dans toute sa splendeur. Mysticisme *réaliste,* si l'on veut, mysticisme qui paraît d'abord prolonger la réalité observable avec une évidence incontestable et qui, cependant, paraît de moins en moins légitime au savant. Ce dernier le résout en questions dépourvues de sens.

En disant que ces mystiques conceptions sont enfantines, je ne crois pas exagérer, car je les ai personnellement éprouvées, avec une absolue conviction, quand j'étais enfant. Je ne les critique pas ; je crois même qu'elles renferment des émerveillements prodigieusement utiles comme éveillant une curiosité féconde !

Mais, en définitive, la Science ne conduit pas là.

Henri Poincaré nous a montré mieux que personne les transformations géométriques qui, à notre espace euclidien, feraient correspondre un espace fermé, les êtres qui, vivant dans des espaces fermés, croiraient cependant que ces espaces sont infinis et illimités.

Dès lors qui prouve que nous ne sommes pas semblables à de tels êtres ou, plus exactement, que des êtres convenablement construits ne seraient pas fort étonnés en nous voyant attribuer des propriétés d'infinitude à des variétés géométriques qui, pour eux, n'auraient nullement ces propriétés.

Point de vérité absolue ni dans nos conceptions primitives, ni dans celles de ces êtres ; la seule vérité est dans l'impeccable mécanisme déductif qui permet de passer des unes aux autres. Et là encore ce n'est que la Pensée !

M. Camille Flammarion, qui représente à un très haut et d'ailleurs très noble degré le point de vue réaliste et mystique, vient de publier dans le *Bulletin de la Société astrono-*

*mique de France* (1912, pp. 372 et 418) des articles nécrologiques où il résume, en toute sincérité, des conversations qu'il eut avec Henri Poincaré. Rien de plus suggestif que ces conversations et il faut savoir gré à M. Flammarion de nous les rapporter.

La Terre, dit ce dernier, a sûrement existé *avant* l'homme, c'est à dire *avant* la pensée humaine. Il en est de même pour certains êtres vivants que les géologues retrouvent sous forme de fossiles. Enfin Sirius n'est pas dans notre cerveau ! Si nous n'existions point, les étapes cosmogoniques et géologiques auraient existé tout de même et Sirius ne s'anéantirait pas !

De telles opinions, répondait Henri Poincaré, sont simplement celles du sens *commun*[1].

Et, en effet, il semble relativement facile de voir à quelle condition elles ont un sens. Il faut faire du temps et de l'espace des réalités premières, dans lesquelles on analyse mais qu'on n'analyse pas.

Au contraire, sans m'accorder d'abord la notion du temps, je puis penser à la Terre fluide, aux fossiles, à moi-même et penser que je ne puis classer tout cela d'une manière utile qu'en pensant une autre notion qui sera précisément celle du temps.

On pourrait faire un raisonnement analogue pour l'espace.

Je puis imaginer Sirius et bien des choses que je ne classerai utilement qu'en inventant la notion d'espace.

Ne nous gênons point pour faire des inventions de cette nature ; autrement nous serions conduits à nous paralyser pratiquement de la manière la plus désastreuse. Mais ceci n'est point une raison pour considérer ensuite ces inventions comme étant les données immédiates et primordiales de la connaissance.

A l'appui de cette manière de voir je pourrais peut-être renvoyer à quelques belles pages dues à M. Bergson, qui n'est pas de ceux qui placent ces données dans le temps ou

[1] Au sujet de la simple acceptation du sens commun par le savant, M. Emile Picard vient précisément d'écrire un très intéressant article dans la *Revue scientifique* du 9 novembre 1912.

dans l'espace et qui, sur de tels points, me semble parfaitement d'accord avec Henri Poincaré.

D'ailleurs si la Faculté des Sciences de Paris n'a jamais possédé de chaire de Philosophie scientifique — comme le remarquait M. Darboux dans un discours qu'il prononça à l'occasion de son jubilé [1] — il semble que la Sorbonne soit mieux pourvue du côté de la Faculté des Lettres. C'est ainsi qu'à l'appui des idées précédentes on peut citer aussi celles de M. G. Milhaud qui, par différentes voies et notamment par une critique historique qui remonte jusqu'à l'antiquité, a puissamment contribué à mettre en lumière les rapports, plus ou moins entrevus selon les époques, de la géométrie et de l'expérience, pour aboutir à des conclusions qui sont sensiblement les mêmes que celles d'Henri Poincaré.

Le mouvement philosophique créé par ce dernier n'est pas près de s'éteindre. Sa pensée, restée sereine jusqu'au seuil de la mort, nous apporte d'ailleurs, par delà la tombe, les derniers reflets qui n'eurent point le temps de voir le grand jour avant un trépas aussi soudain.

La revue *Scientia* de septembre 1912 contient un article sur l'espace et le temps où les habituelles questions idéalistes et relativistes sont augmentées de l'éclair d'une intuition nouvelle.

Certes nous sommes déjà très habitués à définir l'espace en partant des propriétés des solides. Mais qu'est-ce qu'un solide sinon un système mécanique considéré comme invariable en lui-même et par suite très particulier. On pourrait aussi bien construire un espace en maniant des systèmes variables en eux-mêmes et de telle façon que le temps soit alors mêlé à l'espace d'une manière telle que les deux concepts ne puissent plus être séparés comme ils le sont continuellement dans les raisonnements humains.

Des êtres portés à avoir recours à la nouvelle construction pourraient fort bien ne pas concevoir, *au même instant*, des points séparés par certaines distances ni imaginer *un*

[1] G. Darboux. *Eloges académiques et discours*, p. 481. (Volume publié à l'occasion du Jubilé. Hermann, Paris, 1912).

*même point de l'espace* vu d'abord et revu au bout d'un certain temps.

Qui nous construira maintenant tous ces mondes merveilleux où tous les rêves sont logiques, toutes les chimères rigoureuses, toutes les fantasmagories vraisemblables?

Quand reviendra le mystérieux enchanteur qui stupéfiait les penseurs les plus subtils plus aisément et plus inéluctablement que les Edgar Poë ou les Jules Verne ne stupéfiaient les enfants ?

Inclinons-nous très bas devant son tombeau, mais comment n'y point voir qu'une vaine partie de cet espace euclidien à trois dimensions dont il a si souvent brisé l'ensemble, comme pour vivre plus à l'aise dans les nouveaux univers que sa lumineuse pensée pouvait continuellement créer.

Aussi vit-il par delà la mort, par delà même le banal infini qui pour beaucoup constitue l'immortalité et bien au-delà de tous les cieux plus ou moins mystiques où l'harmonie est vraiment trop humaine !

A. Buhl (Toulouse).

---

# SUR UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME DE L'ÉLIMINATION ENTRE PLUSIEURS ÉQUATIONS INTÉGRALES

M. Holmgren, par une question posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*[1], au sujet de l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \int_0^x \frac{\varphi(y)\,dy}{(x-y)^\alpha} = f(x) \ ,$$

attire l'attention sur les équations du type de Volterra dans lesquelles le noyau affecte la forme $h(x-y)$ telles que

$$\varphi(x) - \int_0^x h(x-y)\varphi(y)\,dy = f(x) \ . \qquad (1)$$

On connaît la parenté qui relie les équations de ce type aux équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants, parenté qui rend vraisemblable à priori leur résolution par des formules élémentaires. On est d'autant mieux fondé à prévoir une semblable résolution que M. Levi-Civita a donné, en 1895[2], la solution générale de l'équation de première espèce correspondant à (1), à savoir

$$\int_0^x h(x-y)\varphi(y)\,dy = f(x) \ . \qquad (2)$$

En fait, les deux problèmes (1) et (2) peuvent être facilement réduits l'un à l'autre et ne sauraient être regardés comme essentiellement distincts. En étudiant leur relation, j'ai eu l'occasion

[1] *Interm. des Mathém.*, Tome XIX, p. 102, mars 1912.
[2] *Actes de l'Académie de Turin*, novembre 1895.

de remarquer que le procédé classique, par lequel on élimine plusieurs variables entre des équations linéaires à coefficients constants, peut être immédiatement transporté aux équations intégrales de première et de seconde espèce lorsque tous les noyaux ont la forme $h(x - y)$. Le passage est immédiat et la théorie développée ci-dessous n'est qu'une sorte de duplicata de celle des déterminants de l'algèbre ordinaire. Le problème d'élimination ainsi traité est sans doute bien particulier par suite de la forme toute spéciale des noyaux; mais l'analogie dont il s'agit le rend néanmoins intéressant et justifiera peut-être les quelques lignes que je vais lui consacrer.

Mes remarques ont leur origine naturelle dans ma *Note sur une opération analytique et son application aux fonctions de Bessel*[1].

Nommons, pour abréger, *produit intégral* de $n$ fonctions $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... , $a_n(x)$ d'une variable $x$ l'intégrale multiple

$$x^{n-1}\int\cdots\int a_1(x_1x)\, a_2(x_2x) \ldots a_n(x_nx)\, dt \quad . \tag{3}$$

exécutée dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ à $(n - 1)$ dimensions[2]. L'élément de cet espace, ou $dt$, est égal à $dt = dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}$; la lettre $x_n$, introduite par raison de symétrie, est telle qu'on a identiquement

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \quad ; \tag{4}$$

enfin le champ d'intégration est défini par les $n$ inégalités

$$0 \leq x_i \leq 1 \ , \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \ . \tag{5}$$

Le facteur $x^{n-1}$ de la formule (3) y a été introduit de manière à permettre pour le produit intégral — que je désignerai souvent par $[a_1 a_2 a_3 \ldots a_n]$ — la notation suivante

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = \int\int\cdots\int a_1(x_1)\, a_2(x_2) \ldots a_n(x_n)\, dt \ , \tag{6}$$

les variables $x_i$ étant cette fois soumises aux restrictions que voici

$$0 \leq \frac{x_i}{x} \leq 1 \ , \qquad \text{et} \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x \ . \tag{7}$$

[1] *Mém. de la Soc. de Phys. et d'Hist. nat. de Genève*, vol. 34 (1904).

[2] Cette notion de *produit intégral* qui s'introduit ici est formée sur le modèle des *noyaux itérés* des théories générales.

En prenant cette seconde forme, on a, par exemple, pour deux facteurs

$$[a_1 a_2] = \int_0^x a_1(y)\, a_2(x-y)\, dy = \int_0^x a_2(y)\, a_1(x-y)\, dy\ . \qquad (8)$$

Bien entendu le produit intégral de $n$ facteurs $a_1 \ldots a_n$ dépend de leur ensemble et non pas simplement de leur produit algébrique effectué; ainsi, avant de calculer une expression telle que $[p]$, il importe de connaître le mode de formation de la quantité $p$, notamment le nombre de facteurs, ou de *dimensions*, qu'elle contient. Par exemple, si $a$ est de première dimension, c'est-à-dire facteur unique, je prendrai par convention $[a] = a$; au contraire

$$[a\,,\,1] = \int_0^x a(z)\, dz = \int_0^x a(x-z)\, dz$$

comme on vient de voir. De même

$$[1] = 1 \qquad [11] = x \qquad [111] = \frac{x^2}{2}\ , \qquad \text{etc.}$$

Le symbole $[a_1 a_2 \ldots a_n]$ possède les propriétés classiques de la multiplication ordinaire. Quand on applique, par exemple à la définition (3), la règle du jacobien, on constate immédiatement la symétrie des $n$ dimensions $x_1, x_2, \ldots x_n$. En prenant pour coordonnées $x_2, x_3, \ldots, x_n$ au lieu de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, l'élément $dt$ se change en $dx_2 dx_3 \ldots dx_n$; comme d'autre part les conditions (4) et (5) qui définissent le champ d'intégration sont aussi symétriques, on voit que le produit intégral $[a_1 a_2 \ldots a_n]$ est *commutatif* comme ne dépendant pas de l'ordre des facteurs.

La propriété *associative*, d'après laquelle pour opérer la multiplication de plusieurs facteurs on peut remplacer quelques-uns d'entre eux par leur produit effectué, demeure aussi inaltérée. Pour le faire voir, il suffira de vérifier l'équation

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_1 a_2 \ldots a_{n-2}[a_{n-1} a_n]] \qquad (9)$$

qui redonne le cas général par alternance et répétition.

Or mettons le produit $[a_1 a_2 \ldots a_n]$, ou (3), sous la forme

$$x^{n-2} \int_{(n-2)} \cdots \int a_1(x_1 x) \ldots a_{n-2}(x_{n-2} x)\, dx_1 \ldots dx_{n-2}$$
$$\left\{ x \int a_{n-1}(x_{n-1} x)\, a_n(x_n x)\, dx_{n-1} \right\}\ . \qquad (10)$$

Alors, dans l'intégrale simple réservée à droite pour être exécutée la première, faisons

$$x_{n-1}x = y \qquad 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-2} = u \ ,$$

d'où

$$x dx_{n-1} = dy \qquad x_n x = (1 - x_1 - \ldots - x_{n-1})x = xu - y \ ;$$

l'intégrale en accolade est ainsi devenue

$$\int_0^{xu} a_{n-1}(y) a_n(xu - y) dy \ ,$$

c'est, d'après (8), la fonction $[a_{n-1} a_n]$ une fois la variable $x$ remplacée par $xu$, ou $x(1 - x_1 - x_2 \ldots - x_{n-2})$. On n'a plus besoin que de reprendre la définition (3) pour reconnaître dans (10) le second membre de la propriété associative (9).

L'extension au produit intégral de la propriété *distributive* nécessite quelques précautions.

Si les $a$, $b$, $c$, ... sont des quantités de première dimension, ainsi que les totaux $a_1 + a_2 + \ldots$, $b_1 + b_2 + \ldots$ etc., le produit intégral

$$[(a_1 + a_2 + \ldots)(b_1 + b_2 + \ldots)(c_1 + \ldots) \ldots]$$

a un sens complètement déterminé par nos précédentes conventions. Pour le calculer, il faut, conformément à l'équation (3), intégrer le dit produit après avoir remplacé $x$ par $x_1 x$ dans tous les $a$, par $x_2 x$ dans tous les $b$, etc. La règle de multiplication des polynômes, équivalente à la propriété distributive, se trouve exacte ainsi qu'on le constate immédiatement.

Prenons le cas un peu plus général d'une expression polynôme P, dont tous les termes sont de même dimension ; on a, par exemple, sans introduire explicitement des coefficients numériques qui peuvent être réunis aux facteurs algébriques

$$P = a_1 a_2 \ldots a_m + b_1 b_2 b_3 \ldots b_m + c_1 c_2 \ldots c_m + \ldots \ . \qquad (11)$$

Nous prendrons comme définition du symbole [P], non encore rencontré jusqu'ici, l'équation

$$[P] = [a_1 a_2 \ldots a_m] + [b_1 b_2 \ldots b_m] + [c_1 c_2 \ldots c_m] + \ldots \qquad (12)$$

Cette valeur est naturellement entièrement différente de celle qu'on trouverait en traitant P comme une fonction toute donnée en $x$. Pour trouver la valeur exacte, il faut éviter dans (11) toute réduction de facteurs ou de termes semblables, traiter en un mot

les constituants $a$, $b$, $c$ ... comme autant de fonctions indépendantes et indéterminées. La remarque que voici donne le moyen d'étendre aux polynômes du type P les règles ordinaires de l'algèbre.

Soient P et Q deux polynômes respectivement de $m^{\text{ième}}$ et de $n^{\text{ième}}$ dimension, ou

$$P = a_1 a_2 \dots a_m + b_1 b_2 \dots b_m + \dots$$

$$Q = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n + \dots ;$$

leur produit algébrique étant du type P, on trouve immédiatement par la règle précédente

$$[PQ] = [a_1 a_2 \dots a_m \alpha_1 \dots \alpha_n] + [a_1 \dots a_m \beta_1 \dots \beta_n] + [b_1 \dots b_m \alpha_1 \dots \alpha_n] + \dots$$

D'autre part, les fonctions [P] et [Q] étant toutes calculées, ainsi

$$[P] = [a_1 a_2 \dots a_m] + [b_1 b_2 \dots b_m] + \dots \qquad [Q] = [\alpha_1 \dots \alpha_n] + [\beta_1 \dots \beta_n] + \dots ,$$

en appliquant à ces fonctions [P], [Q], où les crochets dans les seconds membres sont de première dimension, la règle distributive démontrée plus haut, on a

$$[[P][Q]] = [a_1 \dots a_m \alpha_1 \dots \alpha_n] + [a_1 a_2 \dots \beta_1 \dots \beta_n] + \dots$$

Ainsi, on aura

$$[PQ] = [[P][Q]] ,$$

et de même

$$[PQR] = [[P][Q][R]] = [P[QR]] = [[P][QR]] .$$

De là résulte enfin que si l'expression P se présentait sous la forme

$$P = EFG \dots + E'F'G' \dots + E''F''G'' \dots + \dots .$$

où les E, F, G, ... sont des polynômes contenant les facteurs constituants $a$, $b$, $c$, ... , comme on a évidemment

$$[P] = [EFG \dots] + [E'F'G' \dots] + [E''F''G'' \dots] + \dots ,$$

on aurait aussi, pour réduire le nombre des facteurs, la formule

$$[P] = [[E][F][G] \dots] + [[E'][F'][G'] \dots] + \dots$$

En un mot, les opérations algébriques sont possibles à condition de mettre entre crochets les facteurs polynômes dont on veut opérer le produit. Nous allons avoir l'occasion d'appliquer cette remarque.

Tout ceci étant bien compris, je passe à la notion fondamentale pour la suite, du *déterminant intégral*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [a_{ij}] \ .$$

Ici tous les $a_{ij}$ fonctions de $x$ sont supposés de première dimension; ce sont les constituants. Si nous développons le déterminant nous avons un polynôme du type P : $[a_{ij}]$ n'est autre chose que la somme des produits intégraux des $n^2$ termes de P, c'est, si l'on veut encore, l'intégrale multiple

$$x^{n-1}\int\int\cdots\int \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} dt$$

où les notations sont celles des formules (3) à (6), et dans laquelle les $a_{ij}(x)$ de la $j^{\text{ième}}$ colonne sont remplacés par $a_{ij}(x_j x)$.

Cette définition du déterminant intégral $\Delta = [a_{ij}]$ laisse intactes la plupart des propriétés du déterminant algébrique ordinaire $D = |a_{ij}|$; pour s'en assurer, il suffit d'invoquer les propriétés des produits intégraux de la forme $[P]$ dont il a été question à l'instant. Voici quelques-unes de ces propriétés.

Le changement des lignes en colonnes et des colonnes en lignes est sans effet.

Si on développe la quantité $D = |a_{ij}|$ suivant les éléments d'une ligne et qu'on désigne en général par $b_{ij}$ le mineur de l'élément $a_{ij}$, on a les identités algébriques

$$a_{1i}b_{1j} + a_{2i}b_{2j} + \ldots + a_{ni}b_{nj} = \begin{matrix} D & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \ . \end{matrix} \qquad (13)$$

Or les éléments $b_{ij}$ sont de la $n-1^{\text{ième}}$ dimension par rapport aux données $a_{ij}$; si on désigne par $\beta_{ij}$ le *produit intégral* de $b_{ij}$, on trouve immédiatement en exécutant l'opération [ ] sur les deux membres de l'équation (13),

$$[a_{1i}\beta_{1j}] + [a_{2i}\beta_{2j}] + \cdots [a_{ni}\beta_{nj}] = \begin{matrix} \Delta & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \ . \end{matrix} \qquad (14)$$

Les déterminants intégraux $\beta_{ij} = [b_{ij}]$, sont les *mineurs intégraux* de D.

Soient deux déterminants $D = |a_{ij}|$ et $D' = |a'_{ij}|$, les éléments constituants $a$ et $a'$ étant de première dimension; soient encore

$\Delta$ et $\Delta'$ les déterminants intégraux correspondants $\Delta = [D]$ et $\Delta' = [D']$. Le produit $DD'$ est du type P, on a donc

$$[DD'] = [\Delta\Delta'] = [D\Delta'] = [D'\Delta] . \qquad (15)$$

D'autre part, opérons le produit $DD'$ par la règle classique de la multiplication des déterminants, nous aurons pour ce produit un déterminant dont les éléments tels que

$$c_{ij} = a_{1i}a'_{1j} + a_{2i}a'_{2j} + \dots a_{ni}a'_{nj}$$

sont des types E, F, G, ... ; ainsi nous aurons encore la quantité $[DD']$ en calculant le déterminant intégral dont les éléments sont $[c_{ij}]$, avec

$$c_{ij} = [a_{1i}a'_{1j}] + [a_{2i}a'_{2j}] + \dots + [a_{ni}a'_{nj}] .$$

Prenons en particulier pour $D'$ le déterminant aux éléments $\beta_{ij} = [b_{ij}]$ et soient $\Delta = [a_{ij}]$, $\Delta' = [\beta_{ij}]$ ; dans ce cas, à cause des identités (14), $c_{ij}$ est nul sauf dans la diagonale principale, pour laquelle $c_{ii} = \Delta$. En vertu de (15), nous trouvons alors

$$[\Delta\Delta'] = [\underbrace{\Delta . \Delta \dots \Delta}_{(n)}] .$$

Si donc $\Delta \neq 0$, et que l'équation intégrale $[\Delta\varphi] = f$ n'admette qu'une solution, nous tirons pour la valeur du *déterminant intégral adjoint* $\Delta'$

$$\Delta' = [\Delta^{n-1}] = [\underbrace{\Delta . \Delta \dots \Delta}_{(n-1)}] .$$

Sans insister davantage sur ces relations qu'on pourrait, bien entendu, étendre et multiplier en suivant les analogies que suggère immédiatement l'algèbre élémentaire, j'aborde le problème d'élimination dont il a été question ci-dessus et qu'il est maintenant aisé de résoudre à l'aide de l'algorithme des déterminants intégraux.

Prenons un système de $n$ équations intégrales à $n^2$ noyaux $h_{ij}(x-y)$ ; ce sont les équations suivantes

$$\sum_{i}^{1,n} \int_0^x h_{ji}(x-y)\varphi_i(y)\,dy = u_j(x) \qquad (j = 1, 2, \dots n) \qquad (16)$$

avec les $n$ inconnues $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ et les seconds membres $u_1, u_2, \dots u_n$. L'élimination, toujours possible, va réduire le sys-

tème à un autre analogue, mais où les inconnues sont séparées, et tel que

$$\int_0^x \Delta(x-y)\varphi_j(y)\,dy = U_j(x) \quad . \qquad (17)$$

Pour démontrer ce point, j'écris le système (16) sous la forme

$$[h_{j1}\varphi_1] + [h_{j2}\varphi_2] + \dots [h_{jn}\varphi_n] = u_j \; ; \qquad (j = 1 \,, \dots \, n) \qquad (18)$$

on va le résoudre, par les propriétés des déterminants intégraux, exactement de la même manière qu'un système linéaire de l'algèbre ordinaire. Formons un déterminant intégral en prenant les $h_{ij}$ comme éléments constituants, et soit $\Delta = [h_{ij}]$ ; désignons les mineurs intégraux de $\Delta$ par $\eta_{ij}$.

Multiplions l'équation (18) par $\eta_{ji}$, soumettons les deux membres à l'opérateur [ ] et sommons pour les diverses valeurs de $j$ ; le premier membre s'écrit alors

$$\sum_{j,k}^{1,n}\sum [\eta_{ji}[h_{j,k}\varphi_k]] = \sum_k^{1,n} [\varphi_k \sum_j^{1,n} [\eta_{ji} h_{jk}]] \quad ,$$

il se réduit simplement, en vertu des formules (14), à l'expression

$$[\Delta\varphi_i] \quad .$$

Le second membre a donné, de son côté, la quantité connue

$$U_i = \sum_j^{1,n} [\eta_{ji} u_j] \quad . \qquad (i = 1 \,, 2 \,, 3 \dots n)$$

On a donc bien démontré que les solutions éventuelles du système (16) vérifient le système (17) ; l'inverse est vrai, en général, et se démontre de la même manière.

Prenons la formule (17), soit

$$[\Delta\varphi_i] = \sum_k^{1,n} [\eta_{ki} u_k] \quad .$$

On tire de là

$$\sum_i^{1,n} [h_{ji}[\Delta\varphi_i]] = \sum_i^{1,n} \sum_k^{1,n} [u_k h_{ji} \eta_{ki}]$$

ou encore, toujours par les mêmes formules (14),

$$\left[\Delta\left[\sum_i^{1,n} [h_{ji}\varphi_i] - u_j\right]\right] = 0 \quad . \qquad (19)$$

Si donc on sait que l'équation *homogène*

$$\int_0^x \Delta(x-y)\varphi(y)\,dy = 0$$

n'admet d'autre solution que $\varphi(y) = 0$, l'équation (19) montre que (16) est une conséquence de (17).

Le cas des équations de seconde espèce se ramène immédiatement au précédent ; pour le faire voir, posons un système tel que

$$l_{j1}\varphi_1 + l_{j2}\varphi_2 + \dots + l_{jn}\varphi_n + [h_{j1}\varphi_1] + [h_{j2}\varphi_2] + \dots [h_{jn}\varphi_n] = u_j$$
$$(j = 1 \dots n) \qquad (20)$$

où les $h_{ij}$ sont toujours les noyaux fonctions de la seule différence $x - y$, et les $l$ des facteurs constants. Intégrons l'équation (20), entre les limites 0 et $x$ ; et rappelons que l'intégrale $\int_0^x a(z)\,dz$ est égale à la quantité $[a \,.\, 1]$. Alors en posant

$$l_{ij} - [h_{ij} \,.\, 1] = a_{ij} = l_{ij} - \int_0^x h_{ij}\,dx$$

on obtient immédiatement le système de première espèce

$$[a_{j1}\varphi_1] + [a_{j2}\varphi_2] + \dots + [a_{jn}\varphi_n] = \int_0^x u_j(x)\,dx \; . \qquad (21)$$

Les solutions du système (20) appartiennent à (21) ; réciproquement les solutions de (21) vérifient (20) comme le montre une simple dérivation. Une condition nécessaire pour que (20) soit résoluble, quels que soient les seconds membres $u_j$ continus en $x$, est que le déterminant intégral des quantités $a_{ij}$ soit différent de zéro.

Laissant de côté plusieurs remarques que suggère évidemment la théorie des équations algébriques linéaires, j'ajoute quelques mots encore sur le problème auquel on sera finalement toujours conduit, celui d'une équation intégrale unique

$$[\Delta\varphi] = u \; , \qquad \text{ou} \qquad \int_0^x \Delta(x-y)\varphi(y)\,dy = u(x) \; . \qquad (22)$$

C'est celle de M. Levi-Civita ; elle correspond, peut-on dire, au problème de la *division intégrale*.

Pour le résoudre, on peut souvent adopter une méthode très simple adaptée à la forme des singularités du noyau autour de l'origine ; cette marche est naturelle, car pour la possibilité du problème, la donnée $u(x)$ doit ordinairement présenter à l'origine une allure particulière déterminée par celle de $\Delta$.

Supposons, par exemple, que $\Delta$ soit tel que l'équation $[\Delta\Delta'] = 1$, c'est-à-dire

$$\int_0^x \Delta(y)\Delta'(x-y)\,dy = 1 \tag{23}$$

admette une solution $\Delta'$, continue, sauf peut-être à l'origine. De (22), on tire alors

$$[\Delta'[\Delta\varphi]] = [[\Delta\Delta']\varphi] = [\varphi . 1] = [u\Delta'] ,$$

ce qui équivaut à l'équation intégrale

$$\int_0^x \varphi(y)\,dy = \int_0^x u(y)\Delta'(x-y)\,dy$$

ou

$$\varphi(y) = \frac{d}{dx}\int_0^x u(y)\Delta'(x-y)\,dy .$$

Comme généralisation, supposons $\Delta$ tel que l'on puisse satisfaire

$$[\Delta\Delta'] = \int_0^x \Delta(y)\Delta'(x-y)\,dy = x^n , \tag{24}$$

$n$ étant un nombre entier et positif. En raisonnant comme tout à l'heure, nous amenons (22) à la forme

$$[\varphi x^n] = \int_0^x (x-y)^n\varphi(y)\,dy = \int_0^x u(x-y)\Delta'(y)\,dy ,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\varphi(x) = \frac{1}{n!}\,\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\int_0^x u(y)\,\Delta'(x-y)\,dy$$ [1].

On agirait de la même manière si $n$ cessait d'être entier et positif ;

[1] Bien entendu, cette solution, de même que la précédente, doit être vérifiée a posteriori ; ce contrôle sera toujours facile.

la détermination de la fonction $\Delta'$ réduira toujours l'équation (22) à une équation intégrale d'Abel, facilement résoluble comme on sait.

Il est sans doute ordinairement tout aussi difficile de dégager l'inconnue $\Delta'$ des formules (23) et (24) que $\varphi$ de la proposée (22), et le détour ne réalise aucun avantage signalé sur les formules de M. Levi-Civitā. Mais lorsque $\Delta$ est une fonction holomorphe autour de l'origine, $\Delta'$ l'est aussi et sa détermination n'offre pas de difficultés ; la méthode esquissée ci-dessus devient alors très pratique et donne, d'une manière rapide et élégante, la solution cherchée. Je vais, en terminant, l'appliquer à un exemple où $\Delta$ est analytique, mais non pas holomorphe à l'origine.

Soit $\Delta(x)$ de la forme

$$\Delta(x) = x^{\alpha-1}(a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots) , \tag{25}$$

l'exposant $\alpha$ étant compris entre 0 et 1 et le coefficient $a_0$ différent de zéro. Prenons

$$\Delta'(x) = x^{-\alpha}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) , \tag{26}$$

et substituons ces valeurs (25) et (26) dans l'intégrale (23). En opérant formellement les calculs sur les séries du premier membre et utilisant le résultat connu

$$\int_0^1 y^{\gamma}(1-y)^{\delta} dy = \frac{\gamma!\,\delta!}{(\gamma+\delta+1)!} ,$$

on trouve, pour déterminer les inconnues $b_0$, $b_1$, ... $b_m$, l'équation

$$a_0 b_0 (\alpha - 1)!\,(-\alpha)! = 1 ,$$

et la récurrence

$$a_0 b_m = \sum_p^{1,m} \frac{(m-\alpha-p)!\,(p+\alpha-1)!}{(m-\alpha)!\,(\alpha-1)!} a_p b_{m-p} . \quad (m = 1, 2, \dots) \tag{27}$$

Considérons les séries

$$\delta(x) = a_0(\alpha-1)! - \sum_p^{1,\infty}(p+\alpha-1)!\,a_p x^p = a'_0 - \sum_p^{1,\infty} a'_p x^p ,$$

et

$$\delta'(x) = b_0(-\alpha)! + \sum_p^{1,\infty}(p-\alpha)!\,b_p x^p = b'_0 + \sum_p^{1,\infty} b'_p x^p .$$

portons dans la récurrence (27) les valeurs

$$a_p = \frac{a'_p}{(p+\alpha-1)!} \qquad b_p = \frac{b'_p}{(p-\alpha)!} ;$$

elle devient

$$b'_m a'_0 = \sum_p^{1,m} a'_p b'_{m-p} .$$

C'est celle même que fournit la méthode des coefficients indéterminés appliquée à l'équation

$$\delta(x)\delta'(x) = 1 .$$

Pour trouver les $b_m$ et $\Delta'$, il suffira donc d'ordonner le quotient $\frac{1}{\delta}$ suivant les puissances de $x$ en posant

$$\delta' = \frac{1}{\delta} = \sum_m^{0,\infty} b'_m x^m ;$$

on aura ensuite

$$b_m = \frac{b'_m}{(m-\alpha)!} , \qquad \text{et} \qquad \Delta'(x) = x^{-\alpha} \sum_m^{0,\infty} \frac{b'_m x^m}{(m-\alpha)!} .$$

C'est la règle de la réduite de Laplace que j'ai déjà développée dans le mémoire cité plus haut.

Si la série $\delta(x)$ est convergente, la convergence de $\delta'(x)$, et à fortiori celle de $\Delta'(x)$, est assurée ; on peut ajouter que même si $\delta(x)$ est divergente, mais que $\alpha$ soit inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$, $\Delta'(x)$ est encore convergente.

Pour faire voir ce point, reprenons la récurrence (27) ; nous obtenons une majorante en remplaçant tous les $a_p$ par leurs valeurs absolues $\alpha_p = |a_p|$, et le coefficient numérique

$$\frac{(m-\alpha-p)!\,(p+\alpha-1)!}{(m-\alpha)!\,(\alpha-1)!}$$

par son maximum. Ce maximum, on le montre aisément, s'obtient quand $m$ est donné pour une des valeurs extrêmes $p=1$ ou $p=m$ ; les valeurs asymptotiques des termes correspondants se déterminent par la formule de Stirling, ils valent respectivement

$$\frac{\alpha\,!}{(\alpha-1)!}\,\frac{1}{m} , \qquad \text{et} \qquad \frac{(-\alpha)!}{(\alpha-1)!\,m^{1-2\alpha}} .$$

Ainsi, dans le cas mentionné $\alpha \leq \frac{1}{2}$, le coefficient numérique est borné supérieurement. Si A est la borne supérieure, la majorante cherchée sera

$$\alpha_0 \beta_m = A \sum_p^{1,m} \alpha_p \beta_{m-p} \; ; \tag{28}$$

si l'on prend $\beta_0 = |b_0|$, on tire de (28) des $\beta_m$ tels que $\beta_m \geq |b_m|$. Posons dès lors

$$a(x) = \alpha_0 - \sum_p^{1,\infty} \alpha_p x^p \, , \qquad \text{et} \qquad b(x) = \sum_p^{0,\infty} \beta_p x^p \, ,$$

la détermination (28) des $\beta_m$ est celle qui résulte de la condition

$$\alpha_0 b(x) + A b(x) (a(x) - \alpha_0) = \alpha_0 \beta_0 \, .$$

ou

$$b(x) = \frac{\alpha_0 \beta_0}{\alpha_0 + A(a(x) - \alpha_0)} \, .$$

Or, d'après notre hypothèse, $a(x)$ est convergent, donc $b(x)$ le sera dans un certain domaine et $\Delta'(x)$ à fortiori. Le rayon de convergence certaine de $\Delta'(x)$ est égal soit à celui de $\Delta(x)$, soit encore au module de la plus petite racine de l'équation

$$A a(x) + \alpha_0 (1 - A) = 0 \, .$$

Pour finir, appliquons ces généralités à un exemple analogue à celui de M. Holmgren, en considérant l'équation

$$\int_0^x y^{\alpha-1} R(y^\beta) f(x-y) dy = \varphi(x) \tag{29}$$

où $R(y^\beta)$ désigne un polynôme en $y^\beta$ ne s'annulant pas à l'origine, et $\beta$ un exposant positif qu'on devrait supposer entier pour rester dans le cadre des explications précédentes, mais qui peut être en réalité quelconque. Je ne résous d'ailleurs (29) que pour le seul cas $\varphi(x) = 1$, ce qui suffit, comme on a vu plus haut.

Prenons les réduites de Laplace. Celle de $y^{\alpha-1} R(y^\beta)$ est évidemment de la forme $y^{\alpha-1} P(y^\beta)$, où P désigne un nouveau polynôme possédant un terme constant ; celle de $\Delta'(x)$, ou $f(x)$, sera donc égale au rapport $x^{-\alpha} : P(x^\beta)$.

Appliquons à ce rapport la décomposition en éléments simples ;

la réduite de $f(x)$ se présente alors comme la réunion d'un certain nombre de termes des formes

$$A\frac{x^{-\alpha}}{1-ax^{\beta}}, \quad \text{et} \quad A\frac{x^{-\alpha}}{(1-ax^{\beta})^{p}}. \quad (p = \text{entier})$$

Développées en séries, ces fonctions s'écrivent

$$A\sum_{n}^{0,\infty} a^{n}x^{\beta n-\alpha}, \quad \text{et} \quad A\sum_{n}^{0,\infty} a^{n}\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{1.2.3\dots n}x^{\beta n-\alpha};$$

ainsi, et telle est la solution, l'inconnue $f(x)$ se compose d'un nombre fini de fonctions analytiques des formes

$$Ax^{-\alpha}\sum_{n}^{0,\infty}\frac{a^{n}x^{\beta n}}{(\beta n-\alpha)!}$$

et

$$Ax^{-\alpha}\sum_{n}^{0,\infty}\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{1.2.3\dots n}\frac{a^{n}x^{\beta n}}{(\beta n-\alpha)!}.$$

Les fonctions précédentes sont évidemment apparentées aux fonctions de Bessel.

Posons, pour abréger,

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x,a)=\sum_{n}^{0,\infty}\frac{a^{n}x^{\beta n+\alpha}}{(\beta n+\alpha)!};$$

on démontre immédiatement l'équation

$$(a-b)\int_{0}^{x}\varphi_{\alpha,\gamma}(y,a)\varphi_{\beta,\gamma}(x-y,b)dy=\varphi_{\alpha',\gamma}(x,a)-\varphi_{\alpha',\gamma}(x,b),$$

ou bien

$$(a-b)\int_{y}^{x}\varphi_{\alpha,\gamma}(x-\xi,a)\varphi_{\beta,\gamma}(\xi-y,b)d\xi=\varphi_{\alpha',\gamma}(x-y,a)-\varphi_{\alpha',\gamma}(x-y,b),$$

avec $\alpha'=\alpha+\beta-\gamma+1$. Dans le cas particulier $\alpha=\beta=\alpha'=\gamma-1$, l'identité précédente devient simplement

$$(a-b)\int_{y}^{x}\varphi_{\alpha,\alpha+1}(x-\xi,a)\varphi_{\alpha,\alpha+1}(\xi-y,b)d\xi$$
$$=\varphi_{\alpha,\alpha+1}(x-y,a)-\varphi_{\alpha,\alpha+1}(x-y,b).$$

On y reconnaît l'équation caractéristique des résolvantes d'un noyau donné, et on conclut que la fonction $\varphi_{\alpha,\alpha+1}(x-y, \lambda)$ est la résolvante du noyau

$$K(x, y) = \varphi_{\alpha,\alpha+1}(x-y, 0) = \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} \qquad \text{pour} \quad x > y ,$$

$$K(x, y) = 0 \qquad \text{pour} \quad x < y .$$

C. Cailler (Genève).

---

# MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

## Une nouvelle définition des points d'inflexion des courbes planes.

1. La symétrie par rapport à un point nous fournit une définition facile des points d'inflexion des courbes planes, tandis que la symétrie par rapport à un axe rend évidente la propriété du cercle osculateur.

Rappelons tout d'abord les principes suivants faciles à saisir.

2. Etant donnés deux axes rectangulaires quelconques :

*a)* Les deux points symétriques d'un point par rapport aux deux axes sont aussi symétriques par rapport à l'origine. Il en est de même pour deux figures symétriques d'une figure tracée dans le plan de deux axes.

*b)* Réciproquement : étant donnés un segment rectiligne quelconque et deux axes rectangulaires passant par son point milieu, les points symétriques des extrémités par rapport à ces axes coïncideront entre eux.

*c)* Les deux segments symétriques d'un segment rectiligne passant par l'origine, contiennent ce point, sont égaux et en ligne droite.

3. Théorème I. — Si l'on construit les deux courbes symétriques d'une courbe plane par rapport à deux axes orthogonaux dont l'origine est un point quelconque de la courbe, et si l'on groupe deux à deux, d'une façon convenable, les segments suivant lesquels ces diverses courbes (y compris la courbe donnée) sont divisées par l'origine, on y discernera quatre courbes, deux d'entre elles ayant à cette origine un point d'inflexion et les deux

autres un point de rebroussement; les tangentes à l'origine à ces quatre courbes se confondent.

Le même théorème a lieu si l'on construit une seule des courbes symétriques de la courbe donnée et sa propre symétrique par rapport à l'autre axe.

4. Réciproquement, l'inflexion pourra se définir à l'aide du théorème suivant :

Théorème II. — Si les deux éléments infinitésimaux successifs d'une courbe plane, situés de part et d'autre d'un de ses points, sont symétriques l'un de l'autre par rapport à ce point, ce point sera un point d'inflexion de la courbe, car la tangente sera formée du prolongement de ces rayons.

*Remarque.* La même propriété aura évidemment lieu si les deux parties d'une courbe plane, situées de part et d'autre d'un de ses points, sont symétriques l'une de l'autre par rapport à ce point et par suite égales entre elles.

5. Une application immédiate de ce principe en Géométrie descriptive nous montre l'existence des deux points d'inflexion du développement de la section plane du cylindre, etc.

En effet, chacune des deux parties égales dont est composé ce développement peut à son tour se décomposer en deux parties égales, symétriques par rapport à leur point d'ordonnée moyenne.

6. Le cercle osculateur en un point d'une courbe plane traverse la courbe en ce point. Cette propriété est maintenant évidente. Si l'on considère en effet la normale au point de contact, les deux parties du cercle osculateur voisines du point de contact et situées de part et d'autre de ce point sont symétriques l'une de l'autre, tandis qu'il n'en est généralement pas de même pour la courbe.

F.-P. Paterno (Palerme).

## Les anaglyphes géométriques.

*Vues stéréoscopiques pour l'enseignement scientifique.*

Comme suite aux Notes que nous avons consacrées autrefois aux *vues stéréoscopiques destinées à l'enseignement scientifique*[1], nous tenons à signaler ici une nouveauté très remarquable qui a obtenu un grand succès au 5e Congrès international des mathématiciens. Tous ceux qui ont assisté au Congrès de Cambridge ont admiré, dans la salle de l'Exposition, les anaglyphes géométriques de M. Henri Richard, proviseur au Lycée de Chartres (France).

Ce sont des vues stéréoscopiques de figures géométriques, mais

[1] Voir *L'Enseign. mathém.*, 8e année, 1906, p. 385-390, p. 475-478; 9e année, 1907, p. 61-63, p. 142-146.

elles ne nécessitent pas l'emploi du stéréoscope. En effet, les deux images étant dessinées l'une en rouge, l'autre en vert, il suffit de les regarder avec un lorgnon rouge et vert pour que les figures, qui semblent d'abord offrir une grande confusion, produisent une image très nette en noir, présentant un relief tout à fait remarquable

Le principe des couleurs complémentaires avait déjà été employé par Rollmann et par Ducos du Hauron. M. Richard a le mérite de l'avoir appliqué à la représentation des figures de la géométrie dans l'espace. Ces vues stéréoscopiques sont exécutées par le dessin, à l'aide de calculs très simples. On trouvera quelques développements à ce sujet, avec près de 30 vues, dans la petite brochure de M. H. Vuibert intitulée « Les Anaglyphes géométriques »[1]. Il est certain que ces vues stéréoscopiques sont appelées à jouer un rôle utile dans l'enseignement de la géométrie. Leur emploi contribuera à développer chez les élèves l'intuition des figures dans l'espace.

MM. Richard et Vuibert se proposent de faire des collections d'anaglyphes, groupés méthodiquement, à l'usage des divers enseignements. Il y aura notamment une série consacrée à la géométrie descriptive. H. F.

---

# CHRONIQUE

## Société mathématique suisse.

*3me Réunion ordinaire ; Altdorf, 10 septembre 1912.*

La Société mathématique suisse a tenu sa troisième réunion ordinaire à *Altdorf*, le 10 septembre 1912, sous la présidence de M. le Prof. R. Fueter (Bâle), comme section de la *95me Réunion annuelle* de la Société helvétique des sciences naturelles.

Après avoir jeté un rapide aperçu sur l'activité de la Société pendant l'année écoulée, le président rappelle le souvenir des membres décédés pendant l'année : M. le prof. Von der Mühll (Bâle), un des membres fondateurs de la Société et M. Droz-Farny (Porrentruy). Sur la proposition des vérificateurs des comptes, MM. Plancherel et Spiess, la Société approuve le rapport du cais-

[1] 1 broch. in-8°, 32 p. ; 1 fr. 50 ; librairie Vuibert, Paris.

sier: les recettes se montent à Fr. 954.10, les dépenses à Fr. 229.10, d'où un solde créditeur de Fr. 725. Le nombre des membres est actuellement de 121, dont 27 membres à vie.

La Société constitue comme suit son Comité pour la période 1913-1914 : MM. H. Fehr (Genève), président; M. Grossmann (Zurich), vice-président; M. Plancherel (Fribourg), secrétaire-caissier. Le nouveau président remercie ensuite au nom de la Société son prédécesseur, M. le Prof. Fueter, pour l'activité avec laquelle il a présidé à l'heureux développement de la Société pendant cette première période.

La *séance scientifique* comprenait les 13 communications suivantes :

1. — M. le Prof. R. Fueter (Bâle). *Sur la répartition en genres des classes d'idéaux*. — La répartition en genres des classes d'idéaux d'un corps algébrique K, abélien dans un certain domaine $k$, reposait jusqu'à présent sur l'introduction de certains symboles et exigeait que $k$ contînt des racines de l'unité. Les notions de *rayon* (Zahlstrahl) et de *classe de rayons* (Strahlklasse) permettent de donner une définition très simple et complètement générale du genre dans le corps K. En effet, tout corps K, abélien relatif par rapport à $k$, détermine dans $k$ par son discriminant relatif un rayon ($f$) lié très étroitement à K, comme le conférencier l'a montré dans des travaux antérieurs. *Toutes les classes d'idéaux, dont la norme relative par rapport à* k *appartient à la même classe de rayons de* (f), *constituent un genre.* On peut démontrer que tous les genres possibles n'existent pas, c'est-à-dire qu'il existe des classes de rayons qui ne sont pas normes relatives de classes du corps supérieur. Le conférencier développe ce qui précède sur l'exemple simple des 7$^{mes}$ racines de l'unité.

Discussion : M. Plancherel.

2. — M. le Dr F. Bützberger (Zurich). *Sur les polygones bicentriques*. — Après un court aperçu sur les travaux fondamentaux d'*Euler*, *Fuss*, *Poncelet*, *Feuerbach*, *Steiner et Jacobi*, le conférencier rappelle la remarquable loi empirique énoncée par *Hagge*[1]. Soit $r$ le rayon du cercle extérieur de centre M, $\varrho$ celui du cercle intérieur de centre N d'un polygone bicentrique à $n$ sommets et $MN = c$ la distance des centres; $r$, $\varrho$, $c$, vérifient une certaine équation. *Hagge* remarque que si l'on fait $r = 2$, $c = 1$ dans cette équation, on obtient toujours pour $\varrho$ une équation algébrique à coefficients entiers de somme égale à 1.

Pour déduire cette équation d'une manière élémentaire, on peut, avec Fuss et Steiner, se servir de la somme des angles; il est préférable de projeter normalement les rayons des sommets

[1] *Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht* : 1911, p. 98 et 1912, p. 375.

et la ligne des centres sur les rayons de contact correspondants ou la ligne des centres sur les côtés du polygone. Il est important de remarquer qu'il existe, soit pour $n$ pair, soit pour $n$ impair deux polygones symétriques et que, dans le premier cas, tantôt l'un tantôt l'autre conduit plus rapidement au but. Tout côté est divisé par son point de contact en deux segments. Deux segments issus d'un sommet sont égaux. Désigne-t-on, pour $n$ pair, les segments situés de la même manière à gauche et à droite par les mêmes lettres $x, x'$ ; $y, y'$ ; $z, z'$,... on obtient l'expression du segment accentué en remplaçant $\varrho$ par $-\varrho$ dans l'expression du segment non accentué et l'on a la loi générale $xx' = yy' = zz' = ...$ On trouve de la sorte les équations déjà connues, sous une forme plus simple et plus symétrique, sans accompagnement de facteurs parasites et l'on peut y ajouter facilement les équations relatives à $n = 9, 10,...$ que le conférencier écrit explicitement et sur lesquelles il vérifie la loi de Hagge.

Si, à la place du cercle intérieur, on considère un cercle tangent extérieurement ou si le polygone bicentrique à $n$ sommets est étoilé avec deux ou plusieurs circulations, les formules données comprennent encore tous les cas pour $n$ pair ; si, par contre, $n$ est impair, elles ne sont vraies que pour les polygones à nombre impair de circulations ; pour les autres il faut remplacer $\varrho$ par $-\varrho$.

Enfin, la généralisation de la théorie des quadrangles bicentriques conduit à des faisceaux remarquables de courbes et de surfaces du 4[me] ordre. Une exposition détaillée de ces recherches paraîtra comme supplément au programme de l'École cantonale de Zurich 1913.

Discussion : M. Spiess.

3. — M. le Prof. M. Grossmann (Zurich). *Démonstration projective de la construction absolue des parallèles de Lobatschefskij.* — Soit ABCD un quadrangle plan, rectangle en A, B, D. L'angle en C est alors aigu, droit ou obtus selon que l'on se trouve dans la géométrie de *Lobatschefskij*, d'*Euclide* ou de *Riemann*, et simultanément BC est plus grand, égal ou plus petit que AD. Dans le premier cas, le cercle de centre A et de rayon $BC = r$ coupe la droite CD en deux points S, T et l'on peut montrer, par une voie trigonométrique, que les droites AS, AT sont les parallèles menées par A à BC.

On a essayé souvent d'établir d'une manière purement géométrique cette construction des parallèles, mais les démonstrations existantes sont loin d'être simples ; elles ne sont au fond que des vérifications postérieures qui ne laissent pas reconnaître les connexions profondes de cette construction. La métrique projective de *Cayley* et de *Klein* permet de donner une démonstration simple et très claire.

Soit $\omega$ la conique absolue, A un point ordinaire quelconque, $k$ le cercle de centre A et de rayon quelconque $r$, $a$ l'équidistante relative à un diamètre quelconque $x$ du cercle, c'est-à-dire le lieu des points qui sont à la distance $r$ de $x$.

Entre ces 3 coniques existent les relations suivantes : 1° $\omega$ et $k$ ont un double contact aux points d'intersections imaginaires avec la polaire absolue de A : 2° $\omega$ et $a$ ont un double contact aux points d'intersection avec l'axe $x$ de l'équidistante $a$ : 3° $k$ et $a$ ont un double contact aux points d'intersection avec le diamètre $y$, mené perpendiculairement à $x$ par le point A.

Soit maintenant C un point quelconque de l'équidistante $a$, B et D ses projections normales sur les diamètres $x$ et $y$, S l'intersection de CD avec le cercle $k$. Il faut démontrer que AS et BC

Fig. 1.

Fig. 2.

sont parallèles, c'est-à-dire que leur intersection est un point U de la conique absolue $\omega$[1].

S et C se correspondent dans la collinéation $C_{ka}$ d'axe $y$ et de centre Y pôle de $y$ qui transforme $k$ en $a$. C et U se correspondent dans la collinéation $C_{a\omega}$, d'axe $x$ et de centre X pôle de $x$, qui transforme $a$ en $\omega$. La démonstration revient à faire voir que S et U sont en ligne droite avec A, c'est-à-dire se correspondent dans la collinéation $C_{k\omega}$ qui transforme $k$ en $\omega$ et qui a A comme centre et XY comme axe.

Les collinéations $C_{ka}$ et $C_{a\omega}$ ne sont pas indépendantes, car d'abord le centre de l'une se trouve sur l'axe de l'autre et ensuite leurs caractéristiques sont égales, car

$$YAS_1C_1 \barwedge XAC_2U_2 \qquad (1)$$

[1] Si l'on représente $\omega$ par un cercle de la *géométrie euclidienne* et si l'on place A au centre de ce cercle, $k$ devient un cercle de centre A, l'équidistante devient une ellipse dont $\omega$ et $k$ sont les cercles construits sur les axes principaux comme diamètres. La figure représente alors la construction connue d'une ellipse au moyen de ces deux cercles.

puisque les droites $S_1C_2$ et $C_1U_2$ se coupent sur XY. Le produit des deux collinéations est par suite une collinéation qui a A comme point double, XY comme droite double. Il suffit donc de montrer que A est un centre ou que XY est un axe de cette collinéation, c'est-à-dire que tout point de XY est un point double.

Soit donc $C_{ka}$ donné par son centre Y, l'axe $y$, le couple $S_1$, $C_1$. Soit de plus $C_{a\omega}$ donnée par son centre X, son axe $x$ et le couple $C_2U_2$, tel que la projectivité (1) soit satisfaite. Soit $S_3$ un point quelconque de XY. Si l'on construit $C_3$ au moyen du couple $S_1C_1$, puis $U_3$ à partir de $C_3$ au moyen du couple $C_2U_2$, on trouve $U_3 \equiv S_3$. Car, on a

$$YAS_1C_1 \barwedge YXS_3C_3 \ , \qquad XAC_2U_2 \barwedge XYC_3U_3 \ ,$$

et donc, à cause de (1)

$$YXS_3C_3 \barwedge XYC_3U_3 \barwedge YXU_3C_3$$

d'où

$$U_3 \equiv S_3 \ .$$

Discussion : MM. Meissner et Grossmann.

4. — M. le Dr D. Mirimanoff (Genève). *Sur quelques problèmes concernant le jeu de trente et quarante.* En l'absence du conférencier, la communication est présentée par M. H. Fehr. — Les problèmes fondamentaux du jeu de trente et quarante ont été traités par Poisson, Oettinger, Bertrand. Les déductions de ces auteurs présentent des lacunes et certains de leurs résultats sont inexacts. L'étude de M. Mirimanoff permet de combler ces lacunes et d'obtenir une solution exacte et complète du problème. Elle sera publiée dans un prochain numéro de l'*Enseignement mathématique.*

5. — M. le Prof. O. Spiess (Bâle). *Sur certains groupes de fonctions algébriques.* — Soit $R_n(x)$ une fonction rationnelle de degré $n$, l'équation

$$R_n(y) - R_n(x) = 0 \qquad (1)$$

possède comme racines $n$ fonctions algébriques $y = x$, $y_1(x)$, ... $y_{n-1}(x)$ qui forment un groupe, puisque $y_k(y_h) = y_l$. Inversement, toutes les fonctions algébriques qui forment un groupe fini sont les racines d'une équation de la forme (1). Considérons, par exemple, un groupe qui résulte de l'itération d'une seule fonction à $\nu$ déterminations (groupe monogène). A un point $x$ du plan de la variable complexe correspondent alors $\nu$ points, à l'ensemble de ces $\nu$ points en correspondent $\nu^2$ autres qui peuvent coïncider en partie,... etc... Si le nombre des points qui dérivent ainsi de $x$ est fini, nous

avons devant nous un groupe fini. Joignant chaque point avec les $r$ points qui en dérivent par des lignes dirigées, on obtient un réseau de lignes (polygramme) comme image du groupe. Comme seule la connexion de ces lignes importe, on peut les détacher du plan et les supposer menées dans un espace quelconque. Par exemple, les modèles à arêtes des polyèdres réguliers et mi-réguliers donnent des images de tels groupes.

On peut se poser le *problème* de déterminer l'équation la plus générale de la forme (1) appartenant à un polygramme donné. En faisant décrire au sommet $x$ un contour fermé et en considérant les permutations correspondantes des autres sommets, on peut résoudre le problème d'une manière complète dans beaucoup de cas. Par exemple, à l'octaèdre appartient la fonction du 6$^{me}$ degré $R_6(x) = R_3(S_2(x))$ où $S_2(x)$ admet une substitution linéaire de cycle 2. Ces recherches se laissent naturellement étendre aux groupes infinis.

Discussion : MM. Plancherel, Meissner, Grossmann, Fueter.

6. — M. le Prof. J. Andrade (Besançon). *Nouveaux modèles de mouvement pour l'enseignement de la géométrie.* — Le conférencier présente six modèles construits en vue de l'enseignement géométrique dans les écoles techniques professionnelles. Ces modèles concernent la géométrie qualitative, la seule qui offre aux débutants une réelle difficulté ; ce sont des modèles de mouvement ou d'assemblage, matérialisant les premiers concepts de la géométrie, qui sont non des concepts de forme, mais des concepts de mouvement.

Discussion : M. Fueter.

7. — M. le Dr G. Dumas (Zurich). *Sur les singularités des surfaces.* — L'auteur rappelle d'abord en quelques mots, comment se pose le problème de la résolution des singularités des surfaces, puis dans un exposé d'un caractère tout à fait général, développe sa méthode, en résolvant d'une manière complète la singularité que la surface

$$z^{10} - 4y^{12} + 4x^3y^8 + x^6y^4 - x^9 + \lambda x^4y^5z^2 = 0 \qquad (1)$$

présente au point

$$x = y = z = 0 \qquad (2)$$

Son procédé le conduit à faire correspondre aux points singuliers considérés certains polyèdres analogues aux polygones de Newton utilisés pour les courbes algébriques planes.

Dans l'exemple ci-dessus, le polyèdre comporte une seule face finie, triangulaire, T. La résolution complète de la singularité

s'effectue en partant de trois substitutions se rattachant respectivement à chacune des arêtes de T, et de la forme :

$$\begin{cases} x = \xi^a \eta^{a'} u^{a''} \\ y = \xi^b \eta^{b'} u^{b''} \\ z = \xi^c \eta^{c'} u^{c''} \end{cases} \qquad (3)$$

Les exposants $a$, $b$, $c$, etc., sont des entiers positifs ; quelques-uns d'entre eux peuvent être nuls. Leur déterminant, pris en valeur absolue, doit se réduire à l'unité.

Par l'intermédiaire des substitutions (3) on obtient des représentations holomorphes de portions de la surface (1), dans le voisinage du point (2), qui, dans leur ensemble, représentent complètement cette surface (1) dans le voisinage de ce même point (2).

Pour atteindre ce dernier résultat, il suffit d'ailleurs d'un nombre fini de ces représentations[1].

M. G. Dumas montre ensuite que le polyèdre permet de distinguer les uns des autres les différents *cycles* ou, ce qui revient au même, les diverses nappes qu'une surface présente dans le voisinage d'un point singulier, et, termine en donnant quelques indications relatives à différents polyèdres rencontrés dans le cours de ses recherches.

Discussion : MM. Grossmann et Fueter.

8. — M. le Prof. M. Plancherel (Fribourg). *Unicité du développement d'une fonction en série de polynômes de Legendre et expression analytique des coefficients de ce développement.* — $P_n(x)$ désignant le polynôme de Legendre $\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, nous appellerons *série de polynômes de Legendre* toute série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$. $f(x)$ étant une fonction sommable dans l'intervalle $(-1, +1)$, on peut former les *coefficients de Legendre* $f_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\,dx$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x)$ formée au moyen de ces coefficients n'est pas nécessairement convergente ; nous l'appellerons la *série de Legendre* de $f(x)$ ; $f(x)$ en sera dite la *génératrice*.

On peut se poser au sujet de ces séries des questions analogues

[1] Pour de plus amples renseignements sur la résolution de la singularité considérée, voir, *Comptes rendus de l'Academie des Sciences*, t. 154, p. 1495, séance du 3 juin 1912.

à celles que *G. Cantor* et *Dubois-Reymond* ont posées et partiellement résolues dans la théorie des séries trigonométriques. Les théorèmes suivants constituent une réponse partielle à ces questions.

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que, dans tout l'intervalle* $(-1, +1)$, *à l'exception au plus d'un ensemble réductible de points,* $\sum a_n P_n(x)$ *converge vers zéro est que* $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$[1].

II. *Si la série* $\sum a_n P_n(x)$ *converge dans tout l'intervalle* $(-1, +1)$, *à l'exception au plus d'un ensemble réductible de points, vers une fonction* $f(x)$ *bornée, c'est une série de Legendre, dont* $f(x)$ *est la génératrice.*

III. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série* $\sum a_n P_n(x)$ *ait pour génératrice la fonction* $f(x)$ *est que* $\sum a_n \int_{-1}^{x} P_n(x)\,dx$ *converge dans tout l'intervalle* $(-1, +1)$ *vers* $\int_{-1}^{x} f(x)\,dx$.

Dans les théorèmes analogues de Cantor et de Dubois-Reymond, l'élément analytique qui joue un grand rôle dans la démonstration est l'expression

$$\Delta_2 f(x, h) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

dont la limite pour $h = 0$ donne la dérivée seconde généralisée de $f(x)$. Pour trouver l'analogue ici, considérons une fonction $F(\vartheta, \varphi)$ d'un point sur la sphère unité. Décrivant autour du point $(\vartheta, \varphi)$ comme centre un petit cercle de rayon sphérique $h$, appelant $(\vartheta', \varphi')$ les points de ce petit cercle, $ds'$ l'élément d'arc et $s'$ le périmètre du petit cercle, nous formerons l'expression

$$\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h) = \frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2}} \left[ \frac{1}{s'} \int F(\vartheta', \varphi')\,ds' - F(\vartheta, \varphi) \right]$$

Sa limite pour $h = 0$ sera ce que nous noterons $\Delta_2 F(\vartheta, \varphi)$. Lorsque $F(\vartheta, \varphi)$ possède une différentielle seconde, on a

$$\Delta_2 F(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

---

[1] Ce théorème est dû à M. *Dini*. Les considérations qui conduisent aux théorèmes suivants en donnent une démonstration plus simple.

$\Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h)$ jouit de propriétés d'extrémum analogues à celles de $\Delta_2 f(x, h)$. Faisant correspondre par la substitution $x = \cos\vartheta$ à toute série $\sum a_n P_n(x)$ une fonction $F(\vartheta, \varphi) = -\sum_1^\infty \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos\vartheta)$, on démontre que

$$\lim_{h=0} \sin\frac{h}{2} \Delta_2 F(\vartheta, \varphi; h) = 0$$

et qu'en tout point de convergence de la série $\sum_0^\infty a_n P_n(x)$

$$\Delta_2 F(\vartheta, \varphi) + a_0 = \sum_1^\infty a_n P_n(\cos\vartheta) .$$

L'utilisation de ces propriétés conduit sans grandes difficultés aux théorèmes énoncés plus haut.

Discussion : MM. Fueter, Dumas.

9. — M. le Prof. Meissner (Zurich). *Recherches cinématiques.* — Le problème de l'étayage d'un corps solide par des plans conduit entre autres à la question de l'existence de surfaces polyédrales. Ce sont des surfaces convexes pouvant se mouvoir avec trois degrés de liberté à l'intérieur d'un polyèdre régulier, de telle façon qu'elles touchent toujours toutes les faces du polyèdre. Leur détermination conduit à des équations fonctionnelles linéaires auxquelles doit satisfaire une fonction uniforme d'un point sur la sphère-unité. Suivant l'espèce du polyèdre enveloppant, il y a à distinguer cinq types de telles surfaces et l'on peut se demander si, à part la sphère, il existe des surfaces de chaque type.

Les surfaces polyédrales relatives au cube sont identiques aux surfaces d'égale épaisseur. Le conférencier a pu, par une certaine méthode, construire des exemples de surfaces tétraédrales et octaédrales. Malheureusement cette méthode ne conduit qu'à la sphère dans le cas du dodécaèdre et de l'icosaèdre.

Pour terminer, il est démontré le théorème suivant : la sphère est la seule solution du problème, si l'on remplace le polyèdre régulier par un prisme triangulaire régulier. Ceci est d'autant plus intéressant que l'équation fonctionnelle à résoudre est complètement analogue à celle du cas du tétraèdre.

Discussion : MM. Spiess, Fueter, Dumas, Plancherel.

10. — M. le Prof. A. Emch (Urbana, U. S. A). *Sur une certaine transformation conforme rationnelle dans le plan.* — En l'absence du conférencier, la communication est présentée par M. le Prof. Grossmann. De la correspondance générale de Steiner découle une théorie des courbes du 3^me^ ordre ; de même, de l'étude des

correspondances involutives de cercles découle tout aussi naturellement une théorie des courbes circulaires du 3[me] ordre. M. Emch montre comment cette correspondance peut être généralisée, comment l'on peut trouver son expression dans le plan complexe et comment il en résulte une théorie des courbes circulaires d'ordre plus élevé. Il se sert dans ces recherches d'un certain nombre de théorèmes concernant les groupes de points associés et la géométrie des polynômes.

11. — M. R. de Saussure (Berne) *a) Sur le mouvement le plus général d'un fluide dans l'espace.* — Le mouvement le plus général d'un fluide dans un plan (à un instant donné) est le mouvement défini par le système de tous les cercles tangents en un même point $M_0$ à une même droite $D_0$. Ce système est la forme fondamentale de la géométrie des flèches dans un plan, c'est-à-dire de la géométrie où l'on prend comme élément spatial primitif une flèche (ensemble d'un point M et d'une droite D passant par ce point et affectée d'un sens).

A la géométrie des flèches dans le plan correspond dans l'espace à 3 dimensions la géométrie des *feuillets* (ensemble d'un point M, d'une droite dirigée D passant par M, et d'un plan P passant par M et par D, et dont les faces sont différenciées par les signes + et —). Les systèmes de feuillets sont analogues aux systèmes de droites, donc la géométrie des feuillets est analogue à la géométrie réglée, avec cette différence qu'un feuillet dépend de 6 coordonnées, tandis qu'une droite ne dépend que de 4 coordonnées[1].

Si l'on affecte un feuillet MDP d'un coefficient numérique *a* on obtient un *feuillet coté*. D'autre part une droite affectée d'un coefficient numérique *(droite cotée)* n'est pas autre chose, au point de vue géométrique, que l'élément appelé par R.-S. Ball : une *vis (screw)*. Donc les systèmes de feuillets cotés sont analogues aux systèmes de vis de Ball. On trouve en effet que le système *linéaire* de feuillets cotés $\infty^1$ est complètement déterminé par 2 feuillets cotés ; le système linéaire $\infty^2$, par 3 feuillets cotés ; le système linéaire $\infty^3$, par 4 feuillets cotés, etc.

C'est ce système linéaire ($\infty^3$) de feuillets cotés qui représentera le mouvement le plus général d'un fluide dans l'espace (à un moment donné), car ce système remplit tout l'espace de telle façon qu'en un point quelconque se trouve un feuillet et un seul, lequel feuillet définit le mouvement de la molécule fluide située en ce point.

*b) Continuité et discontinuité.* — La continuité est une propriété essentielle et inhérente à la notion d'espace, de même que la dis-

---

[1] Voir *Exposé résumé de la géométrie des feuillets*, par R. de Saussure. Mémoires de la Soc. de Physique de Genève, Vol. 36.

continuité est inhérente à la notion de nombre. Les nombres sont des points isolés et ce n'est que par un procédé artificiel et purement intellectuel que l'on arrive à la notion du *continu mathématique.* Au contraire, dans le continu physique, tel que l'espace, ce qui est réel c'est la continuité et le *point* est une notion purement intellectuelle ne correspondant à aucune réalité. En d'autres termes : les nombres sont des points isolés sans pont pour les réunir, au contraire l'espace est un pont continu qui n'a pas d'extrémités. On ne doit donc pas définir (comme le fait par exemple M. Poincaré dans *La valeur de la science*) le continu physique comme on définit le continu mathématique, car cette définition suppose l'existence d'éléments, discernables ou indiscernables, qui n'existent pas dans l'espace. Ce qu'il faut définir dans le nombre, c'est la continuité théorique entre des points isolés que l'on rapproche toujours davantage ; au contraire, dans l'espace la continuité est la chose primitivement donnée, et ce qu'il faut définir, c'est l'existence théorique de points, lignes, surfaces, servant à limiter la continuité de l'espace.

Le nombre et l'espace sont deux entités inadéquates l'une à l'autre, car ce qui existe dans l'une, n'existe pas dans l'autre et réciproquement. Mais l'esprit humain est parvenu à les rendre adéquats artificiellement, en créant d'une part un pont continu entre les nombres, et d'autre part des points dans l'espace pour le limiter. Tel est le double artifice qui permet d'appliquer le nombre à l'espace.

12. — M. le Prof. F. Rudio (Zurich). *L'état actuel de la publication des œuvres de Leonhard Euler.* — Cinq volumes ont déjà paru. Trois autres sont sous presse. Le fait que le format des caractères définitivement choisis pour l'impression est plus grand que celui mis primitivement à la base des premiers calculs augmente considérablement le prix de revient de chaque volume et oblige à ne pas éditer des volumes contenant en moyenne plus de 60 feuilles, sans quoi toute l'entreprise risquerait d'être gravement atteinte. Une augmentation du nombre primitivement prévu des volumes ne peut donc être évitée.

L'énorme correspondance que l'Académie de St-Pétersbourg a libéralement mise à disposition et envoyée à Zurich promet une riche moisson de faits intéressants. L'examen en est confié à M. G. Eneström (Stockholm).

13. — M. le Prof. H. Fehr (Genève). *L'état des travaux de la Commission internationale de l'enseignement mathématique et de la sous-commission suisse.* — M. Fehr rend d'abord brièvement compte des séances que la Commission vient de tenir à Cambridge à l'occasion du 5me Congrès international des mathématiciens. En

Suisse les rapports entrepris par la sous-commission sont terminés depuis plus de six mois. Au nombre de douze ils forment un beau volume de plus de 750 pages et renferment un ensemble de documents fort précieux. Ces travaux ne constituent en réalité qu'une première étape. Il y aura lieu d'en tirer parti et d'examiner les progrès à réaliser dans l'enseignement aux divers degrés. La sous-commission vient d'étudier un certain nombre de propositions de réformes qu'elle transmettra aux autorités. En outre elle a établi une série de questions qu'il serait utile de mettre en discussion dans les conférences scolaires et les sociétés de professeurs.

Pour ce qui concerne plus particulièrement l'enseignement supérieur, la sous-commission estime que le nombre des chaires ordinaires de mathématiques est insuffisant dans toutes les universités suisses. Il est désirable que chaque université possède au moins trois chaires[1] de mathématiques pures, une chaire d'astronomie, une chaire de mécanique et une chaire de physique mathématique. En outre, il y a lieu de développer non seulement les séminaires consacrés aux recherches, mais de créer ou de compléter les séminaires destinés plus spécialement à la préparation des professeurs de mathématiques.

## Association britannique pour l'avancement des Sciences.

L'Association britannique pour l'avancement des Sciences a tenu sa 82e réunion annuelle à *Dundee*, en Ecosse, du 4 au 11 septembre, sous la présidence de M. le professeur E.-A. Schäfer. Les travaux ont été répartis sur 12 sections. La section A, comprenant les mathématiques et la physique, a été présidée par M. H.-L. Callandar. Les communications suivantes ont été présentées à cette section.

H.-L. Callandar : « The natur of heat ». — E. Rutherford and H. Robinson : « The heating effect of radium emanation and its products ». — R.-A. Millikan : « On the discharge of ultraviolet light of high-speed electrons ». — M.-A. Gérardin : « Sur une nouvelle machine algébrique ». — A. Cunningham : *a)* « On Mersenne's numbers » ; *b)* « On arithmetic factors of the Pellian terms ». — F.-A. Lindemann : « Atomic heat of solids ». — P.-A. MacMahon : « The Algebric numbers derived from the permutations of any assemblage of objects ». — E.-H. Moore : « A mode of composition of positive quadratic forms ». — J.-C. Fields :

---

[1] I, calcul différentiel et intégral ; analyse supérieure. — II. Algèbre supérieure, théorie des nombres ; calculs des probabilités. — III, géométrie analytique ; géométrie descriptive ; géométrie supérieure.

« Proof of a general theorem relating to orders of coincidence ». — H.-B. Heywood : « The use of the exponential curve in graphics ». — « Report on Bessel and other functions », rapport présenté par la Commission désignée à cet effet par le précédent Congrès.

Parmi les communications présentées à la section M (Sciences de l'éducation), nous signalons celles de MM. T.-P. Nunn, P. Pinkerton, W.-P. Milne et W.-D. Eggar.

La prochaine réunion aura lieu à *Birmingham* sous la présidence de Sir W.-H. White.

## Congrès des mathématiciens allemands ; Munster 1912.

La dernière réunion des mathématiciens allemands *(Deutsche Mathematiker Vereinigung)* a eu lieu à Munster i.W., du 15 au 19 septembre 1912, sous la présidence de M. W. von Dyck. Les communications, au nombre de seize, ont été réparties sur cinq séances dont l'une a été tenue en commun avec la section de physique du Congrès annuel des médecins et naturalistes allemands. Ces séances furent présidées successivement par MM. Killing (Munster), W. von Dyck (Munich), E.-H. Moore (Chicago), Stäckel (Karlsruhe), Sommerfeld (Munich) et Engel (Greifswald).

Voici la liste des communications :

1. W. v. Dyck (München), Ueber die singulären Stellen der Differentialgleichungen erster Ordnung zweiten Grades.
2. F. Meyer (Königsberg), Ueber einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff.
3. A. Sommerfeld (München), Greensche Funktion der Schwingungsgleichung für das Aeussere eines beliebigen Gebietes.
4. H. Mohrmann (Karlsruhe), Ueber beständig hyperbolisch gekrümmte Kurvenstücke.
5. H. Wiener (Darmstadt), Ueber eine geometrische Theorie der algebraischen Formen.
6. E. H. Moore (Chicago), Remarks concerning relatively uniformely sequences and series of functions.
7. R. Rothe (Clausthal), Anwendung der Vektoranalysis auf Differentialgeometrie.
8. E. Salkowski (Charlottenburg), Ueber die verschiedenen Begründungsarten der Differentialgeometrie.
9. W. v. Dyck (München), Ueber einen von ihm im Britischen Museum wiederaufgefundenen Brief J. Keplers an Eduard Bruce aus dem Jahre 1603.
10. W. Killing (Münster), Ueber die Ausbildung der Gymnasiallehrer.
11. D. Hilbert (Göttingen), Begründung der elementaren Strahlungstheorie.
12. W. Nernst (Berlin), Ueber den Energiegehalt der Gase.

13. v. Smoluchowski (Lemberg), Experimentell nachweisbare, der üblichen Thermodynamik widersprechende Molecularphänomene.
14. W. Velten (Kreuznach), Ueber die Funktionen, die aus der Jacobischen $\Omega(u)$-Funktion entspringen.
15. R. v. Lilienthal (Münster), Ueber die Bestimmung der berührenden Kurve und Fläche bei Kurven- und Flächenscharen.
16. A. Voigt (Frankfurt), Mathematische Theorie des Tarifwesens.

La *séance administrative*, qui a eu lieu le 17 septembre, a été consacrée aux rapports des différentes commissions. La Société a renouvelé partiellement son comité : les deux membres sortant de charge, MM. E. Czuber et R. Müller, ont été remplacés par MM. Runge (Göttingue) et Wirtinger (Vienne). M. Roux (Leipzig) a été désigné comme président pour un an à partir du 1er octobre 1912.

A la suite du décès de M. P. Treutlein, la Société a chargé M. A. Tiler (Hambourg) de la représenter dans la délégation allemande de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique et M. H.-E. Timerding (Braunschweig) pour la Commission allemande de l'Enseignement des Sciences mathématiques et naturelles.

Au moment de la réunion, le nombre des membres de la Société était de 775.

La prochaine réunion aura lieu à *Vienne*, en septembre 1913.

## L'Enseignement des Mathématiques au Brésil.

Un Congrès d'enseignement primaire et secondaire s'est tenu récemment dans la ville de *Bello-Horizonte*, capitale de l'État de Minas-Geraes, du 28 septembre au 5 octobre 1912, sous la présidence de M. Everardo Backheuser, professeur à l'Ecole polytechnique de Rio-de-Janeiro.

Nous nous bornons à signaler ici la conférence de M. le Dr Backheuser, qui consacre la plus grande partie de son activité aux questions pédagogiques.

Dans cette conférence, qui avait pour objet *la méthode de Laisant dans l'enseignement intuitif des mathématiques*, il a exposé les idées développées par M. Laisant dans son *Initiation mathématique*. Maniant la parole avec une rare habileté et possédant une grande expérience dans la pratique de l'enseignement, il a su vivement intéresser son auditoire aux idées de M. Laisant, et son exposé a obtenu le plus grand succès.

Il faut dire que l'auditoire était bien préparé à apprécier cette conférence, parce que les élèves de l'Ecole Normale de Bello-Horizonte sont bien au courant des idées modernes relatives aux méthodes intuitives dans l'enseignement.

A. Thiré (Rio-de-Janeiro).

## Société suisse des Professeurs de Mathématiques.

La Société suisse des Professeurs de Mathématiques a tenu sa réunion à *Lausanne*, le 6 octobre 1912, en même temps que la Société suisse des Professeurs de Gymnases, sous la présidence de M. Brandenberger (Zurich). La première partie de la séance a été consacrée aux affaires administratives. Le Comité a été renouvelé comme suit : MM. L. Crelier (Bienne), Président ; H. Schuepp, (Zurich), vice-Président ; K. Matter (Frauenfeld), Caissier ; Teucher (Bienne), Secrétaire et Ch. Jaccottet (Lausanne).

*Communications.* — 1. M. H. Fehr (Genève) : a) *Vœux et propositions de réformes à accomplir dans l'enseignement mathématique en Suisse.* — Dans la précédente réunion (Zurich), mai, 1912, M. Fehr a présenté le volume contenant l'ensemble des rapports suisses destinés à la Commission internationale de l'enseignement mathématique. La sous-Commission suisse a estimé qu'il y avait lieu de signaler aux autorités et aux sociétés un certain nombre de propositions et de vœux de réformes. M. Fehr donne lecture des propositions que la sous-Commission compte transmettre aux autorités, puis il signale les principaux thèmes destinés aux sociétés d'ordre pédagogique, telles que la Société des Professeurs de gymnases, des Professeurs de mathématiques, ainsi que les conférences de professeurs.

b) Répondant ensuite à l'invitation du président, M. Fehr donne un aperçu très rapide du 5[e] *Congrès international des mathématiciens*, qui a eu lieu à Cambridge, du 21 au 28 août dernier, en même temps que la réunion de la Commission internationale de l'enseignement mathématique.

2. — M. Brandenberger (Zurich) a exposé le plan de travail incombant plus particulièrement à la Société des Professeurs de Mathématiques comme contribution aux travaux de la sous-Commission signalée par M. Fehr. Il a insisté sur la nécessité de poursuivre cette étude d'ensemble afin d'obtenir la réalisation de réformes dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes suisses. Il envisage notamment l'élaboration de plans d'études normaux pour l'enseignement dans les gymnases et les écoles réales.

3. Puis M. S. May, Directeur du Gymnase scientifique de Lausanne, a fait une intéressante conférence sur *l'enseignement des travaux manuels* dans ses rapports avec celui des mathématiques et du dessin. Son exposé a été suivi d'une visite aux ateliers du Collège scientifique.

## Société italienne pour l'avancement des sciences.

La *Società italiana per il progresso delle Scienze* a tenu son VI^e Congrès à Gênes du 17 au 24 octobre 1912.

Parmi les *conférences générales* il y a lieu de signaler les suivantes, qui sont directement ou indirectement liées aux sciences mathématiques :

M. Abraham : Une nouvelle théorie de l'attraction universelle. — G. Loria : L'histoire des sciences est-elle une science? — L. Rolla : Le troisième principe de la thermodynamique.

Dans les *travaux des sections*, on trouve les communications suivantes se rapportant aux mathématiques :

Section I (Mathématiques et physique). — L. Amoroso : Un nouveau type d'équations intégro-différentielles. — T. Boggio : Théorème de réciprocité pour quelques fonctions de la théorie de l'élasticité, analogues aux fonctions de Green. — E. Bortolotti : Sur les intégrales définies impropres. — E. Ciani : Les courbes planes du 5^me ordre invariantes vis-à-vis d'un groupe des collinéations. — U. Cisotti : Sur quelques recherches récentes d'hydrodynamique.

Section XV (Histoire des sciences). — E. Bortolotti : Correspondance de Paolo Ruffini. — A. Favaro : Une traduction inédite des œuvres d'Archimède dans les manuscrits de Galilée existant à la Bibliothèque nationale de Florence. — G. Loria : Sur les polyèdres semi-réguliers. — F. Podesti : Théorie synthétique des nombres réels dans un texte de G.-A. Borelli (XVII^e siècle). — G. Vacca : Archimède en Chine.

Ces deux sections ont approuvé à l'unanimité la résolution suivante proposée par MM. Loria et Volterra : *La section émet les vœux : 1° que dans l'édition complète des œuvres d'Euler, actuellement sous presse, soient insérées les remarques sur le calcul intégral dues à Lorenzo Mascheroni, ainsi qu'on l'a fait pour les additions de Lagrange aux éléments d'algèbre ;*

*2° que le gouvernement italien accorde, si cela est nécessaire, une subvention afin d'obtenir de la maison éditrice l'élargissement correspondant du plan de l'ouvrage.*

## Société mathématique italienne.

La Société mathématique italienne *Mathesis* s'est réunie à *Gênes*, en même temps que la Société ci-dessus, sous la présidence de son président M. Castelnuovo, qui prononça le discours d'ouverture sur *L'école dans ses rapports avec la vie et avec la science moderne*.

On a entendu les communications suivantes :

G. Loria, Excentricités et mystères des nombres.

V. Reina, Mathématique de précision et mathématique d'approximation.

G. Vacca, Les auteurs classiques des mathématiques.

On discuta ensuite les rapports de la sous-commission italienne pour l'enseignement des mathématiques, notamment ceux des professeurs Conti (instruction primaire), Fazzari et Scarpis (instruction moyenne classique), Scorza (instruction moyenne technique), Lazzeri (écoles de commerce et écoles industrielles), Pincherle (préparation des professeurs) ; on émit des vœux sur les réformes à introduire dans l'enseignement des mathématiques en Italie.

Une séance (en commun avec la Société de physique et l'Association électrotechnique) a été consacrée à la préparation des ingénieurs (rapporteurs MM. F. Lori et Somigliana).

Enfin, sur l'invitation de la Société philosophique italienne, on prit part à une discussion sur l'infini (rapporteurs MM. Alliotta et Vacca).

## Œuvres complètes de Sophus Lie.

Les Sociétés des Sciences de Christiania et de Leipzig ont entrepris la publication des œuvres complètes de Sophus Lie. Le travail sera dirigé par M. le Professeur Fr. Engel (Greifswald). Les œuvres comprendront 7 volumes grand in-8°, formant un ensemble d'environ 265 feuilles de 16 pages. Les souscripteurs bénéficieront du prix réduit de 60 Pf. par feuille, l'ensemble de l'ouvrage revenant ainsi à environ 200 francs. — Les souscriptions sont reçues, jusqu'au 1er avril 1913, auprès de la maison Teubner à Leipzig.

Etant donné le rôle considérable que jouent les travaux de Lie dans l'analyse moderne, il est à prévoir que la souscription sera bien accueillie des mathématiciens. La publication des œuvres complètes du savant géomètre norvégien constitue le plus beau monument qu'on puisse élever à sa mémoire.

## Etats-Unis. — Thèses de Doctorat.

Pendant l'année universitaire 1911-1912, les Universités américaines ont délivré 273 doctorats ès sciences, dont 22 concernent les sciences mathématiques. En voici la liste ; le nom de l'Université est indiqué entre parenthèses après celui de l'auteur.

H. De F. Arnold (Chicago) : Limitations Imposed by Slip and Inertia Terms upon Stokes's Law for the Motion of Spheres

through Liquids. — S. E. Brasefield (Cornell) : A Study of certain Force Fields. — E. W. Chittenden (Chicago) : Infinite Developments and the Composition Property $(K_{12}B_1)^*$ in General Analysis. — A. L. Daniels (Yale) : On the Librations of Bodies whose Periods are One Third that of the Disturbing Body. — W. W. Denton (Illinois) : Projective Differential Geometry of Developable Surfaces. — L. L. Dynes (Chicago) : The Highest Common Factor of a System of Polynomials with an Application to Implicit Functions. — C. A. Fisher (Chicago) : Some Contributions to the Theory of Functions of Lines. — T. Fort (Harvard) : Problems connected with the Linear Difference Equations of the Second Order with Special Reference to Equations with Periodic Coefficients. — Miss C. B. Hennel (Indiana) : Certain Transformations and Invariants connected with Difference Equations and other Functional Equations. — C. G. P. Kuschke (California) : The Abelian Equations of the 10th Degree, irreducible in a given Rational Domain. — J. Lipke (Columbia) : Natural Families of Curves in a General Curved Space of $n$ Dimensions. — F. M. Morgan (Cornell) : Involutorial Transformations. — R. E. Root (Chicago) : Iterated Limits in General Analysis. — L. P. Siceloff (Columbia) : Simple Groups from Order 2001 to Order 3640. — W. M. Smith (Columbia) : Simple Infinite Systems of Plane Curves. A Study of Isogonals, Equitangentials and other Families of Trajectories. — C. T. Sullivan (Chicago) : Properties of Surfaces whose Asymptotic Lines belong to Linear Complexes. — J. I. Tracey (Johns Hopkins) : Researches on the Rational Quintic. — E. E. Whitford (Columbia) : The Pell Equation. — H. R. Willard (Yale) : On a Family of Oscillating Orbits of Short Period (with a chart). — A. H. Wilson (Chicago) : The Canonical Types of Nets of Quadratic Forms in the Galois Field of Order $p^n$. — R. M. Winger (Johns Hopkins) : On Self-projective Rational Curves of the Fourth and Fifth Order. — B. M. Woods (California) : A Discussion by Synthetic Methods of two Projective Pencils of Conics.

## Wilhelm Fiedler.

(3 avril 1832 — 19 novembre 1912)

Au moment où le dernier numéro sortait de presse, on apprenait la mort de Wilhelm Fiedler, professeur de géométrie descriptive et de géométrie de position à l'Ecole polytechnique fédérale, de 1867 à 1907.

Né à Chemnitz, en Saxe, de famille très modeste, Fiedler est fils de ses œuvres. A 13 ans, il s'amusait à reproduire à la plume des tableaux classiques; la vente de ses petits chefs-d'œuvre, quelques leçons particulières et des bourses lui permirent de

suivre les classes supérieures de sa ville natale, puis les cours de l'Académie de Freiberg. A 20 ans, il fut obligé d'abandonner ses études universitaires pour subvenir aux besoins de sa famille ; il accepta une place de maître de mathématiques élémentaires à l'Ecole professionnelle de Freiberg, puis à celle de Chemnitz. Ses nombreuses occupations ne l'empêchèrent pas d'approfondir les œuvres des grands géomètres modernes : Poncelet, Möbius, Steiner, v. Staudt, Salmon et Cayley.

Sa thèse de doctorat, qu'il présenta en 1859 à l'Université de Leipzig, traite de la « projection centrale considérée comme science géométrique » ; elle contient, à côté de choses connues à cette époque, les idées qu'il a développées plus tard dans son grand traité classique : « Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage ». D'après Fiedler, la projection centrale doit être à la base d'une étude systématique de la géométrie descriptive ; tous les autres modes de projection n'en sont que des cas particuliers ; de plus, la perspective conduit de la manière la plus naturelle à la géométrie de position qui, en revanche, joue un rôle important dans les constructions de la géométrie descriptive.

Pénétré de ces idées, Fiedler accepta, en 1864, un appel à l'Ecole polytechnique de Prague ; trois ans plus tard, il succédait à Deschwanden, à Zurich. Il y trouva, comme collègue, l'ingénieur Culmann, créateur de la statique graphique, qui exigeait de ses auditeurs des connaissances étendues de géométrie de position.

Dès son arrivée à Zurich, Fiedler s'intéressa tout particulièrement à la section normale de l'Ecole polytechnique ; de 1868 à 1881, il a été « principal » de cette division. C'est pour ses élèves mathématiciens qu'il écrivit, en 1876, son mémoire sur la « Géométrie et Géomécanique », résumé des idées de l'astronome anglais Ball sur l'application du système focal à la cinématique des corps solides. C'est encore pour les futurs maîtres de mathématiques qu'il publia, en 1869, sa théorie des coordonnées projectives qui s'applique si élégamment à l'étude analytique des propriétés projectives des figures. On sait que Fiedler a traduit la « Géométrie analytique » de Salmon ; ce qui distingue l'édition allemande de l'original est précisément l'introduction des coordonnées projectives — et celle des déterminants.

Un seul des travaux de Fiedler fut l'objet d'une distinction académique ; la publication, en 1882, de sa « Cyclographie » lui valut le Prix Steiner de l'Académie des Sciences de Berlin. En faisant correspondre à tout point de l'espace un cercle orienté (comme on détermine le centre d'une perspective à l'aide du cercle de distance), Fiedler a éclairé d'un jour nouveau la géométrie des cercles et des sphères.

Comme professeur, il n'a jamais eu pour but de supprimer les

difficultés; il cherchait au contraire à stimuler ses élèves en exigeant d'eux quelques efforts; ceux qui en étaient incapables ne lui ménagèrent pas leurs critiques; par contre, ceux qui prirent la peine d'approfondir ses idées reconnurent bien vite en Fiedler un maître éminent qui savait les encourager à la réflexion personnelle sans laquelle toute étude reste stérile.

L. Kollros (Zurich).

## Sir George Darwin.

Nous avons le regret d'annoncer la mort de Sir George Darwin, qui, au mois d'août dernier, présidait, à Cambridge, le 5e Congrès international des mathématiciens. Darwin est mort le 7 décembre 1912, à l'âge de 67 ans, à la suite d'une maladie cancéreuse. Fils de l'auteur de l'*Origine des espèces*, il s'était fait connaître par de remarquables travaux de mécanique, d'astronomie et de géophysique; il s'était principalement spécialisé dans l'étude des marées et des mouvements atmosphériques.

Depuis 1883, Sir George Darwin occupait la chaire d'Astronomie de l'Université de Cambridge. La science anglaise perd en lui l'un de ses plus illustres représentants. H. F.

## Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

**Allemagne.** — M. Georges Cantor, professeur à l'Université de Halle, a été nommé Docteur honoraire de l'Université de St-Andrews en Ecosse.

M. Fr. Engel, professeur à Greifswald, a accepté un appel à l'Université de Kiel.

M. J. Horn, professeur à Darmstadt, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Giessen, en remplacement de M. Netto qui prend sa retraite.

M. P. Stäckel, professeur à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Heidelberg.

M. H. Reissner, à Aix-La-Chapelle, a été nommé professeur de mécanique et de statique graphique à l'Ecole technique supérieure de Berlin.

M. Rothe, professeur à Clausthal, a été nommé professeur à l'Ecole technique supérieure de Hanovre.

M. Tœplitz, privat-docent, a été nommé professeur à l'Université de Gœttingue.

*Académie des Sciences de Munich.* — MM. G. Mittag-Leffler (Stockholm), H.-A. Schwarz (Berlin) et Struve (Berlin) ont été nommés membres correspondants.

*Fondation Wolfskehl.* — La Société royale des Sciences de Göttingue organisera une série de conférences se rattachant à la Théorie cinétique de la matière. Ces conférences auront lieu du

21 au 26 avril 1913 à Göttingue. Tous les mathématiciens et physiciens y seront les bienvenus. Afin de faciliter la discussion, la Commission fera distribuer déjà en février un résumé des principaux objets qui seront traités par les conférenciers. Voici la liste des conférences :

1. M. Planck, Gegenwärtige Bedeutung der Quantenhypothese für die Gastheorie.

2. P. Debye, Die Zustandsgleichung auf Grund der Quantenhypothese.

3. W. Nernst, Kinetische Theorie der festen Körper.

4. M. v. Smoluchowski, Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie.

5. A. Sommerfeld, Probleme der freien Weglänge.

6. H.-A. Lorentz, Anwendung der kinetischen Methoden auf Elektronenbewegung.

**Autriche.** — M. M. Ernst a été nommé professeur ordinaire d'astronomie à l'Université de Lemberg.

M. H.-A. Lorentz (Leyde) a été nommé membre honoraire de l'Académie des Sciences de Vienne.

**Belgique.** *Académie royale.* — La classe des sciences a élu comme membre associé, M. D. Hilbert (Göttingue), en remplacement de H. Poincaré; comme correspondant M. E. Van Aubel (Gand). Elle a couronné un mémoire de M. M. Lecat (Bruxelles) sur le calcul des variations.

**Etats-Unis.** — M. H.-B. Roe a été nommé professeur extraordinaire de mathématiques à l'Université de Minnesota.

**France.** — M. J. Hadamard, professeur de mécanique analytique et mécanique céleste au Collège de France, professeur d'analyse à l'Ecole polytechnique, a été nommé membre de l'Académie des Sciences de Paris, en remplacement de M. Poincaré.

M. Maillet est nommé examinateur de mécanique à l'Ecole polytechnique en remplacement de M. Lucien Lévy, décédé.

M. Painlevé est nommé membre du Conseil de l'Observatoire d'astronomie physique de Meudon.

M. Emile Picard est nommé membre du Bureau des Longitudes, en remplacement de M. Poincaré.

*Académie des Sciences de Paris.* — Le Grand prix des Sciences mathématiques a été ainsi partagé : Prix de 3000 francs à M. P. Boutroux, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers ; deux prix de 2000 francs à MM. Chazy, professeur à la Faculté des Sciences de Lille, et Garnier, docteur ès sciences.

**Iles Britanniques.** *Société royale de Londres.* — Dans sa séance annuelle du 30 novembre, la Société royale a attribué la *médaille Copley* à M. F. Klein, professeur à l'Université de Göttingue, pour l'ensemble de ses recherches en mathématiques.

L'une des *médailles royales* a été attribuée au prof. W.-M. Hicks pour ses travaux de Physique mathématique et ses études sur la Spectroscopie théorique.

M. A-D. Ross, maître de conférences à l'Université de Glasgow, est nommé professeur de mathématiques à l'Université de « Western Australia ».

**Italie.** — M. F. Enriques, professeur à l'Université de Bologne, a été nommé membre de la Société italienne des Sciences (dite des XL).

M. E. Picard, professeur à l'Université de Paris, a été nommé associé étranger de la même Société.

**Suisse.** — M. L. Crelier, professeur au Technicum de Bienne, a été nommé professeur extraordinaire à l'Université de Berne.

M. R. Fueter, professeur à l'Université de Bâle, a accepté un appel à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe, en remplacement de M. P. Stäckel, appelé à Heidelberg.

## Nécrologie.

G. Lauricella. — Nous avons le regret d'apprendre la mort de M. G. Lauricella, professeur à l'Université de Catane, décédé le 9 janvier à Catane à la suite d'une infection contractée accidentellement. Il était âgé de 45 ans. On lui doit des recherches pénétrantes sur l'intégration des équations de la physique mathématique et sur les équations intégrales. Il appartenait à l'Académie dei Lincei et avait été appelé à la chaire d'Analyse supérieure de l'Université de Rome; mais peu de temps après il préféra revenir à sa Sicile natale.

Hermann Kinkelin. — Les mathématiciens suisses viennent de perdre l'un de leurs doyens, M. H. Kinkelin, ancien professeur à l'Université de Bâle, décédé le 2 janvier 1913, à l'âge de 80 ans. Il s'était acquis une grande notoriété dans le domaine des assurances. Professeur d'un grand mérite, il joua un rôle important dans l'organisation de l'instruction publique du canton de Bâle-Ville et tout particulièrement dans l'élaboration des lois et règlements concernant la préparation du corps enseignant.

R. Schimmack. — M. Rodolf Schimmack, privat-docent à l'Université et professeur au Gymnase de Göttingue, est décédé subitement le 2 décembre 1912, à la suite d'une affection cardiaque. C'est une perte sensible pour la science et l'enseignement. La sous-commission allemande de l'enseignement mathématique perd en lui un collaborateur des plus actifs.

M. J.-M. van Vleck, ancien professeur à l'Université de Werleyan (E.-U.), est décédé le 4 novembre 1912, à l'âge de 79 ans.

M. O.-C. Wendell, professeur d'astronomie à l'Université Harvard (E.-U.), est décédé le 5 novembre 1912, à l'âge de 62 ans.

# NOTES ET DOCUMENTS

## Commission internationale de l'enseignement mathématique.

*Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales.*

(10e article.)

## ALLEMAGNE

### Les examens d'État et la préparation pratique des candidats à l'enseignement moyen.

*Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiklehrer an höheren Schulen in Preussen und einigen norddeutschen Staaten*[1], von W. LOREY (Minden). — L'auteur fait un exposé historique de l'examen d'État et expose dans l'ordre chronologique les différentes phases de la formation professionnelle des professeurs de l'enseignement dit moyen ou secondaire (Gymnase, Gymnase réal, Ecole réale supérieure).

*L'édit de 1810.* — Avant 1810, il existait déjà des gymnases fondés par l'Église depuis plusieurs siècles. Une ordonnance du 2 septembre 1718 instituait un examen à subir devant le Consistoire pour les professeurs de latin et d'allemand, et en 1787, des instructions obligeaient tout professeur de collège supérieur à être porteur d'un diplôme du Consistoire central. Les considérations qui, après l'année funeste de 1806, provoquèrent la création de l'Université de Berlin, mirent aussi en évidence la nécessité d'une réorganisation de l'enseignement secondaire, et l'édit du 12 juillet 1810 constitue le premier règlement officiel d'examen pour les professeurs d'enseignement moyen.

Cet examen portait sur la philosophie, l'histoire, les mathématiques et comprenait une thèse écrite, une épreuve orale et une leçon d'épreuve.

Ce fut Friedrich Jahn, le père de la gymnastique, qui, à 32 ans, subit le premier l'examen.

Sous l'influence de Hegel, la partie philosophique et théologique fut accentuée et un arrêté de 1824 attirait l'attention des étudiants sur la logique, la métaphysique, la psychologie et l'histoire de la philosophie. La philosophie était alors la branche capitale de l'examen et il n'y avait pas de spécialités dans les études.

*Règlement de 1831.* — En 1831, sous l'influence de SCHULZE, parut un nouveau règlement d'examen. Il distinguait 4 espèces d'examens : 1) pro facultate docendi, 2) pro loco, 3) pro ascensione, 4) Colloquia pro rectoratu.

---

[1] 1 fasc. in 8°, v - 118 p., 3 M. 20; B. G. Teubner, Leipzig.

L'examen pro facultate docendi établit la capacité pour le candidat d'enseigner les différentes branches dans les différentes classes (classes inférieures, moyennes, supérieures).

Ces branches sont : A) Dans les langues : allemand, grec, latin, français, hébreu.

B) En sciences : mathématiques, physique, histoire naturelle, histoire et géographie, philosophie, pédagogie, théologie. L'examen comprend 2-3 thèses écrites à fournir en un délai de 6 mois, plusieurs leçons d'épreuves et un examen oral. Une thèse au moins doit être écrite en latin, sauf pour les professeurs de mathématiques et sciences des écoles réales. Les leçons traitent de la philosophie, les mathématiques, l'histoire ; l'examen oral comprend philologie, mathématiques, histoire, sciences naturelles, théologie, philosophie et chaque candidat doit être questionné sur chaque branche afin de déterminer l'étendue de ses connaissances.

Le diplôme de capacité pour toutes les classes, sans réserve, est délivré à celui qui, dans un des 3 groupes suivants : 1) langues anciennes, 2) mathématiques, sciences physiques et naturelles, 3) histoire, géographie — satisfait aux conditions permettant d'enseigner dans les classes supérieures et prouve en outre qu'il comprend les rapports des autres branches avec celles qu'il doit enseigner. Même on exige que les professeurs de mathématiques d'écoles réales traduisent un auteur latin et un auteur français.

Les connaissances requises diffèrent suivant que le diplôme est valable pour les classes inférieures, moyennes ou supérieures. Chaque candidat doit connaître la logique, la psychologie, l'histoire de la philosophie et la pédagogie.

Un diplôme conditionnel est donné à celui qui montre des aptitudes suffisantes seulement pour une branche, dans les 2 classes supérieures ou qui ne satisfait que pour les classes inférieures ou moyennes.

Le diplôme décerné expose en détail l'étendue des connaissances du candidat dans les différentes branches, ainsi que les lacunes constatées.

L'examen pro loco a pour but de déterminer la capacité d'un candidat pour une chaire déterminée.

L'examen pro ascensione est subi par ceux qui aspirent à une chaire dans une classe supérieure avec traitement plus élevé. L'examen pro rectoratu a pour but de déterminer si un professeur possède les connaissances suffisantes pour assumer la direction d'un gymnase. Les 2me et 3me examens furent supprimés en 1866, le 4me l'est en fait.

*Un arrêté de 1839* détermina le programme en physique et en dessin, il préconisait que l'enseignement du dessin soit donné par le professeur de sciences naturelles. Il n'était pas question alors de l'union du dessin et des mathématiques.

*En 1838* l'examen fut rendu plus difficile.

*En 1843* les exigences en religion et philosophie furent aggravées, tout candidat ne satisfaisant pas en ces branches était refusé.

*En 1848*, une réunion de professeurs tenue à Berlin proposait les vœux suivants : 1° que l'examen comporte une épreuve écrite sur la formation philosophique et sur la branche principale ; une épreuve orale sur la formation générale scientifique ; 2° que tout candidat qui a réussi puisse entrer dans un séminaire ; 3° que la nomination soit précédée d'un examen sur la pédagogie et la méthodologie. En 1848 encore, une réunion de professeurs tenue à Marienburg demandait qu'aucun candidat ne soit agrégé s'il n'a pas,

au moins dans une branche principale, le diplôme pour les classes supérieures. Cette tendance à la limitation est en opposition avec les exigences encyclopédiques de 1831.

En ce moment, le mouvement en faveur de la formation professionnelle se dessine déjà fortement ; c'est ainsi qu'on demande un examen sur la formation pédagogique et didactique, la création de chaires de pédagogie, on désire que pendant le dernier trimestre, le candidat donne des leçons dans un gymnase. D'autres souhaitent une formation pratique dans un séminaire en relation avec un gymnase dans les villes universitaires, mais après l'examen d'agrégation.

Toutes ces réformes qui se firent surtout jour à partir de 1848 restèrent longtemps à l'état de vœux, pourtant vu les extensions continues des matières de chaque science, vu la nécessité d'une formation professionnelle, l'impossibilité de maintenir les exigences dans toutes les branches se faisait de plus en plus sentir.

*Règlement de 1866.* — En Prusse, sous l'influence de Jacobi, les mathématiques, dans la première moitié du XIXe siècle, avaient pris un essor marquant qui devait avoir sa répercussion sur le nouveau règlement de 1866. Celui-ci exige que les agrégés en mathématiques pour les classes supérieures montrent des capacités spéciales en géométrie supérieure, analyse et mécanique analytique et puissent faire avec succès des recherches personnelles. La physique est liée aux mathématiques et à l'astronomie. Les autres sciences naturelles sont traitées à part, mais l'agrégé en mathématique et physique doit prouver des connaissances générales en chimie, minéralogie, zoologie, botanique. Tout candidat doit connaître la littérature relative à sa branche. L'agrégé des classes supérieures doit savoir enseigner l'arithmétique en 6me; il doit indiquer dans sa demande d'inscription à l'examen s'il a participé aux exercices d'un séminaire annexé à l'université. On voit que le côté professionnel intéresse déjà fortement.

Il est à signaler que les mathématiques et sciences naturelles n'entrent pas dans le programme des connaissances générales que tout professeur doit posséder, de sorte que, tandis que les agrégés en mathématiques doivent prouver certaines connaissances en langues anciennes, les agrégés en philologie, les théologiens, les historiens peuvent être d'une ignorance complète dans le domaine scientifique. C'est le résultat de la prépondérance accordée alors à la formation classique. Malgré les progrès réalisés, on déniait encore aux mathématiques la qualité de discipline générale et féconde, même au sein des commissions d'examen. La leçon d'épreuve pouvant être rattachée aux autres épreuves fut supprimée en fait.

On exige une dissertation sur un thème philosophique et pédagogique, en dehors de la thèse scientifique faite dans un délai de 6 mois, et la commission est en outre autorisée à faire subir un examen écrit, à huis clos, sur des questions mathématiques.

Les diplômes délivrés comprennent 3 grades : Le 1er grade est accordé au candidat qui prouve *a)* une formation générale suffisante ; *b)* la capacité d'enseigner les branches choisies jusqu'en 1re et les branches accessoires dans les classes moyennes.

Le 2me grade est accordé à celui qui avec une formation générale suffisante est capable d'enseigner dans les classes moyennes ou qui, capable d'enseigner dans les classes supérieures, a une formation générale insuffisante.

Le 3$^{me}$ grade est réservé au candidat capable d'enseigner dans les classes moyennes, mais à formation générale insuffisante, ou à formation suffisante mais incapable d'enseigner dans les classes moyennes.

Tout agrégé peut, par des examens ultérieurs, compléter son diplôme.

*Règlement de 1887.* — Pendant 21 ans le règlement de 1866 fut en vigueur. Sous l'influence de Bonitz, un nouvel édit fut élaboré en 1887.

On reprochait à l'examen de 1886 les 3 points suivants :

1° Le diplôme de 3$^{me}$ grade était universellement désapprouvé ;

2° L'épreuve sur la formation générale était considérée comme inutile et la variété de ses branches comme nuisible ;

3° L'essai de vouloir fixer toutes les combinaisons de branches pour les diplômes avait conduit à une casuistique étroite, rendant difficile une vue d'ensemble.

Le nouveau règlement ne distingue plus que deux genres de diplômes : le diplôme d'agrégé (Oberlehrerzeugnis) et le diplôme de régent (Lehrerzeugnis) donnant respectivement accès aux chaires supérieures et aux chaires ordinaires. Le diplôme d'agrégé est conféré à celui qui satisfait dans deux branches principales pour toutes les classes et en deux branches accessoires pour les classes moyennes (ou trois branches de classes supérieures) ; celui de régent à qui satisfait dans deux branches principales pour classes moyennes, dans une branche accessoire pour classes moyennes, et dans seconde branche accessoire pour les classes inférieures.

Le corps enseignant, lui, réprouvait plutôt le maintien du diplôme de régent.

L'agrégé en mathématiques doit montrer des aptitudes remarquables, connaître les applications immédiates dans le domaine mathématique. On insiste spécialement sur ce fait que relativement aux mathématiques élémentaires, le candidat ne peut se contenter des souvenirs d'école, mais doit accorder à cette partie un travail sérieux. Le volume III montre les lacunes de l'enseignement universitaire à ce point de vue.

Ici, il n'est plus question, comme en 1866, de formation générale ; toutefois, chaque candidat doit connaître la philosophie, la pédagogie, la littérature allemande (principaux auteurs) et la religion. Trois thèses écrites sont exigées : une en philosophie ou pédagogie et une sur chacune des deux branches spéciales choisies. Remarquons le progrès fait depuis 1866 ; tous les travaux sont écrits en allemand, tandis qu'en 1866, seules pouvaient l'être les thèses de mathématiques et sciences. Elles doivent être fournies en 24 semaines. La commission peut faire subir un examen écrit, à huis clos, sur des questions mathématiques, des expériences de physique.

Le règlement de 1887 ne fut pas accepté sans critiques, surtout de la part des professeurs de langues anciennes : l'université craignait un affaiblissement du côté scientifique, parce que le but était de former des professeurs pratiquement capables d'enseigner.

*En 1890*, le ministre réunit une commission de 44 membres pour discuter les réformes. On voulait surtout appeler l'attention des professeurs sur la nécessité d'être non seulement des propagateurs de science mais surtout des éducateurs, des formateurs d'énergie et de volonté.

Les conclusions de la commission furent :

que malgré la diversité des branches et celles des écoles moyennes, une préparation uniforme est nécessaire pour tous les professeurs ;

qu'il faut donner aux étudiants des plans d'études hodégétiques ;

que les universités doivent faire les cours correspondant aux exigences du règlement d'examen, ce qui laisse deviner que cela n'avait pas toujours lieu.

Mais ces conclusions ne furent pas consacrées par une nouvelle ordonnance. Après 1890, ce sont les mathématiciens d'université et de gymnase qui remettent en question les réformes. Ainsi en 1893, au congrès de Munich, l'assemblée, considérant avec joie les tendances qui se manifestent partout pour parfaire la formation pédagogique par des cours théoriques et pratiques, craignant que cette tendance ne s'accompagne d'une diminution dans la formation scientifique, émettait l'avis qu'une préparation scientifique approfondie est seule la base d'un enseignement fécond.

La réunion de Göttingen pour l'avancement de la physique appliquée et des mathématiques, apparaît comme le centre du mouvement de réformes, auquel contribuèrent puissamment les remarquables cours que M. Klein faisait à Göttingen sur « la géométrie élémentaire. » Depuis 1892 d'ailleurs, à Göttingen, les mathématiques appliquées étaient officiellement reconnues comme une branche spéciale, et un plan d'études était publié (pour la première fois) pour les étudiants en mathématiques. En 1896, M. Klein faisait à Hanovre une conférence sur les exigences de l'ingénieur et la formation des professeurs de mathématiques.

De ce mouvement sortit le nouveau

*Règlement de 1898*. — Ce règlement admet deux sortes de diplômes : celui du 1er degré qui permet l'enseignement dans toutes les classes et celui du 2me degré qui ne l'autorise que jusqu'en Untersekunder. Une innovation est l'agrégation en mathématique appliquée, avec un seul degré, ainsi que la liberté accordée aux candidats en mathématiques, physique, chimie de faire dans une école technique supérieure des études assimilées à trois semestres d'université. Deux thèses écrites, au lieu de trois, sont seulement exigées, une sur la formation générale qui peut porter sur un sujet autre que la philosophie ou la pédagogie, une sur une des deux branches spéciales choisies.

Dans la première thèse, le candidat doit prouver non seulement qu'il a des connaissances mais aussi qu'il sait les exposer avec logique et clarté. Dans sa demande d'inscription à l'examen, il doit expliquer sa carrière d'étudiant.

Une autre modification est que, pour être agrégé, il faut avoir satisfait dans une branche au 1er degré, et dans deux branches au 2me degré.

Les diplômes comportent les grades suivants :

Satisfaisant, bon, avec distinction.

Tandis que les diplômes précédents indiquaient avec détails les connaissances et les lacunes des candidats, les actuels sont entièrement schématiques.

*Accueil fait au règlement de 1898*. — En 1900, le ministre provoquait déjà à Berlin une réunion de 34 membres, parmi lesquels Klein et Hauck, où fut admise l'égalité des trois genres d'écoles moyennes (Gymnase, Gymnase réal, Ecole réale supérieure) et où il fut longuement parlé de la nouvelle agrégation en mathématique appliquée. On peut citer comme commentaire sur le nouveau règlement la conférence de Klein faite à Dusseldorf en 1898 : « Université et Ecole technique supérieure », et les deux conférences de Pâques 1900 à Göttingen : « Généralités sur la mathématique appliquée. — Sur la mécanique appliquée. »

Le nouveau règlement subit les critiques, pas toujours justes, de Study. Le professeur Study considère, dans la formation générale, la religion et la pédagogie comme superflues. Il est adversaire des chaires de pédagogie, craignant qu'elles ne préjudicient aux branches scientifiques et croit que la pédagogie doit être réservée aux séminaires. M. Lorey partage cet avis tandis qu'il désapprouve au contraire la campagne de Study contre l'examen de philosophie, lequel permet de juger la maturité d'esprit du candidat. D'accord pour supprimer aussi l'examen en littérature allemande, ils croient que la formation générale d'un mathématicien devrait être orientée vers les sciences naturelles, comme l'exigeait le règlement de 1866.

En 1899, l'Association des mathématiciens allemands discuta surtout l'agrégation en mathématique appliquée qui devait produire une vivification dans l'enseignement mathématique ; il en fut de même à la réunion de Göttingen en 1907. Citons parmi les vœux adoptés : La mathématique appliquée doit former une partie normale des études mathématiques, cette agrégation comprendrait deux degrés. L'agrégation du 1er degré en mathématique pure serait liée avec celle du 2me degré en mathématique appliquée, comportant la descriptive, les éléments de géodésie et principes d'astronomie.

En 1907, Gutzmer, rapporteur de la sous-commission de la Société des naturalistes et médecins allemands, demande la séparation des études scientifiques en deux groupes : le 1er, mathématiques et physique ; le 2me, chimie et zoologie.

En 1908, Schmid, dans son rapport à la 17me assemblée de l'Association pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles, montre l'utilité et la nécessité de cette séparation en deux groupes. Il demande que l'astronomie fasse partie de la mathématique appliquée ; que la minéralogie soit séparée de la chimie ; que géologie et minéralogie fassent un groupe spécial ; que soit supprimée la décision qui permet d'obtenir l'agrégation du 1er degré en zoologie et botanique quand le candidat ne satisfait que dans une branche ; que soit supprimée dans la formation générale les branches qui sont une répétition de l'examen de maturité ; il attache une grande importance au maintien de la philosophie et de la pédagogie et désire que le candidat fournisse les preuves de sa participation aux exercices de séminaire ou à des leçons pratiques.

Dans le chapitre suivant, M. Lorey fait l'historique des commissions d'examens qui trouvent leur origine dans les députations scientifiques instituées en 1809. Il résume ensuite l'organisation dans les duchés de Brunswick et de Mecklembourg-Schwerin.

*Formation pratique des professeurs de mathématiques.* — En 1787, on peut déjà signaler le séminaire pédagogique annexé au Friedrich Gymnasium de Berlin par F. Gedike, où les membres se réunissaient mensuellement avec le directeur pour des discussions philologiques. En ce temps, les langues anciennes étaient la seule préoccupation. En 1804, est fondé le séminaire pédagogique de Stettin. L'institut didactique de Königsberg, fondé en 1810 par Herbart, formait une exception en ce sens que les mathématiques y jouaient un grand rôle. Après le départ de Herbart pour Göttingen en 1833, le séminaire didactique fut dissous et remplacé par un séminaire de mathématiques et physique.

Le premier séminaire pour la formation pratique des professeurs de sciences naturelles est érigé en 1825 à l'université de Bonn. En Allemagne du Nord, les universitaires et les pédagogues reconnaissent bientôt qu'une

formation pratique est seule possible dans un gymnase ; aussi quand Kunge, successeur de Herbart à Königsberg, voulut rétablir le séminaire, la faculté donna un avis défavorable, disant qu'une telle institution est de nature à détourner les candidats de leurs études et que ces tendances de technique pédagogique ne sont pas du ressort de l'université.

On reconnaît aussi qu'il est impossible de juger les aptitudes pédagogiques aux quelques leçons d'épreuve faites à l'examen. Ces considérations amènent, en 1826, l'institution du *Probejahr :* les agrégés devaient faire un an de stage dans un gymnase et prouver des aptitudes professionnelles avant d'être pourvus d'une chaire.

En 1842 le ministre Eichhorn arrête des dispositions précises pour le Probejahr ; mais le manque de professeurs obligeait souvent l'emploi d'agrégés, sans s'inquiéter de leur formation pratique. Le peu de succès du Probejahr porte Wiese, directeur au ministère, à créer, en 1855, le séminaire mathématique pédagogique de Schelbach, annexé au Friedrich Wilhem Gymnasium de Berlin. Les noms des grands mathématiciens ayant fréquenté ce séminaire : Clebsch, Neumann, Fuchs, Schwarz, Cantor, Schönflies, etc., prouvent suffisamment la valeur de son enseignement. Le séminaire de Schellbach recevait les agrégés pro facultate docendi, à raison de trois par branche. Ceux-ci assistaient d'abord pendant plusieurs semaines aux cours des professeurs, donnaient ensuite eux-mêmes des leçons et avaient des réunions avec professeurs et directeur où l'on discutait les questions didactiques. Ce séminaire rendit d'inappréciables services jusqu'en 1889, année de la retraite de Schellbach, malheureusement le grand nombre d'agrégés faisaient que beaucoup ne pouvaient y entrer. En 1867, un arrêté améliora le Probejahr, mais les séminaires restaient toujours presqu'exclusivement sous la direction d'inspecteurs provinciaux, philologues classiques.

En 1883, sous l'inspiration de Schrader, on introduit une réforme dont l'idée principale est de créer une seconde épreuve pratique pour les agrégés. Des discussions, est sortie, en 1890, l'organisation actuelle de la préparation professionnelle en Prusse : une année de séminaire et une année de stage. Après ces deux ans, un diplôme du conseil scolaire provincial certifie la capacité d'enseigner et l'agrégé peut être titulaire d'une chaire.

En 1908, un nouvel arrêté dit que pendant l'année de séminaire, le candidat doit être initié à la science de l'éducation et de l'instruction, à la méthodologie des branches particulières et à l'activité pratique comme professeur et comme éducateur.

Les séminaristes doivent avoir des réunions hebdomadaires d'au moins deux heures, présidées par le directeur ou un professeur délégué. Le programme de ces réunions comprend :

Pédagogie générale. — Méthodologie particulière.

Aperçu historique sur l'enseignement secondaire, grands pédagogues, tendances pédagogiques modernes.

Organisation des écoles secondaires, programmes, règlement d'examen diplôme.

Discipline scolaire, hygiène scolaire. — Inspection. — Actes officiels.

Instructions pour l'assistance aux leçons modèles, préparation des leçons, devoirs de classe, discussions des leçons.

Les candidats doivent remettre des rapports succincts sur des sujets relatifs à leur spécialité et faire des conférences pour acquérir l'habitude du langage. Un compte rendu de chaque séance est dressé par les élèves, et les

inspecteurs doivent faire effectuer des échanges de comptes rendus et rapports entre les différents séminaires de leur ressort d'inspection.

Les candidats doivent tous participer aux réunions, même quand on discute une branche d'enseignement en dehors de leur agrégation. Ils acquièrent ainsi une idée générale de l'activité scolaire du gymnase.

Les candidats donnent des leçons et des séries de leçons ; une fois par mois, une leçon didactique est faite par un candidat en présence de ses collègues. A la fin de l'année, chaque séminariste doit fournir un travail portant sur la théorie et l'application pratique, tel que : « Etude de la trigonométrie en Untersekunda. Etude sur le premier enseignement de la géométrie ».

Ces thèses sont écrites après que leurs auteurs ont pu expérimenter leurs idées dans des leçons données ou entendues. Signalons la série remarquable de travaux faits au séminaire de la Klinger Oberrealschule de Francfort, sous la direction de M. Bode.

Pendant l'année de stage — que certains estiment superflue — chaque agrégé doit donner 8 à 10 heures de cours par semaine. Si un stagiaire est, à la fin de l'année, jugé insuffisant, le conseil scolaire peut lui accorder un semestre de stage supplémentaire ; il peut aussi refuser complètement un candidat qui se montrerait inapte ou indigne du rôle d'éducateur de la jeunesse. De même, il peut être accordé une année de séminaire supplémentaire. Les candidats doivent visiter des écoles normales, des écoles primaires de toutes espèces.

A la fin du stage, les candidats doivent remettre un rapport sur leur activité pédagogique.

Un paragraphe à signaler est celui qui dit que les agrégés admis au Probejahr et qui vont dans des écoles allemandes à l'étranger pour perfectionner leur formation didactique, peuvent faire compter ce temps comme année de stage.

Il importe surtout que les stagiaires soient dirigés et conseillés de façon à ce qu'ils ne perdent pas tout contact avec la science pure, qu'ils ne descendent pas des sommets élevés de la science universitaire dans le champ fertile de l'enseignement secondaire sans laisser entr'ouverte la porte du jardin de la science, afin de pouvoir parfois aller s'y rafraîchir et accumuler de nouvelles forces.

Cette éducation postscolaire qui peut se faire par des cours d'université, réunions, revues, est traitée dans le vol. III.

M. Lorey termine son remarquable rapport par le vœu suivant qu'appuieront certainement tous ses lecteurs, tous ceux qui s'intéressent au progrès de l'enseignement :

« Puisse ce livre apporter une pierre à l'édification du pont qui tend à relier les mathématiques de l'université à celles des écoles secondaires. »

Toutes ces réformes successives, continuées pendant plus d'un siècle avec ténacité et clairvoyance, montrent combien il est difficile d'atteindre une solution satisfaisante. Elles prouvent que si l'Allemagne a su arriver à une organisation pédagogique qui peut être actuellement considérée comme modèle, c'est grâce à l'esprit opiniâtre et volontaire de tous les intellectuels allemands, et en particulier des professeurs unissant leurs efforts dans des fédérations puissantes.

Puisse notre pays s'inspirer le plus tôt possible de l'exemple de la Prusse.

Jean Renard (Liège).

# AUTRICHE

## La préparation des professeurs des Ecoles moyennes.

*Die neuesten Einrichtungen in Oesterreich für die Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie u. Pädagogik*[1], von Dr Alois Höfler, Professor an der Universität. — Le rapport est consacré aux nouvelles dispositions adoptées en Autriche pour la préparation des professeurs des écoles moyennes ; il comprend deux parties, la 1re — Mathématique et formation professionnelle — a été écrite en 1910, avant la publication des nouvelles instructions pédagogiques de juin 1911.

I. Dans la *première partie*, M. Höfler examine les deux questions dans lesquelles se résume la thèse générale, mathématique et formation didactique :

1° Quelles sont les choses nécessaires, fondamentales pour former complètement, scientifiquement et pédagogiquement un professeur de mathématiques d'enseignement moyen ?

2° En quoi la situation actuelle en Autriche est-elle inférieure à un tel idéal de formation ?

1° Il y a lieu de se demander si, à côté de la *formation scientifique* du maître, d'autres éléments ne sont pas nécessaires, indispensables pour permettre au futur professeur de remplir sa mission.

Il est d'abord évident qu'à l'université un même enseignement mathématique ne peut être ni nécessaire ni suffisant pour tous les étudiants en mathématiques se destinant les uns à la science pure, les autres à la technique ou au professorat dans les gymnases et les écoles réales. D'autre part, il ne faudra pas longtemps au mathématicien à formation exclusivement scientifique, devenu professeur d'école moyenne, pour s'apercevoir que la science mathématique la plus riche et la plus profonde ne suffit pas pour être un véritable professeur. D'ailleurs les exemples vécus sont plus probants que les discussions : tel celui de ce jeune professeur qui, en 6me d'un gymnase de Vienne, enseignait la théorie des irrationnels comme on la lui avait exposée à l'université ! Ce cas prouve que tout ce qui est bon pour l'université ne l'est pas pour l'école moyenne ; et la question suivante se pose : quand, où et par qui seront tracées les limites entre ce qui convient à l'université et ce qui convient à l'enseignement moyen ? Sera-ce dans les cours universitaires ou au gymnase ? L'université doit-elle s'occuper de l'avenir pédagogique de ses candidats ? Il est en tout cas certain que si le jeune professeur précité avait reçu une formation didactique convenable il n'aurait pas commis une telle hérésie pédagogique. Aussi, avant de vouloir le juger, il faut se demander si, au courant de ses études, il a eu l'occasion de s'assimiler le complément didactique indispensable.

Ce cas et cent autres prouvent que pour la formation complète du professeur, les mathématiques de l'université constituent une condition néces-

---

[1] Berichte über den mathem. Unterricht in Oesterreich. Heft 12. — 1 fasc. 103 p. : 2 M. ; Höfler, Vienne.

saire, mais hélas pas suffisante et réfutent le vieil adage coupable de tant de méfaits : « Celui-là enseigne le mieux, qui connaît le plus ». Non, il y a, à côté des connaissances mathématiques beaucoup d'autres notions indispensables au professeur, notions qui relèvent de la logique, de la psychologie, de l'éthique, et il est nécessaire de déterminer quand, où et comment ces notions seront enseignées pour que le jeune professeur puisse les appliquer dans sa classe, au milieu des élèves dans la vie scolaire véritable.

Que ce complément pédagogique soit nécessaire, est une vérité que les débutants démontrent constamment dans leurs leçons et l'exposé de leurs idées ; qu'il repose sur des bases logiques solides et non sur des notions élémentaires, est une autre vérité prouvée par ce fait que les professeurs ignorant la logique, veulent malencontreusement en introduire les formes dans les mathématiques les plus élémentaires, justifiée par la nécessité d'extirper le formalisme qui se manifeste dans tout notre enseignement.

2° En Autriche, comme en Allemagne, la *formation didactique* des professeurs se fait après les études universitaires, lors du *Probejahr*. Aux universités de Vienne, Prague et Graz existent des chaires de pédagogie, auxquelles sont rattachés à Vienne et Prague des séminaires pédagogiques. A Prague, Willman avait institué des leçons pratiques, exercices excellents que M. Höfler a eu soin de continuer et d'améliorer pendant son passage comme professeur de pédagogie à l'Université de Prague. Dans l'enseignement secondaire l'esprit conservateur domine encore parmi les professeurs, et à leur réunion tenue à Vienne en 1910, ils défendaient encore la vieille formule que tout est pour le mieux dans le meilleur des mondes : c'est-à-dire laisser à l'Université la formation scientifique et théorique, et au stage simple la préparation pratique. M. Höfler montre que cette méthode n'est pas celle qui peut donner les meilleurs résultats : la théorie est vouée à la stérilité si simultanément il n'y a pas d'exercices pratiques permettant de comprendre la portée des notions théoriques.

La formation scientifique même doit tenir compte des nécessités futures du professeur et ne pas se borner à la science mathématique pure, il faut déduire les conclusions relatives aux matières qui sont enseignées dans les écoles moyennes. L'auteur cite des exemples vécus de candidats connaissant parfaitement les fonctions elliptiques mais ignorant ce qu'est un cosinus ou exposant que $\log(-10) = -1$, c'est-à-dire non instruits des matières qu'ils devront enseigner ; et ce qu'il y a de plus dangereux, c'est que la formation scientifique actuelle à l'Université ne permet pas de combler ces lacunes, de redresser ces erreurs. Pour y remédier, on pourrait tout au moins obliger les candidats à lire et à juger des manuels classiques approuvés.

Quant à l'année de stage, donne-t-elle le rendement qu'on serait en droit d'attendre ? Est-elle réellement exécutée ?

Qui décide, lesquels parmi les professeurs de gymnase seront, au point de vue administratif, scientifique, pédagogique, choisis comme modèles ? Il est assez extraordinaire que, pendant vingt années, pas un seul candidat n'ait été désigné comme stagiaire auprès de l'honorable rapporteur.

S'il s'agit de rénover en cette matière, une question de principe se pose : Veut-on instaurer une formation pédagogique en pleine et entière liberté, c'est-à-dire sans se soucier des traditions actuellement régnantes dans l'enseignement secondaire ?

L'auteur discute l'intervention du professeur de pédagogie d'Université

dans la préparation didactique des candidats et montre la nécessité de la collaboration amicale de l'Université et des professeurs de l'enseignement moyen pour arriver à un résultat fécond.

II. La 2me partie nous renseigne sur la nouvelle organisation pédagogique de l'enseignement moyen en Autriche. Elle distingue les deux points essentiels suivants :

1° La formation scientifique des professeurs. L'auteur résume le nouveau programme scientifique que STERNECK, dans le volume 7, a comparé à celui de 1897.

2° La formation professionnelle des maîtres. Relativement à ce dernier point, M. Höfler, avant tout mathématicien pédagogue, ne cache pas sa joie en présence des progrès immenses réalisés par le nouveau décret. Les dispositions nouvelles s'adaptent parfaitement non seulement aux nécessités de l'enseignement moyen et des futurs professeurs, mais aussi aux nouveaux programmes mathématiques élaborés en 1908-1909. Elles expriment, en plusieurs passages, l'obligation, pour le professeur d'Université, de donner son cours en ayant toujours en vue le but spécial que visent ses auditeurs, en sachant insister sur les matières qui ont un rapport plus direct avec les mathématiques de l'enseignement moyen. De même que les programmes de 1908 avaient consacré la première réalisation de la réforme de l'enseignement mathématique demandée par les « Naturforscherversammlungen », le nouveau règlement d'examen réalise des projets de Méran et de Prague. Ce qu'il y a d'essentiel et de plus consolant pour les vrais pédagogues, c'est qu'il met à la base de la réforme de l'enseignement, la réforme des maîtres, seul principe vrai et efficace. A propos du passage du nouveau règlement demandant du candidat la connaissance des principales recherches sur les fondements des mathématiques, M. Höfler montre que les recherches nouvelles sur ces fondements se confondent de plus en plus avec la logique et la philosophie, et que cette connaissance si nécessaire au professeur ne peut être réellement efficace que si elle constitue une étude philosophique et logique complète.

Les nouvelles instructions accordent à la pédagogie la grande importance qui lui revient en instituant un examen préalable sur la philosophie et la pédagogie à subir après le Ve semestre. A cet examen, le candidat doit prouver qu'il possède la formation philosophique et pédagogique indispensable à tout professeur. Cette épreuve comporte la pédagogie générale (éducation et instruction), ses fondements en psychologie et en logique, l'histoire de la pédagogie de l'enseignement moyen depuis le XVIe siècle.

Le certificat obtenu à cette épreuve préalable est indispensable pour être admis à subir l'examen conférant le diplôme de professeur, c'est là la sanction la plus efficace. La formation philosophique et pédagogique est assurée par un cours de quatre heures sur la philosophie, la psychologie, la pédagogie, par des cours sur la méthodologie particulière, l'hygiène scolaire, l'éducation physique, la langue véhiculaire. Il est recommandé fortement aux candidats de participer activement aux exercices du séminaire, particulièrement à ceux relatifs à leur spécialité et à la pédagogie. Il y a aussi de nouvelles prescriptions relatives à la propédeutique philosophique dont le programme est déterminé par l'article 20. La propédeutique philosophique a, pour les mathématiciens qui se font diplômer pour cette branche, l'avantage d'élargir le champ de leur activité, de leur fournir un appoint important pour donner à leurs leçons de mathématiques un attrait particulier et de

leur permettre de comprendre clairement la différence entre la science mathématique et la didactique des mathématiques.

Le règlement de 1897 avait déjà remplacé la thèse pédagogique par deux examens oraux sur la philosophie et la pédagogie. Ces examens ont été jugés insuffisants pour plusieurs raisons, entre autres celle que les étudiants se présentaient au petit bonheur, sans préparation sérieuse, certains les subissant après le 1er ou le 2me semestre, or il est essentiel que les étudiants préparent cet examen non dans le but immédiat de satisfaire à l'épreuve, mais surtout pour acquérir les connaissances qu'ils devront constamment appliquer dans leur vie de professeur, il faut qu'ils en comprennent toute l'importance et s'y attachent avec enthousiasme.

Pour que cet examen pédagogique préalable produise des résultats sérieux, plusieurs conditions sont nécessaires. Parmi celles-ci, figurent d'abord les matières choisies que l'auteur examine successivement. Ces quatre disciplines signalées — science de l'éducation, science de l'instruction, psychologie, logique — prouvent que l'autorité supérieure désapprouve le fait de mettre les professeurs, au point de vue pédagogique, dans une situation inférieure à celle des instituteurs. La difficulté de réalisation gît peut-être dans le nombre trop restreint d'heures consacrées à cette formation.

Le règlement cite comme bases théoriques de la science de l'éducation et de l'instruction la psychologie et la logique, mais ne mentionne pas l'éthique que Herbart considère pourtant comme le but de toute pédagogie. L'auteur donne les raisons qui expliqueraient l'introduction de l'éthique et aussi celles qui peuvent excuser de l'avoir passer sous silence. Si les prescriptions ignorent le mot éthique, l'esprit même de l'épreuve ne peut ignorer la chose.

Il est évident qu'avant de vouloir éduquer les facultés intellectuelles de l'élève, le maître doit connaître les lois qui régissent le développement des facultés psychiques, c'est-à-dire posséder à fond la psychologie. Pour atteindre ce but, il serait utile que le professeur de pédagogie donnât en même temps la psychologie.

De même, la logique est indispensable à qui veut parler de la didactique d'une science et se faire comprendre. Le distingué professeur montre la nécessité de faire à l'Université un cours de logique approfondi si l'on veut donner aux candidats une formation réelle et non superficielle, si l'on veut que les notions d'intuition, d'induction, de méthode analytique, synthétique etc., soient pour les élèves autre chose que des mots creux dont ils ignorent le sens exact et la véritable portée pratique.

Quant à l'histoire de la pédagogie, l'auteur montre que cette branche enseignée, non comme une nomenclature de noms dont les élèves ne retirent aucun profit, mais exposée d'une manière vivante en expliquant ses problèmes et ses paradoxes (les écoles réales ont leur origine dans le piétisme) est de première utilité pour le futur professeur. Ce cours porte sans doute sur la partie historique mais il comprend aussi les déductions pratiques à tirer pour les élèves. Tous les problèmes de l'histoire de la pédagogie sont riches d'enseignements pour la période actuelle ; tel celui-ci : *a)* le gymnase actuel, *b)* comment il fut jadis, *c)* comment il doit être et comment il sera.

Donné dans cet esprit, ce cours ne trouvera pas de détracteurs.

La clause que le candidat ne peut subir l'examen pédagogique avant la fin du 5me semestre est utile pour empêcher les jeunes gens de se présen-

ter à un âge où ils ne conçoivent pas l'exacte importance de ces matières. De même, la clause que le candidat, pour être admis à l'épreuve, doit signaler par quelles études (séminaire, cours, exercices, lectures, enseignement privé) il croit avoir acquis la formation philosophique et pédagogique, garantit une préparation sérieuse, d'autant plus que pour ce motif le candidat peut être ajourné.

Le séminaire pédagogique est le lieu tout indiqué pour fournir cette préparation. Une dernière question se rattachant intimement à la nouvelle épreuve pédagogique est la réorganisation des séminaires pédagogiques. Le dernier chapitre du rapport est consacré « au séminaire universitaire pédagogique en relation avec le stage étendu au séminaire de gymnase. » Ce titre indique un but à réaliser dans l'avenir, mais cette coopération n'est plus en tout cas un rêve, une utopie, puisque le Ministre de l'Enseignement, par un arrêté du 17 juin 1911 met à la disposition du savant professeur le Gymnase académique et l'Ecole réale de Vienne, afin que les élèves de son séminaire puissent y faire des leçons. L'auteur expose d'abord le fonctionnement du séminaire de Prague, fondé par Willman en 1876 et dirigé par lui de 1903 en 1907. Professeur de pédagogie à l'Université de Vienne en 1907, il résume ses efforts pour créer à Vienne un séminaire pédagogique et le mettre en liaison avec un gymnase pour les exercices pratiques. Si ce but rencontre un chaleureux accueil auprès de la faculté de philosophie de l'Université, par contre les professeurs de gymnases y font opposition, sous prétexte que les élèves de gymnases ne doivent pas servir de sujets d'expériences aux étudiants de l'Université et que les locaux sont insuffisants. M. Höfler réfute aisément ces objections.

Il cite ensuite les visites et excursions pédagogiques faites avec ses élèves aux gymnases, lycée de jeunes filles, école professionnelle, sanatorium pour enfants nerveux ; il montre la nécessité absolue d'un gymnase d'application afin que, comme il le dit excellemment, *la pédagogie soit enseignée pédagogiquement*. Pour terminer, le dévoué professeur explique comment doit être préparée la transition entre l'Université et le Gymnase pour que le débutant ne ressente pas comme maintenant une désillusion, un désenchantement en passant des sphères élevées de la science universitaire aux notions élémentaires du gymnase. C'est à la pédagogie à préparer cette transition, c'est l'organisation pédagogique qui doit effectuer la liaison entre la science pédagogique de l'Université et la technique pédagogique du gymnase. Le candidat, pendant les derniers semestres de ses études universitaires assisterait à des leçons au séminaire, en donnerait parfois lui-même, il acquerrait ainsi par sa propre expérience, par la critique de ses compagnons, de ses maîtres, des notions de didactique. Après son examen, il ferait son stage simple ou étendu au séminaire de gymnase annexé à l'Université ; là, il formerait sa pratique pédagogique sous la conduite du directeur et des professeurs. Le professeur de pédagogie de l'Université, membre du séminaire, aurait l'occasion de suivre ses progrès, de s'assurer si la théorie pédagogique universitaire concorde avec les nécessités de la pratique et ainsi la transition s'opérerait sans discontinuité, sans saut dans l'inconnu. Sans doute, cette coopération des professeurs d'enseignement supérieur et d'enseignement moyen exige de part et d'autre du dévouement, mais combien elle est utile pour tous. Pour le professeur de pédagogie d'université, c'est l'expérience acquise au cours de son activité dans les écoles secondaires qui constitue la source la plus sûre où il peut puiser les idées direc-

trices de son enseignement, or cette source tarira rapidement si elle est privée de tout rapport avec la vie pédagogique du gymnase.

De ce rapport substantiel où sont accumulées tant d'idées fécondes, concluons avec M. Höller que de même que par les nouveaux plans de 1908, l'Autriche avait réalisé les grandes réformes que demande l'enseignement moderne des mathématiques, de même par le nouveau règlement pour la formation professionnelle des maîtres, elle a résolu une des questions capitales dont la Commission internationale de l'enseignement mathématique aura à connaître.

Ce rapport est écrit par un apôtre de la pédagogie, un apôtre à la foi enthousiaste et éclairée. Professeur d'université après avoir exercé pendant 27 ans dans l'enseignement moyen, nul n'était mieux préparé pour démontrer la nécessité impérieuse de la pédagogie comme science véritable basée sur la psychologie, la logique et l'éthique, pour mettre en pleine lumière les avantages de l'union entre la théorie pédagogique et la technique pédagogique ; nul n'était plus autorisé ni mieux placé pour confondre les derniers adversaires de la pédagogie : qu'ils soient professeurs de gymnase n'ayant pas l'énergie nécessaire pour modifier leurs méthodes routinières d'après les lois d'une pédagogie rationnelle ; qu'ils soient professeurs d'Université préférant s'enfermer dans leur tour d'ivoire, sans se préoccuper des nécessités pratiques inhérentes à leur enseignement.

J. Renard (Liège).

# FRANCE

## Enseignement secondaire [1]

Le volume II des rapports de la Sous-Commission française est entièrement consacré à l'étude de l'Enseignement secondaire en France et particulièrement à la place qu'occupent les mathématiques dans ces établissements. Le volume devait paraître sous la direction de M. Marotte, professeur au Lycée Charlemagne. M. Marotte n'ayant pu pour raisons de santé, donner son concours à cette œuvre, a été remplacé par M. Bioche, professeur au Lycée Louis-le-Grand. Si nous regrettons à juste titre les conseils précieux que M. Marotte, grâce à sa grande expérience, aurait pu donner à ses collaborateurs, nous nous réjouissons du choix de M. Bioche que ses lumières désignaient pour cette tâche délicate.

M. Bioche nous présente dans son *Avant-propos* quelques obervations d'ordre général, faisant ressortir quelques points caractéristiques qui différencient le nouveau programme de 1912 des programmes antérieurs. Cette différence est bien connue des lecteurs de l'*Enseignement Mathématique*.

Le premier rapport, également dû à M. Bioche, remonte dans l'histoire de l'enseignement mathématique secondaire jusqu'au programme antérieur à 1891. Pour en donner une idée l'auteur nous fait un exposé succinct du plan d'études de 1885. De la 8e à la 5e il n'y avait que le calcul arithmétique avec quelques applications. A partir de la 4e seulement commençaient : l'enseignement de la géométrie, des éléments d'arithmétique théorique, de calcul algébrique et de cosmographie descriptive. On enseignait aussi

[1] 1 vol. in-8°, 157 p., fr. 3.50 ; Hachette, Paris.

les mathématiques dans la classe de philosophie et dans celle de mathématiques préparatoires : en philosophie 4 heures de classe étaient consacrées à la revision des programmes antérieurs, en préparatoires on avait affaire à des élèves sortant de 3e qui, après cette année consacrée à voir l'ensemble des programmes précédemment indiqués, voulaient entrer en mathématiques élémentaires pour préparer le baccalauréat ès-sciences Les classes, dont on vient de parler, constituaient l'enseignement classique. A côté de celui-ci il y avait les classes d'enseignement spécial. L'auteur nous rapporte encore qu'il y avait à la suite des propositions adoptées au Conseil supérieur de l'Instruction publique en 1890, deux plans d'études. Le premier n'a jamais été mis en vigueur. Le second fut modifié par l'arrêté du 8 août 1890 qui établissait le baccalauréat de l'enseignement secondaire classique et celui de l'enseignement secondaire moderne. A ce régime succéda celui de l'arrêté du 31 mai 1902, légèrement modifié en 1905 et 1909 et actuellement en vigueur. Il n'y a plus aujourd'hui qu'un seul baccalauréat dit de l'enseignement secondaire. On sait que les programmes de 1902 ont suscité de vives critiques de la part de nombreux professeurs de l'enseignement secondaire. L'administration accepta enfin le concours de ces professeurs pour la revision des programmes en 1905 ; à ce propos, M. Bioche nous signale l'influence heureuse de cette collaboration sur l'enseignement des mathématiques. Tout le monde sait que les programmes de 1902 ont introduit de bienfaisantes innovations en débarrassant cet enseignement du joug d'une logique stérile. Aujourd'hui on fait largement appel à l'intuition des élèves et aux exemples de la vie pratique.

Les imitateurs des programmes français n'ont pas toujours su se tenir dans de justes limites. Cela ressort suffisamment d'une simple comparaison de rapports français avec les rapports étrangers. Certes, la logique n'est pas tout dans l'enseignement mathématique, mais cet enseignement affranchi de toute règle de logique, surtout dans les classes supérieures, ne vaudrait rien. Il est également impossible de faire comprendre aux jeunes gens le mécanisme entier de la vie industrielle moderne par des exemples, comme ont tenté de le faire certains auteurs de manuels spéciaux publiés en plusieurs pays. Il me paraît préférable de leur donner la faculté de saisir facilement plus tard les problèmes spéciaux de la partie dans laquelle ils se seront spécialisés. Les observations générales de M. Bioche sont des plus intéressantes : elles nous montrent qu'en France, le professeur de lettres et celui de sciences collaborent depuis longtemps en vue de donner aux élèves la formation la plus complète. Nous voyons des professeurs de lettres, tels que M. Clouin, qui demandent instamment une bonne instruction mathématique pour leurs élèves ; de même des mathématiciens ont bien compris que sans lettres, une instruction sera toujours incomplète. Qu'il me soit permis de reproduire ici les belles paroles que M. Bioche emprunte à un rapport de M. Lebrun à la Chambre des députés en 1910 : « Il n'est pas de forte culture générale sans l'étude des lettres, et à Polytechnique comme ailleurs cette culture générale doit être vivement encouragée. On croit trop souvent que ses élèves, jaloux de se renfermer dans le domaine scientifique où ils se meuvent n'ont pour les lettres qu'indifférence. C'est une grave erreur. Les vrais amis de l'école ont toujours souhaité pour elles un recrutement qui offrit, tout à la fois, avec de belles espérances scientifiques, basées sur une sélection judicieuse des candidats de précieuses réalités littéraires, fruits de fortes études passées. »

M. Blutel nous a fait un rapport sur les *classes de mathématiques spéciales* des Lycées. C'est surtout par ces classes que l'enseignement mathématique français diffère de l'enseignement mathématique secondaire dans les autres pays. Ces classes s'intercalent entre l'enseignement secondaire proprement dit et l'enseignement supérieur. Elles sont nécessaires en France pour préparer les élèves aux examens d'entrée des grandes écoles telles que l'Ecole Polytechnique, l'Ecole Normale Supérieure, l'Ecole des Ponts et Chaussées, l'Ecole Centrale... etc. Ainsi, le développement ininterrompu de divers régimes de ces classes résulte des modifications apportées aux programmes de ces examens. Les élèves n'entrent dans ces écoles que lorsqu'ils possèdent des connaissances plus ou moins approfondies de l'algèbre, de l'analyse, de la géométrie descriptive, de la mécanique.... etc. Les matières des examens d'admission sont fixées par les établissements intéressés eux-mêmes[1].

Les élèves de la classe dite des mathématiques spéciales se préparent presque tous à l'Ecole polytechnique; un millier en moyenne s'y présentent chaque année. Le nombre des admis est en moyenne de 180 à 200. Mais il y a aussi quelques élèves de spéciales qui se préparent soit au concours de l'Ecole Normale Supérieure ou des bourses de licence près des Facultés des Sciences, soit aux épreuves de l'Ecole des Mines (année préparatoire). La plus grande difficulté de l'enseignement mathématique en spéciales vient de ce que les élèves de cette classe ont des origines très diverses. Tout candidat à l'Ecole polytechnique, qui au sortir de la classe de mathématiques trouve à sa portée une classe de mathématiques spéciales préparatoire, va d'abord y passer une année, s'il n'a pas à craindre la limite d'âge. Nombreux élèves restent deux années en spéciales. Les candidats âgés entrent directement dans la classe des spéciales. Le programme des classes de spéciales préparatoires — elles existent surtout à Paris — est sauf la sanction d'un examen à la fin de l'année, celui de la classe des spéciales. Dans les établissements pourvus de ces deux classes un accord des professeurs de mathématiques est indispensable sur les matières et la méthode de l'enseignement à donner.

La classe de Centrale prépare au concours d'admission à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures. Le plus grand nombre des candidats à l'Ecole des Ponts et Chaussées (année préparatoire) beaucoup des candidats aux écoles techniques et quelques candidats à l'Ecole des Mines suivent aussi cette classe. On sait que les programmes des concours mentionnés ne diffèrent que peu de celui de l'examen d'admission à l'Ecole Polytechnique. Les élèves restent souvent deux années en classe de centrale comme en spéciales, mais il y a aussi des classes de centrale première année, correspondant aux classes de préparatoires. L'enseignement dans chacune de ces classes est confié en général à un maître unique. Toutefois, en spéciales il y a dans certains établissements un second maître pour la géométrie descriptive, et cela malgré le vœu contraire émis par la commission chargée de la rédaction des nouveaux programmes. En spéciales, six classes chaque semaine, sont employées à l'exposition du programme de mathématiques pures et une classe de deux heures à celle de géométrie descriptive ; trois conférences d'une heure servent à la correction au tableau des exercices écrits proposés

[1] Actuellement les programmes d'examens sont choisis dans un programme général arrêté en 1904 par une commission interministérielle.

aux élèves. Une séance de trois heures est consacrée à l'exécution d'une épure. En Centrale la distribution du temps est à peu près la même.

L'enseignement donné est ordinairement oral et les élèves prennent des notes. Ils acquièrent ainsi une habitude des plus nécessaires dans les écoles scientifiques. Bien que beaucoup d'élèves n'entrent dans ces classes qu'avec un seul désir, celui de se frayer un chemin dans une direction déterminée, un vrai professeur peut utiliser ce souci, bien naturel d'ailleurs, en vue de développer la formation générale de ses élèves.

Nous apprenons par le *Rapport sur l'Arithmétique* de M. Lévy que les élèves du premier cycle, division A, emploient les quatre années de ce cycle à se familiariser avec les notions élémentaires et les calculs simples de l'arithmétique. Mais ils commencent aussi à représenter les nombres par des lettres, puisqu'on ne craint plus aujourd'hui, on le sait, de mettre des notions d'algèbre au service de l'arithmétique. La division B du même cycle pousse un peu plus loin : on y voit en trois ans le programme de quatre premières années de la division A. Elle ajoute au programme de cette dernière division les progressions arithmétiques et géométriques et l'arithmétique commerciale, tout cela enseigné en quatrième. Les résultats obtenus par cet enseignement sont très satisfaisants. Il n'en est plus de même dans les seconds cycles littéraires A et B. Le temps consacré aux mathématiques y est trop restreint. Le Conseil Supérieur de l'Instruction publique a voulu remédier à cet inconvénient en chargeant des deux heures de sciences, en seconde et en première le professeur de mathématiques et en réservant l'enseignement de la physique et de la chimie à la classe de philosophie. On peut espérer que cette mesure donnera des résultats satisfaisants, surtout, parce que, en même temps les mathématiques ont repris aux examens oraux du baccalauréat une partie de leur importance première. Mais M. Lévy suggère encore pour ces examens le rétablissement d'une composition écrite. Je signale ce vœu parfaitement conforme à mon opinion, parce qu'on a également aboli, à tort selon moi, les épreuves écrites aux examens de maturité en Autriche. M. Lévy ajoute à son rapport encore quelques pages pour nous montrer les grands avantages qu'on pourrait tirer d'un enseignement plus approfondi encore de l'arithmétique, notamment si l'on traitait, comme jadis, la théorie des nombres premiers et celle de la divisibilité. Il est vrai que ce n'est point l'opinion de tous les professeurs de mathématiques, comme nous le signale, d'ailleurs, M. Lévy lui-même.

On connaît suffisamment le programme d'algèbre dans les lycées français. En effet, il a été discuté un peu partout. L'intuition y occupe une place assez large, cependant les élèves doivent s'habituer quand même au raisonnement logique; on n'a plus là une théorie complète et indigeste d'algèbre, mais des parties bien choisies, traitées selon leur difficulté soit par l'intuition, soit avec une certaine rigueur Ainsi l'on peut développer en même temps l'esprit d'invention et la faculté de raisonner logiquement.

Pour la première fois, les programmes français introduisaient dans l'enseignement secondaire la notion de la dérivée. A côté de ces mérites, ils en ont un plus grand, celui d'avoir délivré l'enseignement mathématique des cloisons étanches qui séparaient auparavant les différentes parties de cette science. La plupart des Etats étrangers ont modelé leur programme sur celui de la France qui, dans cette question comme dans beaucoup d'autres, a indiqué la voie à suivre.

M. Glitton nous donne dans son *rapport sur l'Algèbre* un commentaire très intéressant que je recommande à tous ceux qui désirent se renseigner non seulement sur ces programmes mais aussi sur leur mise en pratique.

Les programmes de la géométrie élémentaire sont également bien connus. On les retrouve clairement exposés dans le *rapport sur la Géométrie* de M. Th. Rousseau.

M. Rousseau nous a donné aussi un aperçu des plus utiles sur les manuels de géométrie, actuellement en usage en France. Remarquons ici que dans ce pays l'importance des manuels est moindre que dans plusieurs Etats étrangers : toutefois, en France, des livres excellents traitent des éléments de mathématiques. On n'y connaît pas ces horribles entassements de théorèmes et de problèmes, souvent écrits dans une langue incompréhensible et choquant par leur ton autoritaire. Cependant, le régime intérieur des lycées et collèges nécessite en général la distribution gratuite des livres scolaires par l'administration qui a ainsi le plus grand intérêt à conserver les mêmes manuels le plus longtemps possible. Ce fait et les hautes qualités des professeurs français qui ne renoncent jamais à un enseignement très personnel, nous font comprendre que les manuels n'ont qu'une place secondaire dans l'enseignement, soit pour aider les jeunes professeurs dans la préparation des classes, soit pour faciliter la répétition des leçons données, soit pour mettre à la dispositon des meilleurs élèves les notions plus élevées omises dans l'enseignement oral.

En tout cas, l'influence des manuels de géométrie était plus considérable que celle des manuels d'algèbre. La difficulté plus grande de l'enseignement élémentaire de géométrie nous l'explique suffisamment. M. Rousseau nous cite d'abord le célèbre traité de géométrie élémentaire de Méray, qui employait pour la première fois le groupe des déplacements. On sait que la grande valeur de cette œuvre savante a été méconnue longtemps à cause, sans doute, des grandes difficultés que présente cette manière d'exposer les éléments de géométrie. Mais l'influence de ce livre a grandi avec le temps et aujourd'hui il n'est guère possible d'enseigner les éléments sans faire appel au groupe des déplacements.

M. Borel nous a donné dans son manuel de géométrie élémentaire, bien connu d'ailleurs, un bel exposé de cette matière, sans aspirer, toutefois, à une grande rigueur. Il est certain que tout n'est pas encore fait. Les méthodes de Méray, n'étant guère applicables sans grandes restrictions, M. Rousseau a esquissé lui-même, dans un beau mémoire[1], une autre manière de fonder la géométrie sur le groupe des déplacements sans se servir de la représentation analytique de M. Lie. On peut sans doute largement utiliser, au premier cycle, les notions de translation, rotation, glissement,... si familières aux enfants, en évitant toujours de leur parler de choses trop simples qui sembleraient banales. L'emploi du groupe des déplacements devient bien plus difficile dans le 2e cycle. Si l'on ne faisait que donner une forme plus nette aux connaissances déjà acquises par la voie des expériences pour ainsi dire, on n'arriverait qu'à dissimuler à la jeunesse la vraie nature des études mathématiques : ici, un fond logique est indispensable. Pour le donner par le groupe des déplacements, nous avons vu Méray s'engager en des procédés trop compliqués. Les axiomes des systèmes

---

[1] La Géometrie élémentaire basée sur le groupe des déplacements. l'*Enseignement mathématique*. 1909, p. 81.

postérieurs ne me semblent également pas encore parfaits, surtout parce qu'ils auront à lutter avec les axiomes très simplifiés d'Euclide et de ses célèbres continuateurs de notre époque. Ainsi, je préférerais commencer en second cycle, l'enseignement de la géométrie comme on le fait du reste, par la méthode d'Euclide. En renvoyant à plus tard toutes les notions sans relation directe avec le but en vue, je pousserai vivement et assez loin pour pouvoir baser sur un fond logiquement établi la notion du groupe des déplacements qui, dès lors, simplifierait mon enseignement. Ce procédé, je suis certain, sera remplacé bientôt par une méthode rigoureuse basée uniquement sur le groupe des déplacements, qu'un géomètre plus heureux que moi peut inventer quelque jour.

Nous entrons ensuite dans l'analyse du *rapport sur l'enseignement de la Mécanique* dans les Lycées et les Collèges par M. H. Beghin. Avant 1902, le programme de mécanique ne comportait que les notions de statique. Le programme de 1902 a comblé heureusement cette lacune en introduisant des notions de cinématique et dynamique. Une légère retouche de 1905 a supprimé les notions relatives au roulement d'un cercle sur un autre comme étant un peu délicates et accessoires. Signalons encore l'heureuse innovation qui consiste à introduire au début les éléments de la théorie du frottement pour conformer davantage l'enseignement à la réalité. Certains professeurs désireraient encore l'introduction des éléments de la statique graphique. M. Beghin s'y oppose avec raison selon moi : d'abord le programme de mécanique est incontestablement surchargé, ensuite la statique graphique n'éclaircirait en rien la notion infiniment délicate de la force qui est une des plus difficiles pour les jeunes gens. Je suis d'accord avec M. Beghin pour penser que les nouveaux programmes de mécanique sont très bien choisis. Or, il est vrai, que l'enseignement de mécanique en France ne donne que des résultats qui, quoique bons en eux-mêmes, ne sont cependant que médiocres par rapport aux résultats vraiment excellents de l'enseignement mathématique proprement dit. Cela ne peut étonner ceux qui connaissent les grandes difficultés de l'enseignement élémentaire de la mécanique. Cependant, la forte critique adressée par M. Beghin, à la manière dont on enseigne à l'heure actuelle cette science dans les lycées de France, me semble justifiée. En effet, dans le pays de Lagrange l'on ne devrait pas tarder un seul jour à mettre à la disposition de l'enseignement les dernières découvertes de la science : elles seules peuvent donner aux principes fondamentaux cette clarté qu'un esprit formé par les mathématiques doit exiger. On expose les éléments de mécanique encore moins bien dans plusieurs pays, il est vrai, mais cela ne peut dispenser la France de prendre la tête du mouvement et de nous montrer, une fois de plus, qu'on n'est jamais obligé d'employer des notions qui ne sont pas absolument claires et par cela même exemptes de toute contradiction entre elles. Je ne peux pas entrer ici dans le détail de la critique de M. Beghin qui vise la plupart des notions fondamentales, mais je dirai toutefois que j'ai toujours eu, moi-même, l'impression que l'enseignement de mécanique en France, quoique très bon, je le répète, ne valait cependant pas celui de mathématiques. C'est ici un problème intéressant mais difficile à résoudre et, je suis certain, les professeurs français se mettront bientôt à l'œuvre.

Il est inutile d'enseigner la cosmographie aux jeunes gens qui ne possèdent pas avec une certaine maturité d'esprit une instruction mathématique solide. Ainsi nous apprenons dans le *rapport sur l'enseignement de cosmo-*

*graphie* de M. Mcxart que cet enseignement est réservé en France aux classes de philosophie et de mathématiques. De plus, en philosophie le programme en est très restreint, les élèves qui y entrent, ne possédant pas des connaissances suffisantes de mathématiques. Le programme de la classe de mathématiques est plus chargé, mais la cosmographie n'a qu'une sanction très insuffisante dans les examens; c'est pourquoi le résultat de cet enseignement dépend plus que celui des autres de l'habilité du maître.

Le volume sur l'enseignement mathématique secondaire en France se termine par le rapport de M. F. Lombard sur l'enseignement des mathématiques dans les *Ecoles nouvelles*.

Les plus importantes de ces écoles sont :

1° L'Ecole des Roches ;

2° L'Ecole de l'Ile-de-France à Liancourt (Oise);

3° Le Collège de Normandie, près de Rouen.

On y fait largement appel aux travaux personnels des élèves. M. Lombard ne parle que de l'Ecole des Roches. L'enseignement mathématique donné à cette école est plein d'heureuses innovations, malgré la large place accordée aux travaux des élèves on a le souci d'éviter des exercices fastidieux et inutiles. Dans le 2e cycle on a adopté presque entièrement la méthode de Méray. Mais les résultats obtenus n'ont pas été tout à fait satisfaisants. Aussi les professeurs ont dû, à leur grand regret, abandonner dans la classe de quatrième, une partie des méthodes nouvelles. M. Lombard nous raconte qu'un des meilleurs élèves disait avec raison à son maître : « Avec ce genre de raisonnement, translation, rotation, on n'est jamais certain d'une démonstration rigoureuse. »

Je recommande le rapport de M. Lombard à tous ceux qui désirent trouver une confirmation de leur opinion qu'on peut donner un enseignement parfait sans suivre toujours les chemins tracés.

Les auteurs des rapports ont aussi inséré, où ils le jugeaient utile, les programmes officiels, ou seulement des abrégés : ce fait augmente la valeur de leur œuvre pour le lecteur étranger aux institutions françaises. Les dernières pages sont consacrées à une liste très complète des ouvrages employés dans l'enseignement mathématique secondaire en France.

Je ne veux pas terminer cette analyse sans dire un mot des dernières retouches faites aux programmes par l'arrêté du 3 mai 1912, postérieur à l'apparition du volume II des rapports français. Ces retouches ne sont que des allégements. On a supprimé par exemple la mesure des angles en 3e et 4e, A et B, la notion de la dérivée en 2e, pour ne l'exposer qu'en première. On a revisé également le programme de la classe de philosophie; on n'a pas touché à celui de la classe de mathématiques.

Mais les retouches comportent surtout la suppression presque totale du dessin géométrique dans le premier cycle : c'est une modification que je juge infiniment heureuse. Il était très fâcheux d'imposer à des enfants un travail aussi ennuyeux que l'exécution du lavis, travail souvent nuisible à leur santé et exigeant un temps considérable sans développer aucune faculté de l'esprit. Ce temps sera bien mieux employé à la récréation ou aux exercices physiques.

R. Suppantschitsch (Vienne).

## Cours universitaires.

# BELGIQUE[1]

**Gand** (2e semestre 1912-1913). — A. Demoulin : Théorie des fonctions analytiques et application aux fonctions elliptiques, 1 ; Géométrie infinitésimale des courbes et des surfaces, 1. — M. Stuyvaert : Méthodologie ; principes de la Géométrie, 1 ; Théorie des grandeurs algébriques, 1. — E. van Aubel : Physique mathématique générale, 1 ; Chapitres choisis de physique mathématique, 2.

**Bruxelles** (2e semestre 1912-1913). — Th. DeDonder : Le principe de relativité et ses conséquences, 1 ; Les théories statique et cinétique de la chaleur et du rayonnement, 2. — E. Brand : Fonctions elliptiques, 2 ; Histoire des sciences physiques et mathématiques, 1.

# BIBLIOGRAPHIE

**Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1913.** Avec des notices scientifiques. — 1 vol. in-16, 800 p. ; 1 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

L'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1913, si précieux par le nombre des documents qu'il contient, vient de paraître. Cet excellent Recueil renferme cette année, après les documents astronomiques, des tableaux relatifs à la métrologie, aux monnaies, à la géographie, à la statistique et à la météorologie. Il contient en outre deux intéressantes notices : celle du commandant Ferrié sur l'*Application de la télégraphie sans fil à l'envoi de l'heure*, et de M. Bigourdan sur l'*Eclipse de soleil du 17 avril 1912* (résumé des observations qu'elle a permis d'effectuer).

G. Arnoux. — **Essai de géométrie analytique modulaire à deux dimensions** (Essais de psychologie et de métaphysique positives). — 1 vol. gr. in-8°, XI-159 p. ; 6 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Nous avons déjà attiré l'attention des lecteurs de l'*Ens. math.* sur l'arithmétique graphique de MM. Arnoux et Laisant (*Ens. math.*, juillet 1907 et novembre 1908). On se rappelle comment M. Arnoux, après avoir jeté des clartés nouvelles sur des théories arithmétiques déjà connues, a réussi, à l'aide de ses espaces arithmétiques, à traiter des problèmes nouveaux se rattachant à la théorie des congruences. Et on comprend le succès de sa méthode basée sur l'application systématique de la représentation et du

[1] Non compris les cours des deux premières années ni les cours des écoles techniques annexées aux Universités.

langage géométriques. Il existe, en effet, comme l'a dit si bien Poincaré dans sa conférence au Congrès de Rome, un parallélisme parfait entre la théorie des congruences et celle des courbes algébriques. A toute congruence à deux variables (mod $m$) répond une courbe déterminée ; les solutions de la congruence sont représentées par les points de la courbe à coordonnées entières que la modularisation ramène toujours à l'intérieur d'un carré de longueur $m$. On peut donc transporter le langage géométrique dans la théorie des congruences et faire une étude des courbes par rapport à un mod $m$. C'est à cette géométrie analytique modulaire, limitée aux modules premiers, que MM. Arnoux et Laisant ont consacré leur dernière étude, faite sur le même plan que celle des courbes en géométrie analytique ordinaire. Après une introduction fort intéressante, nous abordons l'étude de la ligne droite et du cercle : nous passons ensuite aux coniques rapportées à leurs axes et à l'étude de l'équation générale du deuxième degré, toujours par rapport à un module premier $m$ bien entendu, et l'ouvrage se termine par quelques applications arithmétiques très intéressantes. Mais des chapitres auxiliaires ont dû être intercalés ; je signalerai surtout le chap. II, consacré à la trigonométrie modulaire. Dès le début de ses recherches M. Arnoux a eu des surprises, les résultats obtenus présentant un aspect très différent suivant la forme du module $m$. C'est ainsi que dans la trigonométrie modulaire il est tombé, dans le cas d'un module de la forme $4q + 1$, sur des directions singulières, qu'il a appelées isotropes, et qui sont celles des droites allant de l'origine aux points $a$, $b$, pour lesquels le carré de la distance $a^2 + b^2$ est divisible par $m$. Ces directions sont caractérisées par des angles $\alpha$ tels que l'addition d'un angle quelconque $\beta$ à $\alpha$ n'altère pas tang $\alpha$, à moins que tang $(\alpha + \beta)$ ne prenne une forme indéterminée. Ce fait, qui ne paraît paradoxal que parce qu'on se sert du terme « égal » au lieu de « congru », ne se présente pas dans le cas des modules premiers de la forme $4q - 1$. On rencontre du reste des singularités analogues dans l'étude des courbes et en particulier dans celle de la spirale logarithmique. Le fait le plus important souligné par M. Arnoux est le suivant : lorsque le module $m$ est de la forme $4q - 1$, la spirale peut recouvrir l'espace modulaire tout entier ; en d'autres termes, il existe des points $a$, $b$ tels que les puissances de $a + bi$ donnent tous les points du réseau, sauf l'origine ; mais il n'en est plus de même pour les modules de la forme $4q + 1$. Les auteurs de la géométrie modulaire en donnent la raison, et leur explication s'harmonise avec l'ensemble de leur ouvrage, mais je crois qu'il serait utile de la comparer à celle qui nous est fournie par la théorie des formes et des corps quadratiques. De ce rapprochement naîtrait une clarté plus grande. Les nombres $a + bi$ envisagés par M. Arnoux sont, en effet, les fameux nombres complexes de Gauss, et on sait que dans ce nouveau domaine plus large les nombres premiers ordinaires $m$ de la forme $4q + 1$ sont décomposables en deux facteurs conjugués ; or les directions isotropes sont précisément données par les points dont les affixes sont divisibles par l'un de ces facteurs. On comprend pourquoi les puissances successives de $a + bi$ ne donnent qu'une partie des points du réseau : les nombres de la forme $4q + 1$ n'étant pas premiers dans le domaine de Gauss, le théorème de Fermat prend une apparence différente. Mais si, à la place des nombres de Gauss, on considère avec M. Tarry les nombres de la forme $a + bj$, $j$ étant la racine carrée d'un non résidu, le théor. de Fermat s'applique sous sa forme la plus générale, *les nombres* $m$ *étant premiers dans ce nouveau domaine*, et l'on retombe sur une propo-

sition retrouvée d'une autre manière par M. Tarry. On voit que la géométrie modulaire pourrait éclairer la théorie des formes et des idéaux; et réciproquement. Il serait utile aussi de rapprocher la méthode graphique de M. Arnoux des représentations géométriques de Klein et de Minkowski.

Est-il nécessaire d'ajouter que le nouveau volume de MM. Arnoux et Laisant contient une foule d'autres choses intéressantes et qu'on y retrouve l'élégance et la clarté qui distinguent toutes les publications dues à la plume de M. Laisant. D. Mirimanoff (Genève).

H. Böttger. — **Physik.** Zum Gebrauche bei physikalischen Vorlesungen in höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. I. Band : *Mechanik, Wärmelehre, Austik.* (Aus Dr. F. Schœdler's das Buch der Natur. III. Teil, 2. Abteilung). — 1 vol. in-8°, 983 p. ; 843 fig. et 2 planches : 15 M.; F. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Cet ouvrage, dont le premier volume analysé ici comprend dans un millier de pages la mécanique, l'acoustique et la chaleur, est essentiellement un traité de physique expérimentale. Un caractère apparaît dès la première lecture, celui d'une petite encyclopédie physique, mais d'une encyclopédie pédagogique si je puis dire.

Encyclopédique, ce traité l'est par le souci constant d'être complet : tous les faits et lois physiques sont là, cela va de soi, mais ce souci persiste jusque dans les détails ; il s'accuse par exemple par le soin avec lequel les auteurs véritables des découvertes ont été recherchés (et les noms de ces auteurs sont volontiers accompagnés de quelques indications chronologiques ou autres souvent fort intéressantes) ; il s'accuse encore par la profusion d'appareils anciens et modernes dont on n'a épargné ni descriptions ni dessins, on rencontrera par exemple à peu près tous les modèles de pompes à faire le vide, y compris la rotative à mercure de Gæde, et jusqu'à des machines qui rentreraient plutôt dans le cadre d'un traité de mécanique industrielle. Et l'information sur ce qui concerne les travaux récents est en général fort bonne ; c'est tout au plus si l'on peut regretter l'absence de quelques recherches très importantes dont au moins une brève mention aurait eu, semble-t-il, sa place marquée ; je fais allusion, par exemple, aux résultats acquis ces dernières années sur les chaleurs spécifiques, lesquels ont si heureusement éclairé la signification des chaleurs atomiques et de la loi de Dulong et Petit. Quelques opinions à la vérité ; étonnent un peu, telle celles exprimées (p. 585) sur le zéro absolu, sous cette forme sans autre explication elles risquent d'induire en erreur le lecteur non informé. Mais ce sont là choses auxquelles est exposé tout auteur qui entreprend un livre de cette dimension ; le travail que représente celui-ci est considérable : qu'on songe que toutes les bases de la chimie physique (celles du moins qui se rattachent à la thermique) y ont encore trouvé place.

Pédagogique, ajoutais-je plus haut. Ce caractère ne saurait passer inaperçu à examiner la façon synthétique dont les principes de physique sont présentés, les notions ou grandeurs nouvelles étant en quelque sorte préparées avant leur introduction proprement dite par la considération de nombreux faits concrets où leur rôle est rendu sensible par l'exposé. Citons entre autres exemples de ce procédé éminemment pédagogique les notions de masse et d'inertie que, au lieu d'en donner une définition formelle et sèche, l'auteur amène par tous les développements susceptibles de faire sentir leur signification véritablement physique ; citons encore la vitesse et

l'accélération auxquelles sont consacrées plus de quarante pages. Et d'ailleurs, je me fais un plaisir de le noter en passant, on ne peut que louer vivement l'auteur de présenter d'une façon générale la mécanique aussi « physiquement » qu'il le fait et de lui assigner une part si importante vis-à-vis des autres domaines (elle occupe plus de la moitié de ce premier volume). Outre l'avantage général au point de vue didactique de cette tendance expérimentale et concrète, elle lui permet d'aborder à plusieurs reprises des questions en somme fort délicates pour un ouvrage élémentaire — ainsi les mouvements du pendule de Foucault en fonction de la latitude.

La rédaction de l'ouvrage qui est parfois aussi substantiel qu'un « Handbuch » et qui se doit cependant d'être beaucoup moins brève que celle d'un livre de cette nature pour rester didactique, n'est pas exempte d'un peu de lourdeur ici et là ; on ne saurait en faire un reproche à l'auteur, peut-être est-ce là un résultat inévitable des exigences trop diverses qui découlent du caractère que j'ai cherché à faire ressortir plus haut.

Servir de conseiller (Ratgeber) aux jeunes gens des classes supérieures des établissements secondaires ou des premières années de l'Université, telle est la mission principale que, d'après sa préface, le volume doit remplir. Y atteindra-t-il pleinement ? La réponse me semble dépendre notablement de l'individualité de chaque élève et je crois difficile de répondre par l'affirmative pour tous ; M. Böttger prend d'ailleurs soin de préciser qu'il s'agit d'élèves d'une certaine maturité d'esprit (reifere Schüler). Je crois par contre pouvoir assurer les maîtres de physique dont le temps est trop limité pour lire avec fruit les mémoires originaux ou les grands ouvrages de compilation, qu'ils pourront consulter ce traité avec confiance et en retireront pour leur enseignement suggestions et renseignements des plus profitables. Car, à lecture attentive, à voir combien d'objections sont prévues et levées par avance, on gagne l'impression que l'auteur a beaucoup lu, beaucoup réfléchi et qu'il a eu à répondre à quantité de questions juvéniles, c'est dire qu'il a sans aucun doute une grande pratique pédagogique.

Et notons en terminant que l'exécution matérielle des figures comme du texte est très soignée.

Albert Perrier (Lausanne).

Léon Brunschvicg. — **Les étapes de la philosophie mathématique.** — 1 vol. gr. in-8° de XI-592 pages avec figures ; 10 fr. ; F. Alcan, Paris.

Ce volume me paraît d'abord valoir par sa précision historique et son impartialité.

Les idées philosophiques les plus générales, construites à l'image de données ou de résultats mathématiques, y sont envisagées depuis les temps les plus reculés, tant chez les penseurs poursuivis par des préoccupations nettement métaphysiques que chez les mathématiciens modernes qui, amenés d'une manière plus ou moins consciente à discuter la réalité de l'espace, la priorité du continu ou du discontinu, etc..., ont été amenés aussi à parler le langage métaphysique sans se soucier de philosophie proprement dite. Il ne manque point d'intérêt de voir les grands géomètres des siècles passés tirer du calcul infinitésimal des conclusions inattaquables et essayer de les poursuivre pour expliquer la nature de l'âme ou de la pensée divine : une des tentatives des plus intéressantes en ce genre, paraît constituée par la monadologie de Leibnitz et M. Brunschvieg nous la présente avec beaucoup de clarté.

L'idée, longtemps inébranlée, de la valeur absolue des résultats mathé-

mathiques corrects, d'une image aussi parfaite de la vérité, conduit fatalement les philosophes à transporter le langage et les méthodes mathématiques sur le terrain philosophique. Je suis trop mathématicien pour apercevoir de grands succès obtenus par ce transport ; je crois que la science pure se féconde mieux elle-même qu'en s'alliant à la métaphysique ; le moins que l'on puisse reprocher à cette alliance, c'est de n'avoir jamais conduit à des découvertes effectives (E. Picard, *Quelques réflexions sur la Science et les savants*. Volume publié en souvenir de Louis Olivier, 1911).

Mais, qu'on le veuille ou non, cette alliance existe et M. Brunschvicg l'étudie de manière profonde. Il nous fait passer graduellement de l'antique théorie de la vérité extérieure qu'il faut s'efforcer de *découvrir* à la théorie pragmatiste de la vérité qu'il faut *créer*. Et il essaye de dégager quelques critères pour reconnaître la vérité non sous l'une ou l'autre de ces formes, mais plutôt dans le mécanisme qui a poussé la pensée de l'une à l'autre.

Laissant l'examen du côté philosophique de l'œuvre, par crainte d'y trahir trop d'incompétence, il me reste à signaler bien des points susceptibles d'intéresser le seul mathématicien. Dans ce grand et bel ouvrage je trouve résumés à grands traits, la logique mathématique modernisée par Peano, Russell, Couturat, etc..., les discussions fondamentales sur les principes de la géométrie qui conduisent à apercevoir simplement le pragmatisme de M. Poincaré, les difficultés de la théorie des ensembles avec les discussions dues à MM. Borel, Lebesgue, Baire, Zermelo, etc... Ces seuls noms promettent, je crois, une ample matière au travail du mathématicien dans des régions où sa science peut se teindre de philosophie sans cesser d'avoir l'aspect auquel il est habitué. D'ailleurs M. Brunschvicg montre une connaissance très réelle des mathématiques ; j'ai plaisir à le signaler, à ce titre, aux collègues qui ne connaîtraient en lui que le philosophe.

Ajoutons aussi qu'avec la collaboration de M. Pierre Boutroux, il a donné, en 1908, une nouvelle édition des *OEuvres de Pascal* qui a déjà attiré l'attention des géomètres et dont nous avons rendu compte ici même (T. XI, 1909, p. 156).

A. Buhl (Toulouse).

Félix Le Dantec. — **Contre la Métaphysique.** (Bibliothèque de Philosophie contemporaine). — 1 vol. in-8° de 256 pages ; prix 3 fr. 75 ; F. Alcan, Paris.

Ce volume contient plusieurs opinions particulièrement saillantes dont quelques-unes d'ailleurs sont d'une originalité presque révolutionnaire. Elles ne sont pas faites pour déplaire aux géomètres à qui l'auteur donne généralement le beau rôle. C'est ainsi que M. Le Dantec voudrait qu'on ne puisse devenir un maître, dans une science quelconque (même en médecine) sans avoir fait preuve d'aptitudes mathématiques (p. 87). Le rôle logique de la géométrie le séduit beaucoup : on sent que son idéal serait d'en transporter les méthodes partout et contre ceux qui veulent des domaines particuliers pour la vie et la pensée. De là le titre de ce livre que l'on peut lire en même temps que celui de M. Le Roy que j'analyse ci-dessous. L'opposition sera un excellent exercice d'impartialité ; je le recommande à qui veut s'habituer à juger des doctrines sans immédiatement adopter ou repousser aveuglément l'une d'elles.

Par exemple M. Le Dantec ne me semble pas très heureux quand il critique les conceptions d'Henri Poincaré sur les espaces non-euclidiens et les êtres qui pourraient y vivre (pp. 82-83). Henri Poincaré aurait bâti cette conception, sans s'en apercevoir, avec de la logique euclidienne tandis que

des êtres ayant évolué dans un univers non-euclidien auraient *forcément* une logique non-euclidienne. Et cela serait une incohérence ! Eh bien non ! Même s'il pouvait exister plusieurs logiques voilà qui n'aurait pas lieu *forcément*. *Avec la même logique* je puis combiner les postulats ordinaires de la géométrie et ensuite ces mêmes postulats moins un. La logique n'a pas obligatoirement son origine dans les considérations spatiales ; des êtres ne faisant que de l'arithmétique auraient déjà une logique et celle-ci suffirait à faire *analytiquement* de la géométrie. D'ailleurs nous sommes peut-être dans un univers non-euclidien de très grand paramètre ; on peut rapetisser ce dernier sans toucher à la logique.

Mais la possibilité de telles discussions n'est pas faite pour diminuer l'intérêt de l'ouvrage qui contient des théories vitales lesquelles, pour être matérialistes, n'en sont pas moins remarquablement enchaînées. M. Le Dantec nous y donne également un aperçu de ses idées pédagogiques. Il plaisante agréablement W. James et semble stupéfié par M. Bergson. Que l'on prenne tout cela sans parti déterminé et l'on sera conduit à un important travail de réflexion. A. Buhl (Toulouse).

Edouard Le Roy. — **Une philosophie nouvelle : Henri Bergson.** (Bibliothèque de Philosophie contemporaine). — 1 vol. in-12 de VI-210 pages ; prix : 2 fr. 50 ; F. Alcan, Paris.

Les idées si intéressantes de M. Bergson viennent d'être résumées d'une manière particulièrement heureuse par M. Le Roy. Ce qui est surtout remarquable dans cette philosophie nouvelle c'est l'introduction toute bergsonienne de la notion de *durée*. Le *temps* scientifique, dit M. Bergson, ne *dure* pas : c'est une succession d'instants que l'on déclare continue, mais dans laquelle on ne perçoit que les éléments immobiles d'un ensemble dénombrable, quitte simplement à les rapprocher ensuite autant qu'on veut. Autre est la durée qui est créatrice de liberté et dans laquelle on n'est tenu de retrouver le temps qu'au point de vue pratique. Une fois ce dernier cadre adopté il est possible, il est naturel même que nous n'y semblions plus libres et le déterminisme apparaît. Au contraire, si nous réussissons à nous débarrasser de l'idée d'un temps uniforme et homogène, nous reconnaîtrons d'abord dans quelle mesure nous avons été libres de l'inventer et cela pourra nous donner une première idée de notre liberté sur ce point et, par surcroît, sur d'autres.

Mêmes choses pour l'espace dont la représentation vide est toujours une représentation pleine (p. 187). Penser le néant n'est pas possible ; ce serait ne point penser.

On voit par ces quelques lignes que je m'attache surtout à ce qui peut intéresser les mathématiciens. Certes toutes nos lois et tous nos théorèmes semblent condamnés à s'évanouir si nous abandonnons toutes les représentations qui semblent nécessaires à nos mesures. Mais la philosophie nouvelle ne nous interdit nullement de continuer à faire de la science en nous montrant simplement comment celle-ci s'insère dans ce que M. Bergson appelle le réel. A. Buhl (Toulouse).

Ch. Davison. — **Higher Algebra** for Colleges and Secondary Schools. — 1 vol. in-8°, VIII-320 p. ; 6 sh. ; University Press, Cambridge.

Ce volume traite des matières du programme des classes supérieures des écoles secondaires et des cours ordinaires des collèges universitaires en

Angleterre. Il comprend le binôme, les séries, les inégalités, les approximations et limites, la théorie des équations et les déterminants, les fractions continues et la théorie des nombres.

M. Davison expose les divers sujets presque exclusivement au moyen d'exercices résolus ; la théorie est limitée à de brèves indications ou définitions introduisant ou reliant les sujets entre eux. Des exercices non résolus (avec réponses à la fin du volume) sont adjoints à la suite de chaque chapitre. Le choix des exemples est basé sur les exigences des nouveaux règlements du « mathematical tripos ». L'auteur indique au reste dans la préface que les problèmes sont, en majeure partie, tirés des questions proposées aux examens des collèges et universités des Iles Britanniques et des colonies.

M. Davison donne à la fin du volume une série de questions (« essays » et « problem papers ») dont chaque groupe doit représenter environ une heure de travail, et qui sont destinés à habituer les étudiants à se rendre compte non seulement de la possibilité d'applications multiples d'un même théorème dans divers domaines, mais aussi des relations étroites qui peuvent exister entre des théorèmes appartenant à des domaines différents.

Henry-Daw. Ellis. — **Poems mathematical and miscellaneous.** — 1 vol. in-16, 64 p.; 1 sh. 6 d.; The Chiswick Press, Londres.

Les préoccupations mathématiques n'excluent pas les manifestations poétiques; M. Ellis prouve même qu'elles peuvent les inspirer. Environ un tiers des courts poèmes ou spirituelles boutades de son petit volume traitent en effet des sciences mathématiques ou des mathématic ens. Ils sont écrits dans un style harmonieux et dans plusieurs d'entre eux l'auteur adapte avec à propos et esprit les formes du language mathématique au style poétique. Les participants au V<sup>e</sup> Congrès tenu à Cambridge en août dernier se souviendront toujours du charmant poème de bienvenue que M. Ellis avait adressé aux congressistes. R. Masson (Genève).

Ing. I. Ghersi. — **Matematica dilettevole e curiosa.** — 1 vol. in-16, 730 p. et 693 fig.; relié toile 9 fr. 50; Ulrico Hœpli. Milano.

Le lecteur sera surpris de l'invraisemblable richesse de ce recueil où l'auteur présente, sous une forme concise et claire, des propositions et des problèmes mathématiques susceptibles d'intéresser aussi bien des « dilettanti » que des spécialistes.

Le simple énoncé des principaux chapitres donnera une idée de la variété des principaux sujets traités.

Problèmes curieux. Paradoxes algébriques, géométriques et mécaniques. Tracé mécanique de nombreuses courbes. Systèmes articulés. Inverseurs. Quadrature du cercle. Trisection de l'angle. Duplication du cube. Géométrie de la règle et du compas. Casse-tête géométriques. Probabilités. Jeux.

Cet ouvrage fournit une documentation très complète des curiosités classiques (par exemple, une trentaine de démonstrations du théorème de Pythagore accompagnées de renseignements historiques) et ne néglige pas les résultats récréatifs des plus récentes conquêtes scientifiques.

Les parents y trouveront en abondance des sujets leur permettant de susciter sans fatigue chez les enfants le goût des mathématiques ou de provoquer sous l'aspect de jeu passionnant de bienfaisants exercices de calcul.

Le maître y fera une provision d'exercices et de problèmes permettant de

développer chez les élèves l'intérêt pour les questions mathématiques les plus diverses. Eug. Chatelain (La Chaux-de-Fonds).

G. Hessenberg. — **Transzendenz von $e$ und $\pi$.** Ein Beitrag zur höheren Mathematik vom elementaren Standpunkt aus. — 1 vol. in-8°, 106 p.; 3 Mk.; B. G. Teubner, Leipzig.

Il faut savoir gré à M. Hessenberg d'avoir réuni en une petite monographie les principales démonstrations de la transcendance des nombres $e$ et $\pi$. L'auteur ne s'est pas borné à grouper les différents mémoires classiques en supposant connues les notions spéciales qui interviennent dans les démonstrations. Dans les deux premiers chapitres il rappelle les notions fondamentales concernant les fonctions entières, les fonctions exponentielles. Le chapitre III est entièrement consacré à la transcendance de $e$ et aux notions qui s'y rattachent. Puis, après de nouveaux compléments d'algèbre et de théorie des nombres, il aborde le théorème de Lindemann et la transcendance de $\pi$.

L'auteur n'a pas cru devoir accompagner son exposé de notes bibliographiques. Par exemple il n'est pas fait mention de la démonstration donnée par M. Jamet (Marseille) dans le t. II de l'*Ens. math.* (1900).

H. Renfer. — **Beiträge zur Krankenversicherung.** Allgemeinverständliche Darstellung der wesentlichen statistischen, versicherungs- und buchhaltungstechnischen Grundzüge der Krankenversicherung. — 1 vol. in-8°, VIII-172 p.; br. 5 fr. 50, rel. 6 fr. 50; librairie Fehr, St-Gall.

M. Renfer s'est proposé de réunir en un volume tout ce qu'il faut savoir pour organiser et gérer une société de secours mutuels en cas de maladie. Comme tous ceux qui ont étudié la question, il est persuadé qu'on ne peut fixer les cotisations d'après les expériences plus ou moins bien faites de quelques années, mais qu'il faut les calculer sur la base de tables de mortalité et de morbidité. Il nous montre en quoi consistent ces tables et comment on en déduit les cotisations pour chaque âge; il nous enseigne aussi le calcul des réserves nécessaires à la société pour faire face à ses engagements, même lorsque l'âge avancé de ses membres aura pour conséquence un plus grand nombre de jours de maladie, et par suite de plus fortes charges pour la caisse. Ces deux problèmes sont essentiels dans l'assurance contre la maladie, aussi l'auteur les traite-t-il en détails; en outre, il étudie une ou deux autres questions, en particulier le facteur de réduction.

Le point de vue mathématique, quelle que soit son importance, n'est pas le seul à considérer ici. Il est indispensable que la comptabilité et la statistique des sociétés de secours mutuels soient bien organisées. C'est à elles que M. Renfer consacre la seconde partie de son livre; il fait profiter le lecteur de sa grande expérience et reproduit des formulaires éprouvés par la pratique. Ces pages sont d'un grand intérêt et méritent d'être lues même par les personnes qui, faute de quelques connaissances d'algèbre, auront trouvé par trop rébarbatives les formules par lesquelles commence l'ouvrage. M. Renfer se met toujours à la place des sociétés suisses; il cite à plusieurs reprises la législation fédérale et en précise la portée. Il soulève bien des questions dont la discussion serait intéressante, mais en rapport trop étroit avec la politique pour que nous puissions les aborder ici.

Pour finir, l'auteur donne une vingtaine de tableaux numériques touchant les intérêts, la mortalité, la morbidité et l'invalidité; il y réunit les princi-

pales valeurs utilisées dans l'assurance. Ces tableaux seront d'un grand secours pour appliquer les théories exposées dans le traité.

S. Dumas (Berne).

H. Renfer. — **Tabellensammlung für politische Arithmetik, Lebens- und Krankenversicherung.** — 1 broch. in-8°, 16 p.; 50 ct.; (chez l'auteur) Berne.

Lorsque par sa profession on est appelé à calculer beaucoup, on est frappé de l'importance des tables numériques; on en dresse pour éviter des calculs même très simples lorsqu'ils reviennent souvent. En revanche, l'école paraît les ignorer; on n'enseigne guère aux élèves que l'emploi des tables de logarithmes dont l'utilité diminue beaucoup à mesure que les machines à calculer se répandent. Ce fait regrettable est facile à comprendre; les tables numériques sont généralement beaucoup trop chères pour qu'on puisse en imposer l'achat aux parents. Cette raison perd toute sa valeur puisque M. Renfer publie à un prix extrêmement modique une collection de 13 tables dont l'emploi est journalier en arithmétique politique. Chaque écolier pourra se la procurer et l'on pourra lui enseigner les méthodes en usage constant pour la résolution de divers problèmes; surtout il y apprendra l'existence et le maniement des tables numériques.

La brochure de M. Renfer commence par trois pages consacrées aux formules et aux notations internationales de l'assurance, puis viennent des tables donnant pour six taux différents et des durées allant jusqu'à cinquante ans la valeur actuelle d'un capital payable dans $n$ années, la valeur acquise par un capital placé pendant $n$ années, les valeurs actuelles des annuités et les taux d'amortissement; ensuite, des tables de mortalité (tables de la population masculine et féminine suisse, table d'assurés en cas de décès et table d'assurés en cas de vie), avec les rentes viagères et les primes qui s'en déduisent, une table d'invalidité, diverses tables de morbidité et quelques nombres utiles dans l'assurance contre la maladie.

Nous ne pouvons que souhaiter le meilleur succès à un ouvrage si utile. Ajoutons que quoiqu'il soit en allemand, le texte en est si réduit qu'on peut le mettre entre les mains d'élèves de langue française.

S. Dumas (Berne).

Richard Suppantschitsch. — **Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** für die V. bis VII. Klasse der Realschulen. — 1 vol. in-8° de 368 p.; 76 fig.; 824 questions et problèmes; cartonné 5 K.; Tempsky, Vienne.

Ce volume, destiné au degré supérieur des écoles réales autrichiennes, fait partie de l'excellente collection *Mathematisches Unterrichtswerk* dont nous avons déjà parlé ici même.

Voici la liste complète des huit chapitres: 1. Puissances et racines, p. 3 à 43. — 2. Logarithmes, p. 43 à 62. — 3. Equations du deuxième degré, p. 62 à 115. — 4. Progressions, intérêts composés, p. 115 à 146. — 5. Limites, convergence, continuité, dérivées, p. 146 à 194. — 6. Combinaisons, formule du binôme pour les exposants entiers, p. 194 à 204. — 7. Probabilités, p. 204 à 212. — 8. Applications des probabilités à la théorie des assurances, p. 212 à 223.

Dans tous ses ouvrages, M. Suppantschitsch a su réunir la clarté et la précision. Ces deux qualités essentielles se remarquent surtout dans ce dernier volume que les maîtres de l'enseignement secondaire liront avec le plus grand intérêt.

Aug. Lalive (La Chaux-de-Fonds).

# BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

## 1. Publications périodiques :

**Bibliotheca mathematica.** Zeitsch. f. Geschichte der mathem. Wissenschaften herausgegeben von G. Eneström. — 3. Folge. Teubner, Leipzig.

Tome XII, fasc. 3 et 4. — Axel-Athon Björnbo : Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz. — Yoshio Mikami : The rectification of the ellipse by Japanese mathematicians. — G. Eneström : Die ersten Untersuchungen Eulers über höhere lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten. — H. Suter. — Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloides von el-Hasan b. el-Hasan b. el-Haitham. Uebersetzung mit Kommentar. — G. Eneström : Zur Vorgeschichte der Entdeckung des Taylorschen Lehrsatzes. — J. L. Heiberg : Axel Anthon Björnbo (1874-1911).

**Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris.**

*1er semestre* 1912 (suite). — 29 avril. — Tzitzeica : Sur les réseaux isothermiques. — E. Delassus : Sur les systèmes de Lagrange à paramètre principal. — E. Borel : Modèles arithmétiques et analytiques de l'irréversibilité apparente.

6 mai. — R. Garnier : Sur les limites des substitutions du groupe d'une équation linéaire du second ordre. — Z. de Geöcze : sur la quadrature des surfaces courbes. — L. Roy : La loi adiabatique dynamique dans le mouvement des membranes flexibles.

13 mai. — C. Guichard : Sur les surfaces telles que les sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une série soient tangentes à une sphère fixe. — Patrick Browne : Sur quelques cas singuliers de l'équation de Volterra. — E. Barré : Sur les surfaces engendrées par une hélice indéformable qui reste constamment une asymptotique de la surface qu'elle engendre.

20 mai. — R. Garnier : Sur les limites des substitutions du groupe d'une équation linéaire du second ordre. — G. Bouligand : Sur les petits mouvements de surface d'un liquide dans le champ d'une force centrale attractive, fonction de la distance.

28 mai. — Rouyer : Sur les surfaces à courbure constante. — P. Browne : Sur quelques équations fonctionnelles. — P. Lévy : Sur la fonction de Green relative au cylindre de révolution.

3 juin. — E. Borel : Les séries de fonctions analytiques et les fonctions quasi-analytiques. — G. Dumas : Sur les singularités des surfaces. — A. Rosenblatt : Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques. — Arnaud : Formule nouvelle sur le nivellement barométrique.

10 juin. — J. Clairin : Sur la transformation d'Imschenetsky. —

J. Chazy : Sur les développements asymptotiques divergents qui représentent les intégrales de certaines équations différentielles. — J. Boussinesq : Résistance qu'éprouve un ellipsoïde dans ses lentes translations uniformes à travers un liquide visqueux.

17 juin. — E. Picard : Sur les développements de Cauchy en séries d'exponentielles et sur la transformation de M. André Léauté. — E. Borel : Sur la théorie du potentiel logarithmique. — N. Lusin : Sur les propriétés des fonctions mesurables. — C. Carathéodory : Sur le théorème général de M. Picard. — H. Villat : Sur le changement d'orientation d'un obstacle donné dans un courant fluide.

24 juin. — A. Buhl : Sur les équations aux dérivées partielles définissant des surfaces susceptibles de passer par un contour fermé. — M. Gevrey : Sur certaines équations aux dérivées partielles du type parabolique. — Th. De Donder : Sur le mouvement des électrons dans un champ électromagnétique donné. — U. Cisotti : Sur les déformations élastiques sans efforts tangentiels.

1 juillet. — W.-H. Young : Sur la généralisation du théorème de Parseval. — J. Boussinesq : Pourquoi les équations différentielles de la mécanique sont du second ordre, plutôt que du premier, ou en d'autres termes, déterminent les accélérations des points matériels et non leurs vitesses.

8 juillet. — A. Buhl : Sur les extensions de la formule de Stokes. — Ch.-N. Moore : Sur les facteurs de convergence dans les séries doubles et sur la série double de Fourier. — Patrick Browne . Sur le problème généralisé d'Abel et ses applications. — J. Chazy : Sur la limitation du degré des coefficients des équations différentielles à points critiques fixes. — R. Garnier : Sur la représentation des intégrales des équations irréductibles du second ordre à points critiques fixes au moyen de la théorie des équations linéaires. — A. Denjoy : Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques. — J. Boussinesq : Des erreurs importantes au point de vue théorique, qu'entraînent les notions particulières d'expérience, simplificatrices, adjointes aux lois générales de la mécanique pour pouvoir arriver à des résultats saisissables.

16 juillet. — E. Borel : Sur l'indétermination des fonctions analytiques au voisinage d'un point singulier essentiel.

5 août. — P. Suchard : Sur les courbes invariantes par une transformation réciproque, ponctuelle ou par contact. — A. Guillet : Réalisation du mouvement circulaire uniforme par action périodique synchronisante.

12 août. — L. Godeaux : Sur les transformations rationnelles entre deux surfaces de genre un.

19 août. — R. Birkeland : Sur la trajectoire d'une particule électrisée dans un champ magnétique.

26 août. — W.-H. Young : Sur la sommabilité d'une fonction dont la série de Fourier est donnée.

23 sept. — Th. De Donder : Sur les invariants du calcul des variations. — N. Lusin : Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques.

7 oct. — G. Sannia : Sur les caractéristiques simples des équations aux dérivées partielles de deux variables. — N. Saltykow : Sur la théorie des équations partielles. — U. Cisotti : Remarques énergétiques sur le mouvement d'un solide dans un liquide visqueux.

14 oct. — H. Lebesgue : Sur le principe de Dirichlet. — A. Petot : Sur les systèmes conjugués.

21 oct. — L. Autonne : Sur les substitutions crémoniennes. — T.-H. Gronwall : Sur un théorème de M. Picard. — G. Polya : Sur un théorème de Steiljès.

28 oct. — A. Petot : Sur certains systèmes conjugués. — M. Gevrey : Remarques sur certains théorèmes d'existence. — G. Rémoundos : La théorie de M. Picard et les fonctions multiformes.

4 nov. — P. Appel : Le théorème du dernier multiplicateur de Jacobi, rattaché à la formule dite d'Ostrogradsky ou de Green. — M. Plancherel : Les problèmes de Cantor et de Dubois-Reymond dans la théorie des séries des polynômes de Legendre.

11 nov. — J. Chazy : Sur un système différentiel formé par M. Schlesinger. — Ch.-J. de la Vallée-Poussin : Sur l'unicité du développement trigonométrique. — Hisely : Nouveau théorème sur les effets des moments.

18 nov. — P. Montel : Sur quelques généralisations des théorèmes de M. Picard. — Th. De Donder : Sur les invariants du calcul des variations. — Lémeray : Le principe de la relativité et la loi de variation des forces centrales.

25 nov. — S. Bernstein : Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques. — R. Soreau : Réduction de $F_{123} = 0$ à la forme $f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0$. — L. Thouveny : Sur le vol à voile. — C. Störmer : Remarques sur la note de M. Kr. Birkeland, relative à l'origine des planètes et de leurs satellites.

2 déc. — P. Browne : Sur un problème d'inversion posé par Abel. — M. d'Ocagne : Sur la réduction des équations à trois variables aux formes canoniques que comporte la méthode des points alignés.

**Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,** in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer. — B. G. Teubner, Leipzig.

1912, Nos 1 à 9. — L. Heffter : Zur Einführung der vierdimensionalen Welt Minkowskis. — R. v. Mises : Ueber die Grundbegriffe der Kollektivmasslehre. — Emil Wælsch : Parallelperspektive, komplexe Zahlen und Trägheit ebener Massen. — E. Salkowski : Zur Theorie der Kurven im elliptischen Raum. — J. Neuberg : Ueber drei Sätze von R. Mehmke. — R. Mehmke : Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn Neuberg. — A. Brill : Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. — Fritz Schürer : Ueber die Nullpunkte linearer Aggregate von Funktionen. — E. Study : Quaternionen und Kinematik. Historische Bemerkung. — E. Hæntzschel : Johann Andreas Christian Michelsen. — Vladimir Varičak : Ueber die nichteuklidische Interpretation der Relativtheorie. — P. Stäckel : Die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildung der Ingenieure. — Zu den Verhandlungen betreffend automorphe Funktionen, Karlsruhe am 27. September 1911. Vorträge und Referate von F. Klein, L. E. J. Brouwer, P. Koebe, L. Bieberbach und E. Hilb. — Leon Lichtenstein : Bemerkungen zur Theorie der ebenen Kurven. — Karl Kommerell : Der Sylverstersche Plagiograph und die Proportionenlehre. — Edward L. Dodd : The least Square Method Grounded with the aid of an Orthogonal Transformation. — Julius v. Sz. Nagy : Die Anwendung der birationalen Transformationen einer Kurve von höherem Geschlechte in sich auf ein Diophantisches Problem. — Viktor Blaess : Ueber die Lage des Rotors eines flächennormalen Vektors. — Nachtrag zu A. Brill : Das Relativitätsprinzip. — E. Salkowski : Ueber die verschiedenen Begründungsarten der Differentialgeometrie. — Edmund

Landau : Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion.

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — Mitteilungen und Nachrichten. — Literarisches.

**Monatshefte für Mathematik und Physik**, herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens u. W. Wirtinger. — Eisenstein & Co, Wien.

XXIII Jahrgang (1912). — J. Lissner : Zur Lehre von der Fernwirkung, Induktion und Strahlung. — E. Kohl : Ueber die Gleichung zwischen Wärmetönung und reversibler Arbeit. — L. v. Schrutka : Theorie der quadratischen Kongruenzen. — P. Roth : Ueber elliptisch-hyperelliptische Funktionen. — H. Hahn : Ueber die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. — P. Frank : Ueber allgemeine statisch unbestimmte Systeme. — H. A. v. Beckh-Widsmanstetter : Eine neue Randwertaufgabe für das logarithmische Potential. — (Id.) Lässt sich die Eigenschaft der analytischen Funktionen einer gemeinen komplexen Veränderlichen, Potential als Bestandteile zu liefern, auf Zahlsysteme mit drei Einheiten verallgemeinern ? — (Id.) Unmittelbare Behandlung der nichthomogenen linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten — Dr. L. v. Schrutka : Drei Parallelzätze zum Fermatschen Satz über die Zerlegung der Primzahlen von der Form $4n + 1$ in zwei Quadrate. — F. Palm : Ueber die direkte Konstruktion des perspektiven Umrisses von allegemeinen Schraubflächen. — L. Braude : Ueber die Kurven, unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden. — P. Ernst : Die allgemeine Mannheimsche Kurve. — J. Plemelj : Die Grenzkreis-Uniformisierung analytischer Gebilde. — Die Unlösbarkeit von $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ im Körper $k\sqrt{5}$. — Die Siebenteilung des Kreises. — G. Hamel : Stabilität und Partikularlösungen linearer Differentialgleichungen. — R. König : Ueber die quadratischen Formen mit rationalen Funktionen als Koeffizienten. — A. Kanda : Zum Artikel « Lineale Erzeugung » im XXII. Jahrg.

## 2. Livres nouveaux :

**Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1913.** Avec des notices scientifiques. — 1 vol. in-16, 800 pages ; 1 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

E. Barbette. — **Les carrés magiques du $m^{ième}$ ordre.** — 1 vol autographié in-8o, de 244 p. ; 7 fr. 50 ; A. Pholien, Liège.

E. Barbette. — **Les piles merveilleuses.** — 1 fasc. autographié in-8o, de 16 p. ; A. Pholien, Liège.

E. Bardey. — **Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis,** herausgegeben von Dr. W. Lietzmann. — Reformausgabe A : für Gymnasien ; Reformausgabe B : für Realanstalten. I. Teil : Unterstufe. — 2 vol. in-8o, VI-202 p. et VI-220 p ; 2 M. par vol. ; B. G. Teubner, Leipzig.

St. A.-F. de Bouffal. — **Deuxième démonstration complète du grand théorème de Fermat.** — 1 broch. in-8o, 8 p. ; Imprimerie scientifique, Varsovie.

E. Fabry, — **Problèmes d'Analyse mathématique.** — 1 vol. in-8o, 460 p. ; 12 fr. ; A. Hermann & fils, Paris.

A. Guillemin. — **Table de Logarithmes** à 3 quatrades et nombres correspondants avec 12-13 chiffres. — 1 vol. in-8°, XXIII-125 p.; Gauthier-Villars, Paris.

E.-A. Hintikka. — **Ueber das Verhalten der Abbildungsfunktion auf dem Rande des Bereiches in der konformen Abbildung** Thèse, Helsingfors. — 1 fasc. in-4°, VIII-36 p.; Druckerei der Finnischen Litteratur-Gesellschaft, Helsingfors.

C. de Jans. — **Les multiplicatrices de Clairaut.** Contribution à la théorie d'une famille de courbes planes. — 1 vol. in-8°, IV-136 p.; 5 fr.; Ad. Hoste, Gand.

E. Müller. — **Das Abbildungsprinzip.** — Antrittsrede des für das Jahr 1912-1913 gewählten Rektors der K. K. Technischen Hochschule in Wien. — 1 fasc. in-8°, 29 p.; Verlag der K. K. Technischen Hochschule, Vienne.

E. Müller. — **Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen.** Zweiter Band. Erstes Heft. — 1 vol. in-8°, VII-130 p.; 4 M.40; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Padoa. — **La logique déductive dans sa dernière phase de développement.** Avec une préface de G. Peano. — 1 vol. in-8°, 106 p.; 3 fr. 25; Gauthier-Villars, Paris.

J. Perry. — **Mécanique appliquée** à l'usage des élèves qui peuvent travailler expérimentalement et faire des exercices numériques et graphiques. Ouvrage traduit sur la neuvième édition anglaise par E. Davaux. Avec des additions et un appendice sur la mécanique des corps déformables par E. Cosserat et F. Cosserat. *Tome premier :* L'énergie mécanique. — 1 vol. in-8°, VIII-399 p; 10 fr.; A. Hermann & fils, Paris.

J. Pionchon. — **Notice sur la vie et les travaux de Charles Méray.** — 1 vol. in-8°, 159 p.; L. Marchal, Dijon.

M. Tikhomandritsky. — **Eléments de la théorie des Intégrales abéliennes.** Nouvelle édition. — 1 vol. in-8°, XVI-287 p.; 14 fr.; A. Böhnke, St-Pétersbourg.

V. Volterra. — **Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles.** — 1 vol. in-4°, 82 p.; nouveau tirage, A. Hermann & fils, Paris.

**Schriften des deutschen Ausschusses** für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. *Heft 15.* — Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den preussischen Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten nach der Neuordnung von 1908. — Im Auftrage des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, bearbeitet von F. Möhle. — 1 fasc. in-8°, IV-48 p.; B. G. Teubner, Leipzig.

**B. G. Teubner's Verlagskatalog** auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik, nebst Grenzwissenschaften (April 1908 bis Juli 1912). — 1 vol. in-8°, LXXXVII-231 p., avec 4 planches; B. G. Teubner, Leipzig.

# THE PRINCIPLES OF MATHEMATICS IN RELATION TO ELEMENTARY TEACHING [1]

By A. N. Whitehead, Sc. D., F. R. S., University College, London.

---

We are concerned not with the advanced teaching of a few specialist mathematical students, but with the mathematical education of the majority of boys in our secondary schools. Again these boys must be divided into two sections; one section consists of those who desire to restrict their mathematical education, the other section is made up of those who will require some mathematical training for their subsequent professional careers, either in the form of definitive mathematical results or in the form of mathematically trained minds.

I shall call the latter of these two sections the mathematical section, and the former the non-mathematical section. But I must repeat that by the mathematical section is meant that large number of boys who desire to learn more than the minimum amount of mathematics. Furthermore most of my remarks about these sections of boys apply also to elementary classes of our university students.

The subject of this paper is the investigation of the place which should be occupied by modern investigations respecting Mathematical Principles in the education of both of these sections of schoolboys.

To find a foothold from which to start the enquiry, let us ask, why the non-mathematical section should be taught any mathematics at all beyond the barest elements of arithmetic. What are the qualities of mind which a mathematical training is designed to produce when it is employed as an element in a liberal education?

My answer, which applies equally to both sections of students,

---

[1] Conférence présentée à la Section IV (Philosophie et enseignement) du 5e Congrès international des mathématiciens. Cambridge, août 1912.

is that there are two allied forms of mental discipline which should be acquired by a well designed mathematical course. These two forms though closely allied are perfectly distinct.

The first form of discipline is not in its essence logical at all. It is the power of clearly grasping abstract ideas, and of relating them to particular circumstances. In other words, the first use of mathematics is to strengthen the power of abstract thought. I repeat that in its essence this has nothing to do with logic, though as a matter of fact a logical discipline is the best method of producing the desired effect. It is not the philosophical theory of abstract ideas which is to be acquired, but the habit and the power of using them. Now there is one and only one way of acquiring the habit and the power of using anything, that is by the simple commonplace method of habitually using it. There is no other short cut. If in education we desire to produce a certain conformation of mind, we must day by day, and year by year, accustom the students' minds to grow into the desired structural shape. Thus to teach the power of grasping abstract ideas and the habit of using them, we must select a group of such ideas, which are important and are also easy to think about because they are clear and definite.

The fundamental mathematical truths concerning Geometry, Ratio, Quantity, and Number, satisfy these conditions as do no others. Hence the fundamental universal position held by mathematics as an element of a liberal education.

But what are the Fundamental Mathematical truths concerning Geometry, Quantity and Number? At this point we come to the great question of the relation between the modern science of the Principles of Mathematics and a Mathematical Education.

My answer to the question as to these Fundamental Mathematical truths is that, in any absolute sense, there are none. There is no unique small body of independent primitive unproved propositions which are the necessary starting-points of all mathematical reasoning on these subjects. In mathematical reasoning the only absolute necessary presuppositions are those which make logical deduction possible. Between these absolute logical truths and so-called Fundamental truths concerning Geometry, Quantity and Number, there is a whole new world of mathematical subjects concerning the logic of propositions, of classes, and of relations. But this subject is too abstract to form an elementary training ground in the difficult art of abstract thought.

It is for this reason that we have to make a compromise and start from such obvious general ideas as naturally occur to all men when they perceive objects with their senses.

In Geometry, the ideas elaborated by the Greeks and presented by Euclid are, roughly speaking, those adapted for our purpose.

namely, ideas of volumes, surfaces, lines, of straightness and of curvature, of intersection and of congruence, of greater and less, of similarity, shape, and scale. In fact, we use in education those general ideas of spatial properties which must be habitually present in the mind of anyone who is to observe the world of phenomena with understanding.

Thus we come back to Plato's opinion that for a liberal education, Geometry, as he knew it, is the queen of sciences.

In addition to Geometry, there remain the ideas of quantity, ratio, and of number. This in practice means Elementary Algebra. Here the prominent ideas are those of "any number", in other words, the use of the familiar $x$, $y$, $z$, and of the dependence of variables on each other, or otherwise, the idea of functionality. All this is to be gradually acquired by the continual use of the very simplest functions which we can devise, of linear functions, graphically represented by straight lines, of quadratic functions graphically represented by parabolas, and of those simple implicit functions graphically represented by conic sections. Thence, with good fortune and a willing class, we can advance to the ideas of rates of increase, still confining ourselves to the simplest possible cases.

I wish here emphatically to remind you that both in Geometry and in Algebra a clear grasp of these general ideas is not what the pupil starts from, it is the goal at which he is to arrive. The method of progression is continual practice in the consideration of the simplest particular cases, and the goal is not philosophical analysis but the power of use.

But how is he to practise himself in their use. He cannot simply sit down and think of the relation $y = x + 1$, he must employ it in some simple obvious way.

This brings us to the second power of mind which is to be produced by a mathematical training, namely, the power of logical reasoning. Here again, it is not the knowledge of the philosophy of logic which it is essential to teach, but the habit of thinking logically. By logic, I mean deductive logic.

Deductive logic is the science of certain relations, such as implication, etc., between general ideas. When logic begins, definite particular individual things have been banished. I cannot relate logically this thing to that thing, for example this pen to that pen, except by the indirect way of relating some general idea which applies to this pen to some general idea which applies to that pen. And the individualities of the two pens is quite irrelevant to the logical process. This process is entirely concerned with the two general ideas. Thus the practice of logic is a certain way of employing the mind in the consideration of such ideas; and an elementary mathematical training is in fact nothing else

but the logical use of the general ideas respecting Geometry and Algebra which we have enumerated above. It has therefore, as I started this paper by stating, a double advantage. It makes the mind capable of abstract thought, and it achieves this object by training the mind in the most important kind of abstract thought, namely, deductive logic.

I may remind you that other choices of a type of abstract thought might be made. We might train the children to contemplate directly the beauty of abstract moral ideas, in the hope of making them religious mystics. The general practice of education has decided in favour of logic, as exemplified in elementary mathematics.

We have now to answer the further question, what is the *rôle* of Logical Precision in the Teaching of Mathematics? Our general answer to the implied question is obvious, Logical Precision is one of the two objects of the teaching of mathematics, and it is the only weapon by which the teaching of mathematics can achieve its other object. To teach mathematics is to teach logical precision. A mathematical teacher who has not taught that has taught nothing.

But having stated this thesis in this unqualified way, its meaning must be carefully explained; for otherwise its real bearing on the problem of education will be entirely misunderstood.

Logical precision is the faculty to be acquired. It is the quality of mind which it is the object of the teaching to impart. Thus the habit of reading great literature is the goal at which a literary education aims. But we do not expect a child to start its first lesson by reading for itself Shakespeare. We recognize that reading is impossible till the pupil has learnt its alphabet and can spell, and then we start it with books of one syllable.

In the same way, a mathematical education should grow in logical precision. It is folly to expect the same careful logical analysis at the commencement of the training as would be appropriate at the end. It is an entire misconception of my thesis to construe it as meaning that a mathematical training should assume in the pupil a power of concentrated logical thought. My thesis is in fact the exact opposite, namely that this power cannot be assumed, and has got to be acquired, and that a mathematical training is nothing else than the process of acquiring it. My whole groundwork of assumption is that this power does not initially exist in a fully developed state. Of course like every other power which is acquired, it must be developed gradually.

The various stages of development must be guided by the judgment and the genius of the teacher. But what is essential is, that the teacher should keep clearly in his mind that it is just this power of logical precise reasoning which is the whole object

of his efforts. If his pupils have in any measure gained this, they have gained all.

We have not yet however fully considered this part of our subject. Logical precision is the full realization of the steps of the argument. But what are the steps of the argument? The full statement of all the steps is far too elaborate and difficult an operation to be introduced into the mathematical reasoning of an educational curriculum. Such a statement involves the introduction of abstract logical ideas which are very difficult to grasp because there is so rarely any need to make them explicit in ordinary thought. They are therefore not a fit subject-ground for an elementary education.

I do not think that it is possible to draw any theoretical line between those logical steps which form a theoretically full logical investigation, and those which are full enough for most practical purposes, including that of education. The question is one of psychology, to be solved by a process of experiment. The object to be attained is to gain that amount of logical alertness which will enable its possessors to detect fallacy and to know the types of sound logical deduction. The objects of going further are partly philosophical, and also partly to lay bare abstract ideas whose investigation is in itself important. But both these objects are foreign to education.

My own opinion is that, on the whole, the type of logical precision handed down to us by the Greek mathematicians is roughly speaking what we want. In Geometry, this means the sort of precision which we find in Euclid. I do not mean that we should use his famous *Elements* as a textbook, nor that here and there a certain compression in his mode of exposition is not advisable.

All this is mere detail. What I do mean is that the sort of logical transition which he made explicit, we should make explicit, and that the sort of transition which he omits, we should omit.

I doubt however whether it is desirable to plunge the student into the full rigour of Euclidean Geometry without some mitigation. It is for this reason that the modern habit, at least in England, of laying great stress, in the initial stages, on training the pupil in simple constructions from numerical data is to be praised. It means that after a slight amount of reasoning on the Euclidean basis of accuracy, the mind of the learner is relieved by doing the things in various special cases, and noting by rough measurements that the desired results are actually attained. It is important however that the measurements be not mistaken for the proofs. Their object is to make the beginner apprehend what the abstract ideas really mean.

Again in algebra, the notation and the practical use of the symbols should be acquired in the simplest cases, and the more

theoretical treatment of the symbolism reserved to a suitable later stage. In fact my rule would be initially to learn the meaning of the ideas by a crude practice in simple ways, and to refine the logical procedure in preparation for an advance to greater generality. In fact the thesis of my paper can be put in another way thus, the object of a mathematical education is to acquire the powers of analysis, of generalization, and of reasoning. The two processes of analysis and generalization were in my previous statement put together as the power of grasping abstract ideas.

But in order to analyse and to generalize, we must commence with the crude material of ideas which are to be analysed and generalized. Accordingly it is a positive error in education to start with the ultimate products of this process, namely the ideas in their refined analysed and generalized forms. We are thereby skipping an important part of the training, which is to take the ideas as they actually exist in the child's mind, and to exercise the child in the difficult art of civilizing them and clothing them.

The schoolmaster is in fact a missionary, the savages are the ideas in the child's mind; and the missionary shirks his main task if he refuse to risk his body among the cannibals.

At this point I should like to turn your attention to those pupils forming the mathematical section. There is an idea, widely prevalent, that it is possible to teach mathematics of a relatively advanced type — such as differential calculus, for instance — in a way useful to physicists and engineers without any attention to its logic or its theory.

This seems to me to be a profound mistake. It implies that a merely mechanical knowledge without understanding of ways of arriving at mathematical results is useful in applied science. It seems to me to be of no use whatever. The results themselves can all be found stated in the appropriate pocket-books and in other elementary works of reference. No one when applying a result need bother himself as to why it is true. He accepts it and applies it. What is of supreme importance in physics and in engineering is a mathematically trained mind, and such a mind can only be acquired by a proper mathematical discipline.

I fully admit that the proper way to start such a subject as the Differential Calculus is to plunge quickly into the use of the notation in a few absurdly simple cases, with a crude explanation of the idea of rates of increase. The notation as thus known can then be used by the lecturers in the Physical and Engineering Laboratories. But the mathematical training of the applied scientists consists in making these ideas precise and the proofs accurate.

I hope that the thesis of this paper respecting the position of

logical precision in the teaching of mathematics has been rendered plain. The habit of logical precision with its necessary concentration of thought upon abstract ideas is not wholly possible in the initial stages of learning. It is the ideal at which the teacher should aim. Also logical precision, in the sense of logical explicitness, is not an absolute thing: it is an affair of more or less. Accordingly the quantity of explicitness to be introduced at each stage of progress must depend upon the practical judgment of the teacher. Lastly, in a sense, the instructed mind is less explicit; for it travels more quickly over a well-remembered path, and may save the trouble of putting into words trains of thought which are very obvious to it. But on the other hand it atones for this rapidity by a concentration on every subtle point where a fallacy can lurk. The habit of logical precision is the instinct for the subtle difficulty.

---

**Résumé.** — Le rapport ci-dessus traite de la place à donner aux recherches mathématiques modernes dans les écoles secondaires anglaises et principalement pour l'ensemble des jeunes gens qui désirent réduire leur éducation mathématique au minimum, section non-mathématique, par opposition à la section mathématique, qui comprendrait ceux qui recherchent des connaissances ou un développement mathématique plus complet.

M. Whitehead prend comme point de départ les questions suivantes : Pourquoi, à part l'arithmétique la plus élémentaire, enseignerait-on des mathématiques à la section non-mathématique ? Quelles sont les qualités de l'esprit qu'une éducation mathématique est destinée à former lorsqu'elle est considérée comme un élément dans une éducation générale ?

Pour y répondre, M. Whitehead considère les deux résultats vers lesquels doit tendre l'éducation mathématique. Premièrement développer la *faculté d'abstraction*, ce qui n'est possible qu'en l'appliquant à des groupes d'idées qui s'y prêtent, tels que : en première ligne les principes fondamentaux relatifs à la géométrie, aux proportions, aux notions de quantité, de nombre. Ceci au début dans des cas particuliers très simples et pour des idées générales évidentes pour tous.

La deuxième faculté mentale à développer est la *faculté de raisonnement logique* (logique déductive). Enseigner les mathématiques doit être enseigner la précision logique. Cette précision est non seulement un but pour elle-même, mais aussi l'instrument qui permet d'atteindre à la faculté d'abstraction.

Quant au degré de précision logique à rechercher, M. Whitehead estime qu'elle est approximativement celle des mathémati-

ciens grecs, mais qu'il ne faut pas oublier qu'elle doit être obtenue par approximations successives et qu'elle est le but et non le point de départ de l'enseignement.

Au sujet de la section mathématique et principalement des futurs physiciens et ingénieurs, il estime que l'éducation mathématique doit donner des notions précises avec leurs démonstrations exactes et ne pas se contenter de procédés appliqués mécaniquement.

*(La Rédaction.)*

---

# SUR LA CLASSIFICATION ET LA CONSTRUCTION

DES

# COURBES TRANSCENDANTES

---

1. Au sujet de mon article *Courbes transcendantes et interscendantes*, paru dans l'*Enseignement Mathématique* (mai 1912, pp. 209-214), M. Gino Loria a fait, dans le numéro suivant (pp. 291-293), quelques remarques dont l'importance n'échappera à aucune des personnes qui s'occupent des courbes particulières.

Jusqu'à présent, en effet, les courbes interscendantes n'avaient été citées qu'en passant par quelques auteurs, et leur topologie, ainsi que l'écrit M. G. Loria est toute à faire. Ce que l'on en avait dit de plus intéressant peut se résumer dans ces brèves et précises considérations d'Euler :

«.... De là naît la première espèce et comme la plus simple des « courbes transcendantes ; ce sont celles dont l'équation renferme « des exposants irrationnels. Comme il n'entre dans leur expression « ni logarithmes, ni arcs de cercles et qu'elles proviennent de « la seule considération des nombres irrationnels, elles paraissent « en quelque sorte appartenir à la Géométrie ordinaire ; et c'est « pour cette raison que Leibniz les a appelées *interscendantes*, « comme si elles tenaient un certain milieu entre les courbes algébriques et les courbes transcendantes.

« On aura donc une courbe interscendante dans celle qui est « exprimée par l'équation $y = x^{\sqrt{2}}$... Si nous nous contentons « de prendre seulement une valeur approchée de $\sqrt{2}$ en mettant « à sa place quelques-unes des fractions $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$ qui expriment à peu près la valeur de $\sqrt{2}$, nous aurons bien à la vé-

« rité des courbes algébriques qui approcheront de se confondre « avec celle qu'on demande... Cette courbe est censée d'ordre in- « fini... Si nous voulions construire exactement cette courbe, nous « ne pourrions le faire sans le secours des logarithmes.... On « pourra donc de cette manière calculer les appliquées[1] correspon- « dantes à chaque abscisse pourvu qu'on attribue à l'abscisse $x$ « des valeurs positives. Mais si l'abcisse $x$ obtient des valeurs « négatives, il sera alors difficile de dire si celles de $y$ seront « réelles ou imaginaires ; car soit $x = -1$ ; que signifiera $(-1)^{\sqrt{2}}$ ? « C'est ce qu'on ne peut savoir parce que les valeurs qu'on peut « trouver pour $\sqrt{2}$ ne sont ici d'aucun secours... »[2]

C'est pourquoi j'avais cru devoir appeler l'attention des lecteurs de l'*Enseignement Mathématique* sur cette catégorie des courbes transcendantes particulières, et je remercie M. Gino Loria d'avoir bien voulu me prêter, en m'approuvant, un appui que la haute compétence de ce géomètre dans toutes les questions relatives aux courbes rend précieux. A la fin de son article, M. Loria fait observer qu'il existe une profonde différence entre la topologie des paraboles interscendantes et celle des paraboles algébriques ; cette réflexion m'a amené à développer les considérations suivantes, qui se rattachent à la classification rationnelle des courbes transcendantes.

2. — La courbe

$$y = x^{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

étant supposée construite, des transformations géométriques simples permettent de construire à partir d'elle d'autres courbes interscendantes ; c'est ainsi que la courbe

$$y = x + x^{\sqrt{2}}$$

qui fut considérée par Cramer[3] est la diamétrale d'une ligne droite et d'une courbe semblable à la courbe (1) ; une transformation simple permettra de même de construire à partir de la courbe (1), la courbe d'équation

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}}\left(ax^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ax^{\sqrt{2}}}\right) \qquad (2)$$

citée par M. Loria et par moi-même dans nos articles. Mais l'étude

---

[1] « Les ordonnées ».

[2] Introduction à l'analyse infinitésimale, tr. par Labey, Paris 1797, t. II, p. 288.

[3] Gino Loria, *Spezielle Algebraische und transzendente ebene Kurven....* t. II, p. 1. — G. Cramer : *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1750, p. 8 ; cet auteur se borne d'ailleurs à rappeler la définition des courbes interscendantes de Leibniz et à citer l'exemple en question, sans entrer dans aucun développement à son sujet.

de la courbe d'équation

$$y = x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{3}} \tag{3}$$

serait autrement compliquée puisque cette courbe (3) est la diamétrale de deux paraboles interscendantes distinctes :

$$2y = x^{\sqrt{2}}\ ; \qquad 2y = x^{\sqrt{3}}\ ;$$

pour construire la courbe (2), il suffit de développer $\sqrt{2} + 1$ et $\sqrt{2} - 1$ en fractions continues et d'examiner les deux familles de courbes algébriques qui correspondent aux réduites de rang pair et à celles de rang impair : les réduites choisies, à chaque opération, pour représenter les deux nombres $\sqrt{2} + 1$ et $\sqrt{2} - 1$ seront liées l'une à l'autre, leur différence devant être rigoureusement égale à 2. En ce qui concerne la courbe (3), au contraire, on devra développer séparément $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ en fractions continues ; aucune relation ne pourra être imposée *a priori* aux réduites choisies pour représenter les deux nombres irrationnels ; à une réduite déterminée de $\sqrt{2}$ on sera libre, par exemple, d'associer plusieurs réduites de $\sqrt{3}$. En d'autres termes, la complexité de la discussion de la courbe (3) est double de celle de la discussion de la courbe (2).

Il serait possible de former des exemples de courbes interscendantes dont la discussion serait ainsi de plus en plus compliquée et exigerait la connaissance de 3, 4,... $n$ paraboles interscendantes particulières : il suffirait de considérer les courbes

$$y = x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{3}} + x^{\pi},$$

$$y = x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{3}} + x^{\pi} + x^{e}, \ \ldots$$

Ces exemples prouvent qu'il est possible en une certaine mesure de se rendre compte *a priori* du degré de complexité de la discussion d'une courbe interscendante d'équation

$$y = \sum x^{m_i} \tag{4}$$

les $m_i$ étant des nombres irrationnels : ce degré de complexité serait égal au nombre de paraboles interscendantes distinctes dont l'étude préalable serait nécessaire pour aborder celle de la courbe (4). Il y a lieu de préciser, de présenter la question sous une forme plus générale et de donner du degré de complexité une définition mathématique.

3. — La classification des courbes transcendantes planes particulières a depuis longtemps préoccupé les géomètres. Euler

signalait déjà « le nombre des courbes transcendantes comme bien plus considérable que celui des courbes algébriques » (*loc. cit.*, p. 287). Depuis 1748, le nombre des courbes transcendantes ayant fait l'objet de recherches spéciales, est allé en grandissant constamment; sans citer la théorie des fonctions, les Sciences appliquées les plus diverses ont mis en évidence des propriétés de bien des courbes transcendantes plus ou moins curieuses. Les équations des courbes transcendantes présentent d'autre part des différences telles qu'il n'en résulte de prime abord aucun principe de classification. Quelle que soit son importance par ailleurs, la Géométrie intrinsèque d'E. Cesaro est absolument insuffisante pour une classification tant soit peu générale. S'inspirant de certains travaux de Chasles, de Fouret et de Clebsch-Lindemann, M. Gino Loria[1] a étudié sous le nom de *courbes panalgébriques,* les courbes transcendantes qui vérifient une équation différentielle du premier ordre, algébrique en $x$, $y$, $y' = \frac{dy}{dx}$ (coordonnées cartésiennes ordinaires).

A la page 11 de son ouvrage magistral, M. Gino Loria se borne à indiquer en quelques lignes quel serait le principe d'une classification rationnelle des courbes transcendantes particulières. La 1re classe contiendrait les courbes transcendantes telles que les points de contact des tangentes issues d'un point quelconque soient situés sur une courbe algébrique (courbes panalgébriques); la deuxième classe contiendrait les courbes qui se déduisent des courbes panalgébriques, comme celles-ci se déduisent des courbes algébriques;... et ainsi de suite. Le nombre des courbes transcendantes qui ne sont pas panalgébriques est si restreint que M. Gino Loria ne croit pas devoir insister au sujet de leur classification. Mais pour préciser ce que je dis ci-dessus à propos de la construction des courbes interscendantes, je suis obligé d'entrer dans plus de détails qu'il ne l'a fait lui-même.

Soit une courbe transcendante (C) rapportée à des axes de coordonnées $Ox$ $Oy$; soient $y'$, $y''$, ... $y^{(n)}$ les dérivées successives de l'ordonnée $y$ par rapport à l'abscisse $x$. Observons tout d'abord que si la courbe (C) est une intégrale particulière d'une équation différentielle algébrique, il existe une infinité d'équations différentielles algébriques qui admettent cette courbe (C) pour intégrale particulière : il suffit de dériver l'équation primitive pour former de nouvelles équations de cette nature.

Une courbe panalgébrique ne peut être intégrale que d'une seule équation différentielle du premier ordre, algébrique en $x$, $y$, $y'$ : en éliminant, en effet, $y'$ entre deux équations de ce type, on obtient une relation algébrique entre $x$ et $y$. De même,

[1] Spezielle ebene..., II, p. 2-11.

une courbe transcendante qui n'est pas panalgébrique ne peut satisfaire à deux équations différentielles, algébriques et du second ordre : il suffirait d'éliminer $y''$ entre elles pour arriver à un résultat contraire à l'hypothèse faite sur la courbe. D'une façon générale, considérons une courbe (C) intégrale commune de deux équations différentielles, algébriques et de même ordre $n$ : l'élimination de la dérivée $y^{(n)}$, entre ces deux équations, conduit à une équation d'ordre $n-1$ au plus. En d'autres termes, si une courbe transcendante satisfait à une ou plusieurs équations différentielles algébriques, il est certain que, parmi les équations, en nombre infini, de cette nature, auxquelles elle satisfait, il en existe une d'ordre minimum $\omega$, *et que cette équation d'ordre minimum $\omega$ est unique.*

La détermination de cette équation d'ordre minimum peut être faite par des calculs élémentaires de dérivations et d'éliminations lorsqu'on connaît deux équations différentielles algébriques indépendantes satisfaites par la courbe (C). J'entends par équations indépendantes deux équations telles que celle de degré supérieur ne soit pas une conséquence de celle de degré moindre. Soient deux équations d'ordres respectifs $m$ et $n$ avec $m < n$ et que je suppose indépendantes ; en dérivant $n-m$ fois l'équation d'ordre moindre $m$ et en éliminant ensuite $y^{(n)}$ entre l'équation obtenue et l'équation donnée d'ordre $n$, je remplace cette dernière par une équation d'ordre inférieur $n_1$. En opérant de même sur les équations d'ordre $m$ et $n_1$, je remplace celle des deux qui est d'ordre le plus grand par une équation d'ordre inférieur, et ainsi de suite. Après un nombre limité d'opérations, je serai finalement conduit au système suivant : l'équation d'ordre minimum précédemment définie et une identité.

Tout ce qui précède est entièrement analogue à ce qui se passe pour les équations algébriques et les nombres irrationnels. Étant donné un nombre irrationnel algébrique, il existe une équation algébrique, irréductible et unique qui l'admet pour racine ; toute autre équation algébrique qui admet le nombre pour racine est décomposable en un système d'équations irréductibles, parmi lesquelles se trouve celle qui admet le nombre pour racine.

La classification indiquée par M. Gino Loria consiste précisément à adopter pour élément fondamental le nombre entier, invariant pour les transformations algébriques du plan, qui représente l'ordre minimum $\omega$. Soit en effet

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(\omega)}) = 0,$$

l'équation différentielle algébrique d'ordre minimum attachée à une courbe transcendante (C). En posant $y' = p$, cette équation entraîne la relation

$$F(x, y, p, p', \dots p^{(\omega-1)}) = 0$$

d'ordre $\omega - 1$ pour les dérivées de la fonction $p(x)$. L'équation de la courbe (K) qui est le lieu des points de contact des tangentes qui passent par un point quelconque $(x_0, y_0)$ à une famille arbitraire et dépendant d'un paramètre de courbes (C) est d'autre part

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = p \ ;$$

cette courbe (K) est donc une courbe de la $(\omega - 1)^{me}$ famille.

4. — *Courbes hypertranscendantes.* De même que les nombres irrationnels se divisent en deux catégories, les nombres irrationnels algébriques et les nombres transcendants, de même les courbes transcendantes se divisent en deux catégories analogues : celles qui appartiennent à une famille d'ordre $\omega$ déterminé et celles qui ne satisfaisant à aucune équation différentielle algébrique ne rentrent dans aucune des familles de la classification de M. Loria. A ces dernières courbes, il convient de réserver le nom de *courbes hypertranscendantes,* en adoptant ainsi une dénomination usitée par M. Edmond Maillet[1] dans divers travaux sur les nombres et les fonctions. Qu'il existe des courbes hypertranscendantes, cela ne fait aucun doute *a priori.* La théorie des fonctions est telle que s'il n'est pas toujours possible de se prononcer sur l'existence d'une fonction satisfaisant à des conditions imposées, il est toutefois permis d'affirmer qu'il existe des fonctions qui n'y satisfont pas. Dans le cas présent, les fonctions continues sans dérivées donnent des exemples simples de courbes hypertranscendantes ; la courbe de Peano, celle d'Hilbert, les courbes citées dans le $18^{me}$ chapitre du second tome de l'ouvrage de M. Loria *(ausserordentlichen Kurven, crinkly curves)* sont des exemples bien connus. Mais il est inutile d'avoir recours à de telles courbes, auxquelles on pourrait même refuser le nom de courbes. Comme exemple remarquable d'une véritable courbe hypertranscendante, je citerai celui de la courbe hypergéométrique d'Euler[2]. En réponse à une question posée par Weierstrass, O. Hölder[3] a démontré, en effet, que la fonction eulérienne $\Gamma(x)$ ne vérifie aucune équation différentielle algébrique ; il en résulte que la courbe de Wallis[4] et la courbe binomiale de Quételet[3] sont aussi hypertranscendantes.

En considérant une famille, dépendant d'un paramètre, de

---

[1] *Sur les fonctions hypertranscendantes* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 2 avril 1906) — *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions.* 1906. (Note IV).

[2] Pour les renseignements bibliographiques sur la courbe hypergéométrique d'Euler, *cf. : Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven.* t. 2, p. 174.

[3] *Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu begnügen.* (Math. Ann., t. 28, 1887, pp. 1-13.)

[4] *Spezielle,* 2, p. 175.

courbes hypergéométriques d'EULER, de courbes de WALLIS, ou de courbes de QUÉTELET, le lieu des points de contact des tangentes à ces courbes issues d'un point quelconque du plan serait une nouvelle courbe hypertranscendante. Il est donc possible d'engendrer ainsi des familles en nombre infini de courbes hypertranscendantes. Voici d'ailleurs un autre exemple.

Ainsi que la démontré A. HURWITZ[1], la fonction définie par la série entière

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{27!} + \dots + \frac{x^n}{n^n!} + \dots$$

ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique et, par suite, cette fonction est représentée par une courbe hypertranscendante.

A côté des courbes hypertranscendantes, il convient de citer celles pour lesquelles il est impossible de déterminer $\omega$ ; c'est le cas de la parabole d'équation

$$y = x^{\mathrm{C}},$$

C désignant la constante d'EULER. Cette parabole est-elle algébrique ou interscendante et panalgébrique ? C'est là une question qui ne pourra être résolue que lorsqu'on saura si la constante d'EULER est un nombre rationnel ou un nombre irrationnel.

5. — *Exemples de courbes classées d'après leur ordre* $\omega$. Les courbes d'ordre $\omega = 0$ sont les courbes algébriques.

Les courbes d'ordre $\omega = 1$ sont les courbes panalgébriques de M. LORIA.

Les courbes d'ordre $\omega = 2$ comprennent : les courbes de LAMÉ et les spirales sinusoïdes lorsqu'elles sont interscendantes ; les spirales d'équation

$$\rho = \omega^n$$

lorsque l'exposant $n$ est irrationnel (lorsque $n$ est rationnel ces spirales dites algébriques sont des courbes panalgébriques) ; la chaînette de CORIOLIS et les lignes, plus générales, de MERCATOR-SUMNER ; les courbes de CESARO lorsqu'elles ne sont pas algébriques ; les courbes de RIBAUCOUR lorsqu'elles ne sont pas algébriques ou panalgébriques ; la courbe de MARIA-GAËTANA AGNESI $y = x^x$ ;

la courbe de HESSEL $y = x^{\frac{1}{x}}$ ;

la courbe d'EULER $x^y = y^x$ ;

[1] *Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algebrique* (Annales de l'École normale supérieure, 1889, [3], t. 6, p. 327).

certaines courbes dites hyperarithmétiques telles que la courbe

$$\log (y^2 + ay) = \sin (x^2 - bx)$$

citée par M. LORIA (II, p. 353) :
la courbe de G. BIDONE $y = e^{e^x}$;
la courbe de M. G. TEIXEIRA $\operatorname{ch} 2y - \operatorname{ch} 2x = \text{const}$;
les trajectoires orthogonales

$$\operatorname{tg} x = k \cdot \operatorname{th} y$$

des courbes précédentes ;
la courbe $e^x + e^y = 1$ ;
et les courbes de mortalité de QUIQUET, de GOMPEZ, d'EDMONS et de MAKEHAM ;
la courbe de SPRUGE $\sin r^2 \times \sin 2\theta = \text{const}$ ;
l'ogive de GALTON

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt , \qquad y = y_0 e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} ;$$

les deux courbes suivantes

$$y = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^m \times e^{-\frac{x}{a}} ,$$

$$x = a \operatorname{tang} \theta \qquad y = y_0 \cos^{2m} \theta \times e^{n\theta} ,$$

rencontrées par le même auteur, et qui sont panalgébriques ou d'ordre $\omega = 2$ suivant que $m$ est rationnel ou non ; la courbe étudiée par le même auteur

$$y = \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \times \left(1 + \frac{x}{a_2}\right)^{m_2}$$

qui est algébrique, panalgébrique ou d'ordre $\omega = 2$ suivant que les deux nombres $m_1$ et $m_2$ sont tous deux rationnels, que l'un d'eux seul est rationnel ou que tous deux sont irrationnels ; la courbe représentative de la fonction d'erreur

$$y = \int_0^x e^{-x^2} dx .$$

Les équations en coordonnées biangulaires permettent de donner de nombreux exemples de courbes d'ordre $\omega = 2$ : c'est le cas de la courbe d'équation biangulaire

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = 1 .$$

qui est représentée sous une forme inexacte à la page 122 des *Nouvelles Annales* de 1871.

Le nombre des courbes transcendantes d'ordre $\omega = 3$ est encore plus restreint ; je citerai la courbe de mortalité de GAUSS : la clothoïde et sa développée ; une courbe hyperarithmétique considérée par M. LORIA (p. 353) et dont l'équation est

$$y = x^{\operatorname{tang} x}.$$

Voici enfin des exemples de courbes d'ordre supérieur : les courbes :

$$y = x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}}}, \qquad y = e^{e^{e^{e^{x}}}};$$

la courbe de mortalité de LAZARUS :

$$y = s^{x} g_1^{c_1^x} g_2^{c_2^x} g_3^{c_3^x} \ldots g_n^{c_n^x};$$

ces trois exemples prouvent qu'il est possible de former simplement des équations de courbes transcendantes d'un ordre $\omega$ quelconque, imposé *a priori*.

6. — *Application à la construction des courbes interscendantes ou transcendantes.* Les paraboles interscendantes

$$y = x^m$$

sont panalgébriques.

Considérons les courbes interscendantes :

$$y = x^{m_1} + x^{m_2}; \tag{5}$$

de (5) résulte par dérivation

$$xy' = m_1 x^{m_1} + m_2 x^{m_2}$$

d'où

$$(m_1 - m_2) x^{m_1} = xy' - m_2 y,$$

$$(m_2 - m_1) x^{m_2} = xy' - m_1 y;$$

$m_1$ et $m_2$ étant irrationnels, $\alpha$ et $\beta$ entiers, la relation

$$(xy' - m_2 y)^{\alpha} \cdot (xy' - m_1 y)^{\beta} = \pm (m_1 - m_2)^{\alpha+\beta} x^{\alpha m_1 + \beta m_2}$$

prouve que la *courbe* (5) *est panalgébrique s'il existe entre* $m_1$ *et* $m_2$ *une relation linéaire à coefficients entiers.*

S'il n'en est pas ainsi, on devra dériver une seconde fois, et, en

éliminant $x^{m_1}$, $x^{m_2}$, on aura une équation différentielle algébrique

$$\begin{vmatrix} x^2 y'' & m_1(m_1 - 1) & m_2(m_2 - 1) \\ xy' & m_1 & m_2 \\ y & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

du second ordre; la courbe (5) sera donc de l'ordre $\omega = 2$.

Pour la courbe (2), les exposants $\sqrt{2} + 1$ et $\sqrt{2} - 1$ sont liés par une relation linéaire rationnelle : elle est donc certainement panalgébrique. L'équation différentielle algébrique du premier ordre dont elle est l'intégrale est celle qui est donnée à la page 210 de l'*Enseignement Mathématique* (1912).

Il en est de même des courbes de poursuite interscendantes

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{cx^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{1-m}}{c(m-1)}\right],$$

qui sont des courbes panalgébriques quel que soit le nombre irrationnel $m$.

La courbe (3) est au contraire de l'ordre $\omega = 2$ parce qu'il n'existe pas de relation rationnelle et linéaire entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

D'une façon générale, la courbe (4) sera d'un ordre égal au nombre des nombres irrationnels $m_i$ qui figurent dans son équation. Des relations entre ces exposants pourront réduire l'ordre $\omega$.

Il résulte de ces considérations que l'ordre $\omega$ peut être choisi pour représenter le degré de complexité dont il était question dans la seconde partie du présent article; elles valent pour les courbes transcendantes comme pour les courbes interscendantes.

Dans la construction point par point d'une courbe transcendante déterminée, d'ordre $\omega_0$, on devra s'attacher à effectuer les constructions avec des courbes particulières d'ordres au plus égaux à $\omega_0$.

Je prendrai comme exemple celui de la courbe d'ordre $\omega = 3$ définie par les équations

$$x = \int_{s_0}^{s} \cos\frac{1}{s^2}\,ds\,, \qquad (6)$$

$$y = \int_{s_0}^{s} \sin\frac{1}{s^2}\,ds\,;$$

son équation intrinsèque

$$R = \frac{s^3}{2}$$

prouve que c'est une pseudo-spirale de Pirondini particulière, pour laquelle la courbe de Mannheim est une parabole cubique; *c'est la développée de la clothoïde*[1]; il suffit d'ailleurs de poser $\frac{1}{s} = \mu$ et d'intégrer par parties pour avoir

$$x = 2\int_{\mu_0}^{\mu} \sin \mu^2 d\mu + \left|\frac{\cos \mu^2}{\mu}\right|_{\mu_0}^{\mu},$$

$$y = -2\int_{\mu_0}^{\mu} \cos \mu^2 d\mu + \left|\frac{\sin \mu^2}{\mu}\right|_{\mu_0}^{\mu},$$

équations qui sont identiques à celles de la développée de la clothoïde.

La courbe (6) peut donc être construite *tangente par tangente* à partir de la clothoïde. Mais les expressions qui précèdent prouvent en outre que cette courbe peut être construite *point par point* à partir de la clothoïde de même ordre $\omega = 3$ et d'une courbe pan-algébrique, le *lituus* de Cotes (qui est la *radiale* de la clothoïde) : la courbe (6) est en effet, le lieu des milieux de segments de droite limités à une clothoïde et à un *lituus*.

C'est là une curieuse construction du centre de courbure de la clothoïde, construction qui comporte en elle-même une vérification, puisque le centre de courbure et la normale peuvent être construits indépendamment l'un de l'autre.

É. Turrière (Poitiers).

[1] La développée de la clothoïde est représentée dans l'ouvrage de M. Loria (tome II, planche II, fig. 19).

# SUR LES SPIRALES LOGARITHMIQUES OSCULATRICES A UNE COURBE PLANE

1. — La théorie des développoïdes des courbes planes permet de donner une définition géométrique simple des courbes décrites sur les rayons de courbure d'une courbe comme diamètres. Soit (C) la courbe plane considérée; soient M un point courant de cette courbe (C) et $C_1$ le centre de courbure de (C) associé à M. Une droite $d$ issue de M et faisant avec la normale $MC_1$ un angle indépendant de la position de M sur la courbe (C) touche la développoïde (D) qu'elle enveloppe en un point D qui est la projection orthogonale de $C_1$ sur $d$. Le lieu des divers points D, ainsi associés à un même point M de (C) au moyen des droites $d$ issues de ce point M, est donc la circonférence ($\Omega$) de diamètre $MC_1$.

A chaque point M de la courbe (C) est ainsi associé un cercle ($\Omega$) qui est tangent à (C) en M. Lorsque M se déplace sur (C), le cercle ($\Omega$) enveloppe une courbe qui se décompose en la courbe (C) et en une nouvelle courbe (S); les points de contact M et S du cercle ($\Omega$) avec les deux parties de son enveloppe sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la tangente au centre $\omega$ de ($\Omega$) au lieu de ce point $\omega$.

Je me propose d'indiquer ici une construction simple et une définition géométrique curieuse du point S.

2. — La courbe (C) est définie comme enveloppée par la droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi,$$

$\varpi(\varphi)$ étant une certaine fonction de l'angle $\varphi$; $\varpi'$, $\varpi''$, $\varpi'''$ représentent les dérivées successives de cette fonction par rapport à $\varphi$.

Les coordonnées de M sont

$$x = \varpi \cos \varphi - \varpi' \sin \varphi,$$

$$y = \varpi \sin \varphi + \varpi' \cos \varphi;$$

les axes coordonnés étant rectangulaires, celles du centre de courbure $C_1$ sont

$$x_1 = -\varpi' \sin\varphi - \varpi'' \cos\varphi ;$$

$$y_1 = \varpi' \cos\varphi - \varpi'' \sin\varphi ;$$

le centre $\omega$ du cercle $\Omega$ a donc pour coordonnées

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\varpi - \varpi''}{2} \cos\varphi - \varpi' \sin\varphi , \\ y_0 = \varpi' \cos\varphi + \dfrac{\varpi - \varpi''}{2} \sin\varphi ; \end{cases}$$

d'où résultent les expressions :

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = -\frac{1}{2}\left[(\varpi + \varpi'')\sin\varphi + (\varpi' + \varpi''')\cos\varphi\right] ,$$

$$\frac{dy_0}{d\varphi} = \frac{1}{2}\left[(\varpi + \varpi'')\cos\varphi - (\varpi' + \varpi''')\sin\varphi\right] ;$$

je poserai

$$R = -(\varpi + \varpi'') ,$$

R désignant un nombre algébrique dont la valeur absolue est le rayon de courbure de (C) ; les expressions précédentes deviennent

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = \frac{1}{2}(R \sin\varphi + R' \cos\varphi) ;$$

$$\frac{dy_0}{d\varphi} = \frac{1}{2}(-R \cos\varphi + R' \sin\varphi) ;$$

la droite MS a donc pour coefficients directeurs

$$R\cos\varphi - R'\sin\varphi , \qquad R\sin\varphi + R'\cos\varphi ,$$

et son équation est

$$X(R\sin\varphi + R'\cos\varphi) + Y(-R\cos\varphi + R'\sin\varphi) = \varpi R' - R\varpi' ;$$

elle passe par le centre de courbure $C_2$ de la développée ($C_1$) correspondant au point $C_1$ de cette développée : les coordonnées de $C_2$ sont, en effet, données par les équations

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = -\varpi'' ,$$

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = -\varpi''' .$$

*Ainsi donc pour obtenir le point S, où le cercle $\Omega$ touche la se-*

*conde partie de son enveloppe, il suffit de projeter orthogonalement le centre de courbure de $C_1$ sur la droite $MC_2$ qui joint M au centre $C_2$ de courbure de la développée* ($C_1$).

3. — Supposons que la courbe (C) soit une développante de cercle; le point $C_2$ est alors un point fixe, centre de la développée ($C_1$) qui est un cercle; les points M et S sont inverses l'un de l'autre par rapport au cercle ($C_1$). La courbe (S) est donc la courbe inverse de la développante de cercle.

*D'où il résulte que la courbe* (S) *qui est associée à une développante de cercle est la spirale tractrice compliquée.*

4. — Proposons-nous de déterminer les cas où la courbe (S) dégénère en un point fixe. Soit O ce point fixe. Il faut que le cercle ($\Omega$) passe par O.

Le rayon de ce cercle étant $\frac{R}{2}$, il résulte des expressions des coordonnées de son centre $\omega$ que la condition nécessaire et suffisante pour que le cercle ($\Omega$) passe par un point fixe O est que la fonction $\varpi$ de $\varphi$ satisfasse à l'équation différentielle du second ordre

$$\varpi\varpi'' - \varpi'^2 = 0 ;$$

l'intégrale générale de cette équation est

$$\varpi = Ae^{m\varphi} ,$$

A et $m$ étant deux constantes arbitraires.

*Le seul cas de dégénérescence est donc celui pour lequel la courbe* (C) *est la spirale logarithmique.*

Le point S est alors fixe et coïncide avec le pôle de la spirale logarithmique.

5. — La remarque précédente nous amène à donner une nouvelle définition géométrique de la courbe (S).

Les spirales logarithmiques du plan $Oxy$ dépendent de quatre paramètres; en chaque point M d'une courbe (C) une spirale logarithmique ($\Sigma$) est osculatrice à (C); le contact entre les deux courbes est du troisième ordre; la courbe (C) n'est pas, en général, traversée par la spirale logarithmique.

Supposons la courbe rapportée à la tangente $Mx$ et à la normale $My$ au point M supposé non singulier; soit

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^3}{6P} + \cdots$$

le développement en série de l'ordonnée de la courbe (C).

Les coordonnées de $C_1$ sont :

$$x_1 = 0 , \qquad y_1 = R ;$$

celles de $C_2$ sont

$$x_2 = \frac{R^3}{P} \qquad y_2 = R \ ;$$

le point S projection de $C_1$ sur la droite $MC_2$ a donc pour coordonnées :

$$a = \frac{R^3 P}{R^4 + P^2}, \qquad b = \frac{RP^2}{R^4 + P^2}.$$

Ces mêmes résultats découlent d'ailleurs des calculs du 2°; le centre $C_1$ est défini comme intersection de deux droites

$$-x \sin\varphi + y \cos\varphi - \varpi' = 0,$$

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi + \varpi'' = 0 \ ;$$

la droite $C_1S$ a donc une équation de la forme

$$-x \sin\varphi + y \cos\varphi - \varpi' + \lambda(x \cos\varphi + y \sin\varphi + \varpi'') = 0 \ ;$$

cette droite devant être perpendiculaire à $MC_2$, on a

$$\lambda = \frac{R}{R'} \ ;$$

les coordonnées $a$, $b$ du point S sont alors données par le système d'équations :

$$\left\{ \begin{aligned} a \cos\varphi + b \sin\varphi - \varpi &= \frac{R^3}{R^2 + R'^2}, \\ -a \sin\varphi + b \cos\varphi - \varpi' &= \frac{R^2 R'}{R^2 + R'^2} \ ; \end{aligned} \right.$$

en prenant O pour origine et la tangente pour axe des $x$, c'est-à-dire en posant

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \varpi = 0, \qquad \varpi' = 0,$$

on a

$$a = -\frac{R^2 R'}{R^2 + R'^2} \qquad b = \frac{R^3}{R^2 + R'^2} \ ;$$

ces expressions ne sont autres que celles qui ont été indiquées antérieurement, puisque P a pour expression

$$P = -\frac{R^3}{R'}.$$

Considérons d'autre part la spirale $\Sigma$ osculatrice à $C$ en M.

Désignons par S son pôle, par $a$ et $b$ les coordonnées de ce pôle ; soit

$$\rho = \rho_0 e^{m\theta},$$

son équation par rapport à des axes issus du pôle S et parallèles aux axes (M$xy$). En écrivant que la spirale passe par M et touche M$x$, on obtient

$$m = -\frac{a}{b},$$

$$a^2 + b^2 = \rho_0^2 \exp.\left(2m \text{ arc tang } \frac{b}{a}\right) ;$$

l'équation de la spirale est donc

$$\frac{2a}{b} \text{ arc tang } \frac{bx - ay}{ax + by - a^2 - b^2} = \log \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2}{a^2 + b^2} ;$$

elle vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(ax + by - a^2 - b^2) + bx - ay = 0 ;$$

en dérivant cette équation deux fois, il vient pour $x = 0$, $y = 0$ :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{b}{a^2 + b^2}, \qquad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = \frac{ab}{(a^2 + b^2)^2} ;$$

pour exprimer que les courbes (C) et ($\Sigma$) ont à l'origine un contact du second ordre, il suffit d'identifier ces expressions avec les suivantes :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{R}, \qquad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = \frac{1}{P} ;$$

on obtient ainsi les expressions de $a$ et de $b$ :

$$a = \frac{R^3 P}{R^4 + P^2}, \qquad b = \frac{RP^2}{R^4 + P^2} ;$$

elles sont identiques à celles que l'on avait obtenues pour les coordonnées de la projection de $C_1$ sur $MC_2$.

*Le point* S *de contact du cercle* ($\Omega$) *avec son enveloppe est donc le pôle de la spirale logarithmique osculatrice en* M *à la courbe* (C).

*La courbe* (S) *enveloppe du cercle* ($\Omega$) *est le lieu des pôles des spirales osculatrices à la courbe* (C).

Lorsque (C) est algébrique, cette courbe (S) est nécessairement algébrique puisque elle est l'enveloppe des cercles ($\Omega$) ; si la courbe (C) est unicursale, il en est de même de la courbe (S). Il est remarquable de constater que des courbes transcendantes, les spirales logarithmiques osculatrices, permettent ainsi de faire correspondre une courbe algébrique à une courbe algébrique. Il

convient d'observer en outre que les courbes transcendantes osculatrices à des courbes données, algébriques ou non, n'ont donné lieu jusqu'ici à aucun mémoire. La théorie des *Spirales logarithmiques osculatrices à une courbe donnée* se présente cependant en Cinématique : la spirale logarithmique est en effet la courbe qui doit rouler sur une base rectiligne pour que son pôle engendre une roulette rectiligne ; ce cas se présente, en général, chaque fois qu'une base quelconque coupe la roulette imposée, elle-même quelconque. La roulette peut toujours être assimilée à une spirale logarithmique au voisinage du point d'intersection *(la spirale osculatrice)*, puisque les petits axes de la base et de la trajectoire imposée voisins du point d'intersection peuvent être remplacés par les éléments de tangentes aux deux courbes en ce point. (H. Bouasse et E. Turrière, *Exercices et compléments de Mathématiques générales*, § 263, p. 203.)

6. — Le cercle $\Omega$ enveloppe une courbe qui est constituée par l'ensemble des courbes (C) et (S). Peut-il y avoir réciprocité entre ces deux courbes ? en d'autres termes, la courbe (C) peut-elle correspondre à la courbe (S) comme celle-ci correspond à (C) ?

Pour qu'il y ait réciprocité entre les deux courbes, les points M et S étant homologues, il faut et il suffit que $\omega$ soit le milieu du rayon de courbure de la courbe (S). Il est donc nécessaire que les rayons de courbure en M et S de (C) et de (S) soient égaux.

Donnons-nous la courbe ($\omega$) lieu du point $\omega$; soient $x$, $y$ les coordonnées du point $\omega$, $s$ l'abscisse curviligne de ce point ; soient X, Y les coordonnées du point de contact M du cercle de centre $\omega$ et de rayon $\rho$ avec son enveloppe ; je poserai

$$X = x + \rho \cos(\varphi + \zeta) ,$$

$$Y = y + \rho \sin(\varphi + \zeta) ,$$

$\varphi$ étant l'angle qui repère la tangente de ($\omega$) et $\zeta$ celui qui repère le point M sur la circonférence et par rapport à la tangente à ($\omega$). Les coordonnées de (S) seront de la même forme à la seule différence que $\zeta$ sera changé en $-\zeta$. Ces angles $\zeta$ et $-\zeta$ sont donnés par l'équation

$$\cos\zeta = -\frac{d\rho}{ds} .$$

La droite $\omega$M touche son enveloppe en $C_1$ tel que

$$\omega C_1 = \lambda_1 = -\frac{\sin\zeta}{\varphi' + \zeta'} ;$$

la droite $\omega$S touche son enveloppe en $C_2$ tel que

$$\omega C_2 = \lambda_2 = +\frac{\sin\zeta}{\varphi' - \zeta'} ;$$

on doit écrire que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont égaux, d'où $\varphi' = 0$ : la courbe lieu de $\omega$ doit donc être une droite : les courbes (C) et (S) sont alors symétriques par rapport à cette droite et il est évident qu'il y a réciprocité entre elles. Quant à la nature de ces courbes, il suffit de remarquer que leur propriété caractéristique est que le rayon de courbure se trouve divisé en deux parties égales par une droite fixe ; d'après les propriétés des courbes de Ribaucour, les courbes (C) et (S) sont donc deux *cycloïdes ordinaires*.

Le résultat précédent peut être établi directement au moyen de considérations géométriques de la plus grande simplicité.

7. — La cycloïde intervient aussi dans la question suivante : *Déterminer la courbe* (C) *par la condition que la courbe* (S) *soit une ligne droite.*

Soit $Ox$ la droite imposée ; elle est simultanément le lieu des points (S) et l'enveloppe des cercles ($\Omega$) : on a donc

$$y + y_1 = R ;$$

on pourra soit former l'équation différentielle du second ordre

$$2yy'' = (1 + y'^2)(\sqrt{1 + y'^2} - 1)$$

qui s'intègre sans difficulté, soit former la relation

$$y = R \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

qui conduit à l'équation naturelle

$$R = (1 - \cos \varphi) \,.\, \text{constante.}$$

Quelle que soit la méthode suivie, les coordonnées $x$ et $y$ s'obtiennent sous les formes paramétriques suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= b + a\left[ -\theta + 2 \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right] \\ y &= a(1 - \cos \theta)^2 \ ; \end{aligned} \right.$$

cette courbe transcendante est une *développante de la cycloïde ordinaire* d'équations

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 &= \sin 2\theta - 2\theta \ , \\ 2y_1 &= 1 - \cos 2\theta \ ; \end{aligned} \right.$$

on peut d'ailleurs démontrer directement, sans aucun calcul et par de simples considérations d'angles, que le segment $C_1 C_2$ a son milieu sur $Ox$ et que, par conséquent, la courbe ($C_1$) est la cycloïde ordinaire.

É. Turrière (Poitiers).

---

# ARITHMÉTIQUE GÉNÉRALE

J'ai publié sous ce titre[1], en 1911, un livre dans lequel j'ai soutenu une thèse en complète opposition avec les idées qui ont aujourd'hui la vogue auprès des mathématiciens dans le domaine des nombres.

Depuis quelques dizaines d'années les Mathématiques ont été soumises à un travail considérable de critique et de revision, ayant pour but d'apporter plus de rigueur dans les fondements mêmes de la Science. Celle-ci est évidemment née du désir de l'homme d'étudier l'Univers, et de la nécessité pour lui de créer un instrument lui facilitant cette étude. Les premiers chercheurs ont créé cet instrument sans s'en rendre bien compte, en traçant sur le sable des figures représentant les corps de la nature. Les premiers rigoristes furent sans doute les Grecs qui essayèrent de définir les lignes dont ils se servaient avec un grand souci de précision. La Géométrie fut l'instrument de la Physique et de l'Astronomie ; l'Arithmétique fut l'instrument de la Géométrie.

Les modernes dans leur travail de revision et d'épuration se sont heurtés à des notions mal définies et à des faits indémontrés ; ils ont voulu définir les premières et démontrer les seconds ; mais, en Géométrie, au lieu de persévérer dans la voie indiquée par Leibniz, Gauss, Cauchy, qui cherchaient à donner une définition de la droite, figure idéale représentant l'image d'un fil parfaitement tendu, ils se sont arrêtés à un texte incompréhensible : une droite est une ligne homogène entièrement déterminée par deux quelconques de ses points *suffisamment rapprochés* (?)

En Arithmétique, ils ont créé des êtres de raison pure, auxquels ils ont donné le nom général de *nombres*, mais qui n'ont en commun que ce nom, et certaines règles dites *de calcul* suivant lesquelles il est permis de les combiner en vertu de conventions arbitraires. Ces nombres n'ont ainsi aucune signification philosophique, et cette arithmétique pompeusement appelée logique, n'est plus qu'un jeu conventionnel analogue au jeu d'échecs.

---

[1] Arithmétique générale. Nombres naturels, qualifiés, complexes, ternions et quaternions. — 1 vol. in-8°, XVII, 275 p.; 10 fr.; Hermann & fils, Paris.

En définitive, ce qui distingue la science moderne « logique » de la science ancienne « rationnelle », ce ne sont que les définitions, car les démonstrations des Grecs étaient souvent plus logiques, c'est-à-dire plus rigoureuses que bien des démonstrations de Legendre par exemple. Les définitions rationnelles sont des descriptions d'êtres idéaux, dits « géométriques », imaginés comme schèmes d'objets naturels ; ou des explications de concepts abstraits, conséquences de considérations relatives à ces êtres géométriques. Les définitions logiques sont des associations de mots et de symboles écrits, dont la création n'est pas explicable. De plus en plus, la science actuelle est nominaliste et formelle, et prétend se substituer à la science rationnelle et naturelle.

Les manuels classiques où la jeunesse puise ses premières connaissances scientifiques ont fait un compromis hybride entre les deux doctrines. Les notions fondamentales indispensables à tout enseignement sont rationnelles dans tout le domaine élémentaire ; et à mesure que l'étudiant s'élève dans la science, les notions nouvelles qu'on lui inculque prennent peu à peu la forme logicienne ou nominaliste. Ce qui fait qu'en fin de compte, arrivé à l'âge de raison, l'étudiant s'aperçoit que l'enseignement qu'il a reçu pendant les dernières années d'études a été en contradiction absolue avec ses connaissances premières.

A mon avis, il faut que, dès le début, on s'en tienne à une seule doctrine, qui soit définitive. Quand je dis, dès le début, je ne veux évidemment pas dire dès le berceau ; j'entends, dès l'instant que l'on expose à l'enfant des définitions, c'est-à-dire, dès qu'il est en état de comprendre et de raisonner juste.

Ainsi, l'arithmétique dite raisonnée devrait être enseignée en trois étapes : première année, les nombres entiers ; deuxième, les fractions ; troisième, les nombres incommensurables. Eh bien, si la théorie nominaliste est si merveilleuse, il faut qu'on l'enseigne, et que l'on dise aux jeunes gens de 14 ans : Un *nombre entier* est un signe d'écriture caractérisant la place qu'il occupe dans une suite de signes analogues, commençant par le caractère 1 et n'ayant pas de fin (DEDEKIND, VON HELMHOLTZ). On convient d'appeler *somme* des nombres entiers $a$ et $b$ le nombre entier qui correspond à $b$, si l'on fait correspondre 1 au nombre $a'$ qui suit immédiatement $a$, 2 au nombre $a''$ qui suit immédiatement $a'$, etc., sans omission ni répétition ; on représente ce nombre par le symbole $a + b$. On appelle *produit* de $a$ par $b$, la somme $a + a + a + \ldots + a$ obtenue en remplaçant les nombres entiers de 1 à $b$ inclusivement par des $a$ séparés par des signes $+$ ; on représente ce nombre par le symbole $a \times b$ ou $ab$ ; et ainsi de suite.

L'année suivante, on dira à ces jeunes gens qui auront 15 ans, une *fraction*, c'est un groupe $(a, b)$ d'un nombre entier $a$ et d'un

nombre entier $b$, auquel on associe l'ordre dans lequel on écrit ces nombres (TANNERY). On conviendra d'écrire $(a, b) = (c, d)$ si l'on a $a \times d = b \times c$.

On appelle *somme* de $(a, b)$ et $(c, d)$ le nombre $(ad + bc, bd)$ ; on appelle *produit* de ces nombres, le nombre $(ac, bd)$, et ainsi de suite.

Enfin, l'année suivante, on dira à ces mêmes jeunes gens, « toutes les fois qu'on a défini un moyen de ranger tous les nombres rationnels en deux[1] classes telles, que tout nombre de l'une soit moindre que tout nombre de l'autre, que dans la première il n'y ait aucun nombre plus grand que tous les autres nombres de la même classe, et dans la seconde aucun nombre moindre que tous les autres nombres de cette classe, on convient de dire qu'on a défini un *nombre incommensurable* (TANNERY). Si l'on désigne par $x$ une variable à laquelle on puisse donner comme valeur numérique tout nombre de la première classe, et par $y$ une variable à laquelle on puisse donner comme valeur numérique tout nombre de la seconde classe, on convient de représenter le nombre incommensurable ainsi défini par le symbole $x \mid y$ qui s'appelle une *coupure* entre les nombres $x$ et les nombres $y$. Deux nombres $x \mid y$ et $u \mid v$ sont dits *égaux*, si l'on a $x < v$ et $u < y$.

On appelle *somme* de $x \mid y$ et $u \mid v$ le nombre $(x + u) \mid (y + v)$ ; on démontre que ce symbole représente effectivement une coupure entre $(x + u)$ et $(y + v)$.

On appelle *produit* de $x \mid y$ par $u \mid v$ le nombre $xu \mid yv$ ; on démontre que ce symbole représente effectivement une coupure entre $x \, . \, u$ et $y \, . \, v$, etc.

Si un professeur de l'enseignement secondaire se sent une foi suffisante pour enseigner ces théories, qu'il le fasse donc. Il aura bien mérité de la LOGIQUE !

Pour ma part, je ne saurais me résoudre à faire de toute cette phraséologie la nourriture intellectuelle de mes élèves.

Mais comme il faut pourtant bien leur donner un cours d'arithmétique raisonnée, je préfère leur définir le nombre entier en leur expliquant l'idée qu'il représente; et de même pour la fraction, et le nombre incommensurable.

C'est donc là l'objet de mon « Arithmétique générale ». J'y ai traité par la même méthode les nombres relatifs, c'est-à-dire les nombres qualifiés positifs et négatifs, les nombres complexes, et les quaternions.

Lorsque plusieurs définitions également rationnelles se sont offertes à moi pour un même concept, j'ai chaque fois choisi la plus générale, c'est-à-dire celle qui pouvait s'appliquer à toutes

---

[1] On aura soin de faire remarquer que ce mot *deux et l'idée qu'il représente* n'ont rien de commun avec le caractère 2 qui suit 1 dans la suite immédiate des nombres entiers.

les catégories de nombres, jusques et y compris les quaternions. Ceux-ci m'ont donc constamment servi de critérium et de guide, et leur étude, préparée ainsi graduellement par l'étude des nombres des catégories précédentes, n'offre plus aucune difficulté au lecteur attentif.

La géométrie ayant historiquement et rationnellement servi de point de départ à l'arithmétique, c'est de la considération des grandeurs géométriques que j'ai tiré le concept de nombre. Pour des raisons que je ne veux pas discuter ici je n'ai considéré que la géométrie euclidienne.

Chacun sait exactement ou approximativement ce que l'on entend par mesurer une grandeur géométrique. Pour que cette opération soit possible, il faut que la grandeur à mesurer et l'étalon choisi pour la mesurer possèdent certaines propriétés que j'ai essayé de caractériser en définissant d'abord les grandeurs géométriques *homogènes*, puis les grandeurs *directement mesurables*. Telles qu'elles figurent dans mon livre, mes définitions sont sans doute fort abstraites, fort difficiles à comprendre. Mais comme ce sont principalement les objets qu'elles définissent qu'il importe de connaître pour saisir l'ensemble de ma méthode, je modifierai ici mon texte et je me bornerai à la définition suivante :

J'appelle *grandeur géométrique directement mesurable,* toute grandeur qui peut être engendrée par un élément géométrique animé d'un mouvement de translation, d'un mouvement de rotation, ou d'un mouvement hélicoïdal.

L'élément générateur, dans ses positions initiale et finale, détermine les extrémités de la grandeur. Toutes les grandeurs qui ne diffèrent que par l'amplitude du mouvement de l'élément générateur constituent une *classe* de grandeurs directement mesurables.

J'admettrai dans un cours d'arithmétique, que toute grandeur directement mesurable est divisible en parties égales, appartenant à la même classe, et que plusieurs grandeurs d'une même classe peuvent être placées bout à bout sur une même figure illimitée, engendrée par l'élément mobile, de telle sorte que ces grandeurs puissent être engendrées successivement par le mouvement continu de l'élément générateur.

Des segments de droite, des arcs d'une même circonférence, des rectangles de même hauteur, des angles de demi-droites, des angles dièdres, des fuseaux d'une même sphère, des arcs d'hélice de même pas et sur le même cylindre circulaire droit, etc., sont de telles grandeurs.

Les points que j'admets ici peuvent être démontrés dans un cours de géométrie, ou faire l'objet de postulats ; encore une fois, cela n'importe aucunement. Pour celui qui ne veut pas faire de l'arithmétique une science isolée, inutile au physicien, au géo-

mètre, à l'astronome, il n'y a aucun inconvénient à ce que les postulats de la géométrie (si postulats il y a) soient utilisés en arithmétique.

Ce n'est donc pas en acceptant ou en discutant les démonstrations que je donne de ces vérités dans mon livre, que l'on pourra conclure que ma théorie des nombres est à adopter ou à rejeter.

Cette remarque s'applique à toute la théorie des grandeurs directement mesurables : théorie que j'ai établie minutieusement et dont deux des principaux points sont :

I. *Des grandeurs d'une même classe ne sauraient être équivalentes sans être identiques.*

II. *Si l'on fait croître une grandeur* A *à partir d'un état initial* $A_0$ *d'après une loi quelconque et si l'on constate qu'elle reste toujours moindre qu'une grandeur* B *déterminée de sa classe, on doit en conclure qu'elle a une limite* C *inférieure ou égale à* B.

Je définis la somme, l'inégalité, la différence des grandeurs ; ainsi que les limites de grandeurs variables.

Tout cela constitue un travail préliminaire assez long et assez ardu. Je l'ai scindé en plusieurs parties, suivant les besoins des différentes catégories de nombres. Il est clair que dans un cours classique fait à de jeunes élèves, on peut supprimer presque toute cette théorie, en renvoyant aux propriétés des segments de droite et des arcs de circonférence, quitte à introduire ensuite graduellement, par des exemples occasionnels, les grandeurs moins simples qui se présenteront en géométrie.

Dans tout ce qui suit je ne parlerai que de grandeurs directement mesurables.

**Rapport de grandeurs.** — Si l'on considère des grandeurs $G_1$ et $G_2$ d'une classe (G), j'appelle *rapport de* $G_2$ *à* $G_1$, *la manière d'être de* $G_2$ *relativement à* $G_1$, et je représente cette notion par le symbole $\frac{G_2}{G_1}$.

(Cette conception du rapport est celle qu'en avait Duhamel. [Des méthodes dans les sciences de raisonnement, 2e partie, p. 72]. Malheureusement, lorsque j'ai écrit mon livre, je n'avais pas lu Duhamel, et je n'ai donc pas employé cette locution : *manière d'être* relative. N'ayant pas la subtilité d'esprit de ce profond penseur, je n'ai pas établi de distinction entre le rapport et la mesure. Cette distinction est pourtant intéressante mais sans utilité pratique ainsi qu'on va le voir.)

Cette manière d'être relative peut être *caractérisée* soit par les grandeurs $G_1$ et $G_2$ elles-mêmes, soit par une *loi de formation* de $G_2$ à l'aide de $G_1$.

(Cette nouvelle expression n'est pas de moi non plus ; je l'ai trouvée dans le cours d'analyse de Houël qui s'en sert à propos des nombres.)

**Mesure d'une grandeur.** — Mesurer *une grandeur, c'est la déterminer avec précision, et à divers points de vue, relativement à une grandeur de sa classe, connue ou spécifiée, que l'on appelle* ÉTALON.

(Cette définition est presque textuellement de Joseph Bertrand).

La détermination en question est réalisée lorsqu'on connaît un traitement qui, appliqué à l'étalon, reproduit la grandeur mesurée.

C'est ici qu'un critique allemand, M. Oskar Perron, de Tübingen, a songé à chauffer l'étalon, ce qui ne saurait être une froide plaisanterie).

La mesure d'une grandeur $G_2$ relativement à un étalon $G_1$ revient donc en définitive à la détermination d'une loi de formation de cette grandeur au moyen de l'étalon, laquelle loi de formation prend le nom de *mesure de* $G_2$ *relativement à* $G_1$, et se représente par le symbole

$$\text{mes}_{G_1} G_2 .$$

**Nombre.** — Dans le sens le plus général qu'il convient d'attribuer à ce mot dans la science mathématique, j'appelle *nombre, toute loi de formation qui, appliquée à une grandeur d'une certaine classe* G, *produise une grandeur déterminée de la même classe.*

C'est à une telle loi que se réduisent en fin de compte les concepts abstraits de rapport et de mesure de grandeurs.

Rien ne prouve à priori qu'à des grandeurs arbitraires $G_1$ et $G_2$ d'une même classe (G) il corresponde une loi de formation de $G_2$ à l'aide de $G_1$ ; cependant, dans certains cas simples, par exemple si $G_2$ est une somme de grandeurs égales à $G_1$, une loi de formation apparaît à l'évidence.

D'un autre côté, si l'on suppose que l'on ait pu déterminer, au moyen des grandeurs $G_1$ et $G_2$, une loi de formation de $G_2$ à l'aide de $G_1$, rien ne prouve à priori, que la même loi, appliquée à une grandeur $G_3$ de la même classe (G) ou à une grandeur $H_1$ d'une autre classe (H), produit une grandeur déterminée $G_4$ ou $H_2$ de la même classe que la grandeur choisie. Rien ne permet même d'affirmer que cette loi sera applicable à d'autres grandeurs que $G_1$ ; et cependant, dans l'exemple particulier que j'ai cité plus haut, il apparaît encore à l'évidence qu'il en est ainsi. Rien ne s'oppose donc à ce que l'on établisse une théorie tout à fait générale, reposant sur l'existence des lois de formation et sur la possibilité d'appliquer ces lois à d'autres grandeurs que celles qui les ont fait découvrir ; quitte à démontrer, chaque fois que l'on voudra utiliser cette théorie dans des circonstances déterminées, que les grandeurs considérées satisfont aux conditions requises.

Un nombre n'est donc pas à proprement parler un rapport de grandeurs, mais bien la loi de formation de l'une de ces gran-

deurs à l'aide de l'autre, *loi conçue indépendamment des grandeurs particulières qui lui ont donné naissance.* Si je ne devais pas craindre de m'exprimer d'une manière peut-être difficile à comprendre par de jeunes intelligences, je devrais dire :

Un nombre, c'est *le schème mental* (ou le concept schématique) *de tout traitement qui, appliqué à une grandeur quelconque, mais déterminée d'une classe G en fait une grandeur déterminée de la même classe*[1].

Par la suite il est démontré que la connaissance des grandeurs $G_2$ et $G_1$ et par conséquent de leur manière d'être relative permet de caractériser celle-ci au moyen d'un nombre, ou loi de formation de $G_2$ à l'aide de $G_1$ ; ce nombre sera la mesure de $G_2$ relativement à $G_1$ ; on démontre également que la connaissance d'une grandeur $G_1$ et d'une loi de formation permet de déterminer une grandeur $G_2$ de la même classe, grandeur $G_2$ dont cette loi de formation, ou ce nombre, caractérise la manière d'être relativement à $G_1$, et est la mesure relativement à $G_1$.

Cela étant, et afin de simplifier le langage, on ne fait aucune distinction entre un rapport de grandeurs et le nombre qui lui correspond.

Mais il est bien certain que ce sont là deux concepts différents. Et lorsque l'on énonce une proportion, entre grandeurs, c'est bien de la manière d'être relative qu'il s'agit, ce qui explique les énoncés de théorèmes tels que celui-ci :

*Deux angles au centre* SONT ENTRE EUX COMME *les arcs qu'ils interceptent sur des circonférences égales, décrites de leurs sommets pour centres.*

**Symboles représentatifs des nombres.** — Le rapport d'une grandeur à une grandeur égale s'appelle *nombre un* ou *un* tout court. On le représente par le caractère 1.

Ecrire $\frac{G_2}{G_1} = 1$ est donc synonyme de $G_2 = G_1$.

On représente les nombres au moyen des symboles représentatifs des rapports de grandeurs, ou des mesures de grandeurs, ou bien encore au moyen de lettres minuscules, de lettres grecques, ou de caractères spéciaux ; ainsi une lettre *a* désigne un nombre, renseigné comme étant le rapport des grandeurs $G_2$ et $G_1$, auquel cas ce symbole *a* remplace simplement les symboles

$$\frac{G_2}{G_1} \qquad \text{ou} \qquad \text{mes}_{G_1} G_2$$

et il indique un traitement qui appliqué à $G_1$ produit $G_2$ ; ou bien

[1] Pour employer la manière des logiciens nominalistes, on pourrait donner comme définition du nombre : *un groupe de grandeurs* $G_2$ *et* $G_1$ *d'une même classe, auquel on associe l'ordre dans lequel on les considère.*

ce symbole $a$ indique par lui-même un traitement connu ou supposé tel, applicable à des grandeurs arbitraires ou soumises à certaines conditions, et produisant alors des grandeurs déterminées. Tels sont par exemple les symboles d'usage courant $4, \frac{3}{2}$, etc.

**Nombres absolus, nombres relatifs.** — Lorsque, dans la manière d'être de $G_2$ relativement à $G_1$, et conséquemment aussi dans la loi de formation de $G_2$ à l'aide de $G_1$, on ne tient compte que des grandeurs elles-mêmes, abstraction faite de toute autre considération, le rapport de $G_2$ à $G_1$ s'appelle un *nombre absolu*. Mais on peut aussi, dans leur manière d'être relative, et dans la loi de formation qui la caractérise, tenir compte des positions de $G_2$ et de $G_1$; dans ce cas leur rapport est appelé un *nombre relatif*. Et à ce dernier point de vue, on peut envisager la simple situation de $G_2$ relativement à $G_1$, ce qui donnera les nombres qualifiés positifs et négatifs ou les nombres complexes binaires $(a + ib)$; ou bien, on peut envisager en outre la situation de la figure constituée par le groupe $G_1G_2$ dans un système de repère à trois dimensions; cette conception ultime et générale fournira les *quaternions*, et même les *biquaternions*[1].

**Produit d'une grandeur par un nombre.** — Une grandeur $G_2$ produite par l'application à une grandeur $G_1$ d'un traitement indiqué par le nombre $a$, s'appelle *produit de* $G_1$ *par* $a$. On la désigne par les symboles :

$$G_1 \times a \qquad G_1 . a \qquad G_1 a$$

et l'on écrit donc :

$$G_2 = G_1 . a \,. \tag{1}$$

On dit encore que $G_2$ s'obtient en *multipliant* $G_1$ par $a$.

Si $a$ est le rapport des grandeurs $H_2$ et $H_1$ d'une classe $(H)$, multiplier $G_1$ par $\frac{H_2}{H_1}$ c'est donc appliquer à $G_1$ le même traitement qui, appliqué à $H_1$, produit $H_2$. On a donc alors :

$$G_2 = G_1 \times \frac{H_2}{H_1} \,. \tag{2}$$

D'autre part, $a$ peut maintenant se représenter par le symbole $\frac{G_2}{G_1}$ puisque, si l'on applique à $G_1$ le traitement indiqué par $a$ on

[1] Je me suis trompé lorsque j'ai écrit dans mon avant-propos que les biquaternions ne sont pas des nombres. La faute en est aux vecteurs *équipollents*, et au manque d'ouvrages écrits en français sur ce sujet. J'aurai peut-être un jour le temps d'établir la théorie rationnelle des bi et tri-quaternions. Ce sera une cinquième partie à ajouter à mon livre.

obtient $G_2$. Les symboles $\frac{G_2}{G_1}$ et $\frac{H_2}{H_1}$ désignent donc ici une même loi de formation, c'est-à-dire un seul et unique nombre. La relation (2) peut donc s'écrire

$$G_2 = G_1 \times \frac{G_2}{G_1} \tag{3}$$

ce que l'on exprime en disant que *le rapport des grandeurs* $G_2$ *et* $G_1$ *est un nombre par lequel, multipliant* $G_1$, *on obtient* $G_2$.

**Nombres égaux.** — Connaissant $G_1$ et $G_2$, on peut mesurer directement $G_2$ au moyen de $G_1$, et concevoir un nombre $\frac{G_2}{G_1}$ obtenu par une méthode de mesure qui n'est pas nécessairement la même que la méthode ayant fourni $\frac{H_2}{H_1}$ ou $a$. Si nous désignons par $b$ ce nombre nous pouvons écrire les identités :

$$G_2 = G_1 . b \qquad \text{et} \qquad G_2 = G_1 . a .$$

Les nombres $a$ et $b$, qui ont sur $G_1$ le même effet, c'est-à-dire qui produisent chacun la grandeur $G_2$, sont dits *égaux* et représentés chacun par le symbole $\frac{G_2}{G_1}$ sans distinction. On écrira :

$$b = a \qquad \text{ou} \qquad \frac{G_2}{G_1} = \frac{H_2}{H_1} .$$

Il faut bien se garder de confondre des nombres égaux avec des nombres identiques, quels que soient les symboles qui les représentent.

Ainsi les symboles

$$\frac{G + G + G}{G} \qquad 1 + 1 + 1 \qquad \text{et} \qquad 3$$

désignent un seul et même nombre, tandis que les symboles

$$\frac{11}{4} \qquad \frac{22}{8} \qquad 2{,}75 \qquad \text{et} \qquad 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}$$

désignent des nombres égaux mais non identiques.

On démontre que *les produits d'une grandeur quelconque par des nombres égaux, sont des grandeurs égales.*

**Somme de nombres.** — Considérons des nombres $a$ et $b$ et une grandeur arbitraire G que l'on puisse multiplier par ces nombres ; soient les grandeurs

$$G_1 = G \times a \qquad \text{et} \qquad G_2 = G \times b .$$

Le nombre $\frac{G_1 + G_2}{G}$ s'appellera *somme* des nombres $a$ et $b$, et se représentera conventionnellement par le symbole $a + b$.

On aura donc

$$\frac{G_1 + G_2}{G} = a + b \ ,$$

d'où

$$\frac{Ga + Gb}{G} = a + b \ , \qquad (1)$$

$$G(a + b) = Ga + Gb \ , \qquad (2)$$

$$\frac{G_1 + G_2}{G} = \frac{G_1}{G} + \frac{G_2}{G} \ . \qquad (3)$$

*La somme des nombres a et b est indépendante de la grandeur* G *qui a servi à la définir :* soit, en effet, une grandeur H autre que G (de la même classe que G ou d'une autre classe), et posons

$$s = \frac{Ga + Gb}{G} \qquad s' = \frac{Ha + Hb}{H} \ .$$

Il apparaît avec évidence que les nombres $s$ et $s'$ sont identiques, car ils indiquent que le traitement qu'on a appliqué à G pour former $Ga + Gb$ est absolument le même que celui qui a été appliqué à H pour former $Ha + Hb$ : multiplier G ou H successivement par $a$ et par $b$, puis considérer la somme des grandeurs obtenues. C'est donc à juste titre que le symbole $a + b$ ne donne aucun renseignement au sujet de la grandeur ayant servi à le définir.

**Produit de nombres.** — Considérons les nombres $a$ et $b$, et une grandeur G.

Soient

$$G_1 = G \, . \, a \qquad \text{et} \qquad G_2 = G_1 \, . \, b$$

en supposant bien entendu que ces produits existent.

Le nombre $\frac{G_2}{G}$ s'appellera *produit* de $a$ par $b$ ; on le représentera conventionnellement par les symboles $a \times b$ ou $ab$ .

On aura donc

$$\frac{G_2}{G} = a \times b \ .$$

D'où

$$\frac{(Ga)\,b}{G} = ab \ , \qquad (1)$$

$$G(ab) = (Ga)\,b \ , \qquad (2)$$

$$\frac{G_2}{G} = \frac{G_1}{G} \times \frac{G_2}{G_1} \ . \qquad (3)$$

Cette dernière formule est fort importante, car elle donne naissance à la première règle de calcul : la *suppression des* $G_1$ *en diagonale descendante de gauche à droite.*

**Rapport de nombres.** — Considérons les nombres $a$ et $b$. On appelle *rapport* de $a$ à $b$, le seul et unique nombre tel, que le produit de $b$ par ce nombre est égal à $a$.

Un tel nombre existe. En effet, soit G une grandeur que l'on puisse multiplier par $a$ et $b$ ; je dis que le nombre $\frac{Ga}{Gb}$ répond à la question.

On a :

$$b \times \frac{Ga}{Gb} = \frac{Gb}{G} \times \frac{Ga}{Gb} = \frac{Ga}{G} = a$$

en appliquant la règle de calcul trouvée au numéro précédent.

On démontre que le nombre $\frac{Ga}{Gb}$, que l'on convient de représenter par le symbole $\frac{a}{b}$, est indépendant de G ; à cet effet, désignons par $x$ un nombre ayant la propriété

$$b \times x = a .$$

Multiplions une grandeur H par le produit $b \times x$ ou $a$. On aura

$$H(bx) = Ha = (Hb)\,x .$$

d'où

$$x = \frac{Ha}{Hb} .$$

Je dis que

$$\frac{Ha}{Hb} = \frac{Ga}{Gb} .$$

Car on a

$$b \,.\, x = b \times \frac{Ha}{Hb} = a$$

d'où

$$G \times \left(b \times \frac{Ha}{Hb}\right) = Ga = (Gb) \times \frac{Ha}{Hb} , \qquad \text{ou} \qquad \frac{Ga}{Gb} = \frac{Ha}{Hb} .$$

**Classification des nombres absolus.** — Considérons un nombre $a$, rapport des grandeurs $G_2$ et $G_1$.

1° Si $G_2$ et $G_1$ sont des sommes de grandeurs égales à une grandeur G, leur rapport est appelé un *nombre commensurable.*

Dans ce cas on a

$$a = \frac{G_2}{G_1} = \frac{G + G + \ldots + G}{G + G + \ldots + G} .$$

En particulier, si $G_2$ est une somme de grandeurs égales à $G_1$, leur rapport est appelé un *nombre entier*.

Dans ce cas on a

$$u = \frac{G_2}{G_1} = \frac{G_1 + G_1 + \ldots + G_1}{G_1} = \frac{G_1}{G_1} + \frac{G_1}{G_1} + \ldots + \frac{G_1}{G_1} = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 .$$

2° S'il n'existe aucune grandeur telle, que $G_2$ et $G_1$ soient des sommes de grandeurs égales, le rapport $\frac{G_2}{G_1}$ est appelé un *nombre incommensurable*.

Telle est, exposée avec quelques détails supplémentaires pour certains points, dans ses grandes lignes pour d'autres, la base de ma théorie arithmétique. On a pu voir que le fond des idées ne m'appartient nullement en propre et que de grands mathématiciens ont eu ces idées-là bien avant moi. Lorsque je m'en suis aperçu, le livre était imprimé, ce qui explique l'absence du nom de Duhamel dans mon texte. Mais ce qui n'avait pas encore été fait c'est un exposé complet de la théorie générale des nombres absolus et relatifs conformément à ces principes.

En particulier, les nombres complexes (les imaginaires $a + ib$) avaient bien reçu une *interprétation* géométrique ; mais comme on peut s'en rendre facilement compte, le principe même de cette interprétation est mauvais ; le nombre complexe ne représente pas *un* vecteur d'un plan, et ce vecteur seul ne représente pas le nombre ; celui-ci est le rapport de deux vecteurs, et le second ne doit pas être considéré comme appartenant à un axe fixe, unique, que l'on appelle souvent l'axe des nombres réels ; le symbole $i$ ne doit pas non plus être considéré comme représentant un vecteur-unité porté par l'axe perpendiculaire à l'axe des nombres réels ; ce symbole $i$ est le rapport de deux vecteurs quelconques perpendiculaires et égaux, le sens de rotation étant direct du second vers le premier. Et dans l'extension à l'espace, $i$ sera le vecteur-unité porté par l'axe perpendiculaire au plan de repère ; dans le cas d'une figure plane, cet axe est perpendiculaire au plan de la figure.

C'est pour ces motifs qu'Argand et ses successeurs ont échoué dans leurs tentatives d'étendre à l'espace l'interprétation géométrique des nombres complexes. Leur conception de ces nombres comme symboles représentatifs de vecteurs était fausse. Le nombre ne représente pas un vecteur, mais il est le rapport de deux vecteurs. Il a fallu le génie de Hamilton pour créer la théorie des biradiales.

Voilà pourquoi aussi je ne puis me rallier aux théories qui font des nombres des symboles *représentatifs* de grandeurs ; on ne tient pas compte dans ces théories de ce qu'il n'y a dans aucune

classe, de grandeur étalon fixe. La théorie que j'ai développée est donc beaucoup plus générale ; et on le verra aisément, si l'on veut lire ma théorie des *ternions ;* ceux-là sont effectivement les rapports de vecteurs quelconques à un vecteur unique, pris sur l'axe de repère de tout l'espace. Chaque ternion représente alors sans ambiguïté un vecteur ; la somme de deux ternions sera un ternion ; mais leur produit sera un quaternion, à moins qu'ils soient coplanaires avec le vecteur-étalon.

En résumé, la théorie du nombre, rapport de grandeurs géométriques permet une exposition absolument méthodique et générale de l'arithmétique. Un même mot n'a pas plusieurs significations différentes ; la continuité des fonctions somme, produit, quotient, racine, etc., est assurée, et l'arithmétique garde son véritable caractère utilitaire et rationnel.

Un mot encore, avant de terminer. Le nombre entier est d'un emploi courant dans le langage ordinaire. Cet emploi est-il compatible avec la définition que j'en ai donnée, ou bien le nombre du public n'est-il pas plus le nombre du mathématicien qu'il n'est celui du logicien ?

M. H. Laurent a répondu à l'avance à cette question [1]. Les objets que le nombre entier permet de compter sont désignés dans le langage courant au moyen d'un terme générique qui les dépouille de tous les attributs par quoi ils diffèrent. Ainsi quand on dit cinq animaux, il peut y avoir là des chevaux et des oiseaux réunis.

Ces cinq animaux sont *égaux* puisqu'on ne les distingue pas ; et le mot cinq indique bien la loi de formation de cette collection d'animaux au moyen d'un animal.

Je demandais récemment à un jeune enfant combien il avait reçu de bons points à son école. Il m'a répondu : « Comme ça ! » en me montrant quatre doigts ; et il a ajouté en me montrant ses deux mains ouvertes : « Quand j'en aurai comme ça, je recevrai une belle image ».

Ainsi donc cet enfant construisait une collection à l'aide de ses doigts d'après la même loi de formation que sa collection de bons points à l'aide de l'un de ces petits carrés de carton. Je crois qu'il ne serait pas possible de trouver une preuve plus éclatante de la rationalité de ma théorie.

Je prétends que le logicien en échafaudant sa théorie n'a pas atteint le but qu'il s'était proposé : définir les nombres. Il a esquivé ce but ; il a créé de toutes pièces une série d'êtres, sortes de mannequins automates, auxquels il a donné le nom de nombres, mais je le répète il n'a pas défini ce qu'il voulait définir. Les

---

[1] Sur les principes de la théorie des nombres (*Collection Scientia*, n° 20).

définitions ne peuvent pas être de perpétuelles créations, ou bien il leur manquera toujours la vie.

Dans tous les cas, je mets le plus subtil logicien au défi de créer la moindre théorie, y compris celles de ses nombres, sans faire appel aux postulats suivants :

1. *Postulat de l'espace.* — Il existe des corps naturels distincts (en particulier moi).

2. *Postulat de la conscience humaine.* — Il est possible à l'homme de prendre conscience des corps naturels, et de concevoir des abstractions correspondantes.

3. *Postulat du temps.* — Il est possible de considérer des objets (corps naturels ou concepts abstraits) dans un certain ordre de succession.

4. *Postulat du mouvement.* — Il est possible de modifier les situations relatives de plusieurs objets.

5. *Postulat du raisonnement.* — Il est possible de raisonner juste.

Ces postulats sont indispensables à la *moindre de nos pensées ;* et principalement à l'écriture.

Juin 1912. Emile DUMONT (Bruxelles).

---

# CHRONIQUE

---

## Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.

A la suite du décès de son président, M. Henri Poincaré, la Commission du Répertoire s'est réunie le 18 décembre 1912 afin de procéder à l'élection d'un nouveau président et d'aviser aux mesures que peut nécessiter l'œuvre du Répertoire.

C'est M. H. d'OCAGNE, professeur à l'Ecole polytechnique de Paris, qui a été désigné comme président. En prenant possession du fauteuil présidentiel, il est rappelé à la Commission que, à la suite du décès de M. Raffy, les fonctions de secrétaire avaient été confiées à M. GÉRARDIN (Nancy).

M. Gérardin a expliqué la situation de l'œuvre du Répertoire ; 20 séries de fiches sont actuellement étudiées, elles comprennent 2000 fiches et 18,523 titres. Plus de 20,000 titres de mémoires sont actuellement classés et prêts à être édités ; ils donneront lieu à

plus de 2000 fiches qui, espérons-le, pourront être publiées dans le plus bref délai possible.

On sait que la Commission a été créée à la suite du *Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques*, qui s'est réuni à Paris, en juillet 1889, et qu'elle a décidé de publier les titres des travaux de mathématiques qui ont paru pendant le XIX^e^ siècle (année 1900 incluse). A partir de cette époque la bibliographie est faite à l'aide de la *Revue semestrielle des publications mathématiques* sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam, et d'après la même classification. Il convient d'ajouter que bien que l'entreprise ait un caractère absolument international, les frais ont été couverts jusqu'ici grâce à la libéralité de l'Etat français et des libéralités particulières au nombre desquelles nous citerons la subvention du Prince Roland Bonaparte (3000 fr.) et celle de M. R. Bischoffsheim (2000 fr.).

Si la Commission a besoin d'un nouvel appel financier pour terminer rapidement son œuvre, nous sommes certains qu'un appel aux mathématiciens et aux sociétés scientifiques de l'étranger rencontrera le meilleur accueil. Il s'agit là d'une œuvre scientifique internationale en faveur de laquelle l'esprit de solidarité entre les savants ne saurait faire défaut.

H. Fehr.

## Congrès internationaux de San-Francisco 1915.

L'Exposition universelle « Panama-Pacific International Exposition », qui aura lieu à San-Francisco en 1915, aura comme corollaire important l'organisation de nombreux congrès internationaux, de réunions de sociétés savantes et d'associations diverses. M. J. A. Barr secrétaire de la « California Teachers Association » et directeur de la « Sierra Educational News » a été chargé de la direction du Bureau concernant l'organisation de ces réunions.

On projette notamment la convocation, pour 1915, d'un *congrès international d'éducation*. Les diverses séances seront, dans la mesure du possible, groupées de façon à permettre au visiteur d'assister en un temps relativement court à toutes celles qui sont en corrélation entre elles. Les Universités de California et Stanford prêteront leur concours à l'organisation des réunions.

Le Bureau enverra des invitations aux sociétés savantes du monde entier. Il fera paraître sous peu un bref exposé des différentes branches d'activité de l'exposition et réunira également des informations complètes relativement aux hôtels et moyens de transport à l'usage des membres des sociétés qui se réuniront à San-Francisco en 1915.

Les demandes de renseignements doivent être adressées à M. James A. Barr, 50 Main Street, San-Francisco.

## Académie des sciences de Paris. — Prix proposés.

Grand prix des Sciences mathématiques (Fr. 3000 ; prix biennal à sujet variable). L'Académie rappelle qu'elle a mis au concours, pour l'année 1914, la question suivante :

*Perfectionner la théorie des fonctions d'une variable qui sont susceptibles de représentations par des séries trigonométriques de plusieurs arguments fonctions linéaires de cette variable.*

*On sait que de telles fonctions se présentent dans de nombreuses questions de Physique mathématique et de Mécanique céleste. L'Académie verrait avec plaisir traiter quelque application importante.*

Prix Bordin (Fr. 3000 ; prix biennal à sujet variable). L'Académie met au concours, pour l'année 1915, la question suivante :

*Réaliser un progrès notable dans la recherche des courbes à torsion constante ; déterminer s'il est possible celles de ces courbes qui sont algébriques, tout au moins celles qui sont unicursales.*

Pour plus de détails voir les *Comptes rendus*, séance du 16 décembre 1912.

## Allemagne. — Thèses de doctorat, 1910-1911.

Le « Jahresverzeichnis der an den deutschen Universitäten erschienenen Schriften » indique les thèses ci-après appartenant aux sciences mathématiques :

*Berlin :* Müntz, Zum Randwertproblem der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen. — Remak, Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren. — Steinbacher, Abelsche Körper als Kreisteilungskörper.

*Bonn :* Brües, Zur Theorie der desmischen Flächen vierter Ordnung.

*Breslau :* Kober, Konjugierte kinetische Brennpunkte.

*Freiburg :* Montfort, Die Auflösung der numerischen Gleichungen nach Fourier.

*Giessen :* Chambré, Darstellung von Faktoren ganzer Funktionen durch Kovarianten. — Drescher, Über geometrische Darstellung von Gruppen. — Schreiter, Über das kombinatorische Produkt von vier Kollineationen im Raum und die Apolarität kollinearer Verwandtschaften auf allen Stufen. — Seeman, Projektive Verallgemeinerung metrischer Begriffe. — Thaer, Analytische Beiträge zur Lehre vom Kegelschnittsystem (3 *p*, 1 *l*). — Vaerting, Zur Transformation der vielfachen Integrale. — Wolff, Über Kollineationen in der Ebene.

*Göttingen :* Behrens, Ein der Theorie der Laval-Turbine entnommenes mechanisches Problem, behandelt mit der Himmelsmechanik. — Cassebaum, Über das Verhalten von weichem Flussstahl jenseits der Proportionalitätsgrenze. — Funk, Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätitschen

Linien. — GRELLING, Die Axiome der Arithmetik mit besonderer Berücksichtigung der Beziehungen zur Mengenlehre. — HECKE, Zur Theorie der Modulfunktionen von zwei Variabeln und ihrer Anwendung auf die Zahlentheorie. — HIEMENZ, Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. — HURWITZ, Randvertaufgaben bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. — MÜHLENDYCK, Klassifikation der regelmässig-symmetrischen Flächen fünfter Ordnung. — REINSTEIN, Untersuchung über die Transversalschwingungen der gleichförmig gespannten elliptisch oder gleichförmig begrenzten Vollmembran und Kreisringmembran, sowie von Vollkreis- und Kreisringmembranen mit nach speziellen Gesetzen variierter ungleichförmiger Spannung. — STEINHAUS, Neue Anwendungen des Dirichletschen Prinzips. — WIENER, Elementare Beiträge zur neueren Funktiontheorie.

*Halle* : BARUCH, Über die Differentialrelationen zwischen den Thetafunktionen eines Arguments. — BECKER, Körper grösster Anziehung auf ein und zwei Ellipsoide von $n$ Dimensionen. — BOELK, Darstellung und Prüfung der Merkurtheorie des Claudius Ptolemaeus. — JÜTHE, Die Schwingungskugel einer Flächenkurve. — LÜDERS, Über orthogonale Invarianten der bizirkularen Kurven vierter Ordnung.

*Heidelberg* : PERSON, Die invarianten Gebilde erster Ordnung bei projektiven Transformationen der Ebene und des Raumes mit Anwendung auf die Klassifikation der eingliedrigen projektiven Gruppen der Ebene und des Raumes. — WITTSACK, Über das identische Verschwinden der Hauptgleichungen der Variation vielfacher Integrale.

*Jena* : FENDER, Zur Theorie von allgemeinerten Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.

*Königsberg* : MERTENS, Über gewisse räumliche Punktmengen, die sich als stetige Flächen auffassen lassen.

*Leipzig* : MÜLLER, Die rationale Kurve fünfter Ordnung im fünf-, vier-, drei- und zweidimensionalen Raum. — PICKERT, Verallgemeinerung der Untersuchungen von Gauss über das arithmetisch-geometrische Mittel. — ROSENHAUER, Die oszillatorische Bewegung einer Kreisscheibe im Innern einer festen Zylinderfläche.

*Marburg* : SCHWANTKE, Über den axiomatischen Aufbau einer Geometrie linearer Kugelsysteme.

*Münster* : JOACHIMI, Über Kurven, bei denen die beiden Krümmungen durch eine quadratische Beziehung verknüpft sind. — KEISKER, Beiträge zu den Anwendungen der Theorie der unendlich kleinen Schraubungen auf Raumkurven. — KRAFT, Das Normalenproblem an Kurven und Flächen zweiter Ordnung in den endlichen Raumformen. — RECKERS, Untersuchungen über Kurvennetze ohne Umwege.

*Rostock* : BLEICHER, Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenksysteme. — BLENCK, Untersuchungen über das Amiotsche Theorem bei den Flächen zweiter Ordnung und über Erzeugungsarten des elliptischen Kegels. — GEISSLER, Die Gleichgewichtsbedingungen der Raummechanik mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen, magnetischen und Gravitationserscheinungen.

*Strassburg* : FINZEL, Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie. — GLASER, Über die Galoissche Gruppe der Gleichung des 16. Grades, von der die 16 Knotenpunkte der Kummerschen Fläche 16. O. abhängen. — HARTWIEG, Konstruktion der Hauptachsen des Ellipsoids aus

drei konjugierten Durckmessern. — Kill, Beiträge zum Fundamentalproblem der Flächentheorie. — Meyer, Struktureigenschaften der projektiven Invarianten mit *n* Variabeln. — Mohr, Die Bertrandschen Kurven in der Theorie der Normalsysteme. — Schmedes, Analytische Behandlung der Bewegungen im nichteuklidischen Raume.

*Würzburg:* Engelhardt, Untersuchungen über die im Schlusswort des Lieschen Werkes « Geometrie der Berührungstransformationen » angedeuteten Probleme. — Haupt, Untersuchungen über Oszillationstheoreme.

## France. — Thèses de mathématiques ; 1912.

Helbronner (Paul), Résumé des opérations exécutées jusqu'à la fin de 1911 pour la description géométrique détaillée des Alpes françaises.

Levy (Paul), Sur les équations intégrodifférentielles définissant des fonctions de lignes.

Turrière (Emile), Sur les congruences des normales qui appartiennent à un complexe donné.

Bosler (Jean), Sur les relations des orages magnétiques et des phénomènes solaires.

Galbrun (H.), Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable.

Nicolau (C.), Sur la variation dans le mouvement de la Lune.

## Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Le *Prix Lobatschewsky* de la Société physico-mathématique de Kasan a été attribué à M. F. Schur, professeur à l'Université de Strasbourg.

**Allemagne.** — M. C. Caratheodory, professeur à l'Ecole technique supérieure de Breslau, est nommé professeur à l'Université de Gœttingue en remplacement de M. F. Klein, qui prend sa retraite.

M. F. Engel, professeur à l'Université de Greifswald, a reçu un appel à l'Université de Kiel et à celle de Giessen. Il se rendra à l'appel de l'Université de Giessen, en remplacement de M. E. Netto, qui prend sa retraite.

M. Th. von Karman, privat-docent à l'Université de Gœttingue, est nommé professeur de mécanique et d'aérodynamique, ainsi que directeur du laboratoire d'aérodynamique à l'Ecole technique supérieure d'Aix-la-Chapelle.

M. A. Kopff, privat-docent à l'Université de Heidelberg, est nommé professeur extraordinaire d'astronomie.

M. H. Mohrmann, privat-docent à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe, a été nommé professeur de mathématiques et de mécanique à l'Ecole des Mines de Clausthal.

**Angleterre.** — M. A. R. Forsyth, F. R. S., ex- « Sadlerian » professeur de mathématiques pures à Cambridge, est nommé professeur titulaire de la chaire de mathématiques à l'« Imperial College of Science and Technology », S. Kensington, Londres.

M. H. Bryon Heywood D. Sc., est nommé « Assistant Lecturer » en mathématiques au Bedford College pour dames à Londres.

M. E. W. Hobson, professeur à l'Université de Cambridge, est nommé Docteur honoraire de l'Université d'Oxford.

M^lle^ H. P. Hudson, de Newnham College à Cambridge, est nommée professeur de mathématiques à West Ham Technical School.

**Autriche.** — M. E. Hellebrand a été nommé professeur de mathématiques à l'Ecole supérieure forestière de Vienne, en remplacement de M. O. Simony, qui prend sa retraite.

M. G. Majcen, professeur à l'Université d'Agram, a été nommé membre correspondant de la Société royale des Sciences de Prague.

M. Th. Poschl, privat-docent à l'Ecole technique supérieure de Graz, a été nommé professeur extraordinaire de mécanique à l'Ecole technique supérieure allemande de Prague.

M. V. Varicak, professeur à l'Université d'Agram, a été nommé membre correspondant de la Société royale des Sciences de Prague.

M. Weinek, professeur à l'Université allemande de Prague, a obtenu le prix « Guadalupe Almendaro » de l'Académie de Mexico pour ses travaux sur la lune.

*Privat-docent.* — M. Hoborski a été admis en qualité de privat-docent à l'Université de Cracovie.

**Etats-Unis.** — M. W. E. Byerly, professeur de mathématiques à l'Université de Harvard, prend sa retraite à la fin de l'année académique courante.

M. G. A. Miller, professeur à l'Université d'Illinois, a été nommé membre correspondant de la Société mathématique espagnole.

M. R. G. D. Richardson a été nommé professeur extraordinaire de mathématiques à l'Université Brown, Providence, E.-U.

**France.** — M. Chatelet est chargé d'un cours de mécanique rationnelle et appliquée à l'Université de Toulouse.

M. Cl. Guichard est nommé professeur de mathématiques générales à la Faculté des Sciences de Paris.

**Italie.** — M. A. Signorini a été nommé privat-docent de mécanique rationnelle à l'Université de Padoue.

**Suède.** — M. Nörlund a été nommé professeur de mathématiques à l'Université de Lund.

**Suisse.** — *Privat-docent.* — M. P. Bernays est admis en qualité de privat-docent à l'Université de Zurich.

## Nécrologie.

M. Fritz Burkhardt, ancien recteur de l'Ecole réale et du Gymnase classique de Bâle, puis professeur à l'Université, vient de mourir à l'âge de 82 ans.

M. J. Franz, professeur et directeur de l'Observatoire de l'Université de Breslau, est décédé le 28 janvier 1913 à l'âge de 65 ans.

M. L. Swift, ancien directeur de l'Observatoire Warner à Rochester et de l'Observatoire du Mount Lowe, Californie, est décédé à Bringhampton, N. Y., le 5 janvier 1913 à l'âge de 93 ans.

M. W. Vaughn, professeur d'astronomie à l'Université Vanderbilt (E.-U.), est décédé le 16 décembre 1912 à l'âge de 78 ans.

M. Mario Pieri, professeur de Géométrie projective et descriptive à l'Université de Parme, est décédé le 28 février à l'âge de 53 ans.

Paul Gordan. — Les mathématiciens allemands viennent de perdre un de leurs plus illustres représentants, Paul Gordan, professeur à l'Université d'Erlangen, décédé le 21 décembre dernier. Né à Breslau, en 1837, Gordan commença ses études dans sa ville natale, puis étudia successivement à Königsberg et à Berlin. Il débuta dans l'enseignement supérieur à l'Université de Giessen, en qualité de professeur extraordinaire. En 1875 il fut appelé à l'Université d'Erlangen. On sait que les travaux de Gordan appartiennent principalement au domaine de l'algèbre supérieure et tout particulièrement à la théorie des formes. Gordan était l'un des directeurs des *Mathematischen Annalen.* Il était membre correspondant d'un grand nombre de sociétés scientifiques, notamment de l'Institut de France et de l'Académie des Lincei (Rome).

Sir William H. White. — Sir W. H. White, ingénieur en chef des constructions navales à l'Amirauté anglaise, est décédé à Londres à l'âge de 67 ans. Il s'était acquis une réputation universelle comme constructeur de navires. Directeur des constructions navales de l'Amirauté de 1885 à 1902, il dessina plus de 250 types de navires. Il prit une part active au 5e Congrès international des mathématiciens en se chargeant de l'une des conférences générales. Les participants au Congrès ont beaucoup applaudi sa remarquable causerie sur *la place des mathématiques dans la pratique de l'ingénieur.* Nous en avons donné un compte rendu détaillé dans le numéro de septembre.

# NOTES ET DOCUMENTS

## Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

*Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.*
(11e article)

## ALLEMAGNE

### La géométrie dans l'enseignement élémentaire.

*Stoff und Methode des Raumlehrunterrichts in Deutschland*[1], *ein Literaturbericht von* Dr W. Lietzmann (Barmen). — Tous ceux qui liront le livre de M. Lietzmann admireront le talent avec lequel l'auteur développe d'une façon intéressante un sujet que l'on pourrait croire devoir être traité en quelques pages.

M. Lietzmann définit d'abord son sujet : « Nous entendons par étude de l'espace la géométrie élémentaire autant qu'elle se sert des méthodes d'observation et d'expérience, sans craindre d'introduire quelquefois certaines déductions logiques fort simples. »

Cette phrase est tout un programme de l'enseignement aux jeunes élèves, mon expérience personnelle m'invite à m'y rallier complètement.

Tous les temps ont connu des maîtres traitant de géométrie théorique comme Euclide et d'autres s'occupant surtout de ses applications depuis Héron jusqu'à Pestalozzi. — L'auteur nous fait l'exposé historique de cette double tendance — après quoi il montre la nécessité de bien définir les différentes expressions et dénominations employées et aussi celle d'apprendre aux enfants à les écrire correctement — il regrette le zèle avec lequel certains maîtres allemands ont remplacé des mots tels que ovale, pyramide, cylindre, par des expressions germaniques.

J'ai commencé mes études dans un gymnase lorrain, et mes maîtres, dont j'ai conservé le meilleur souvenir, étaient animés d'un patriotisme moins exclusif.

Dans le cinquième chapitre, nous apprenons le plan qui va présider aux onze derniers. L'auteur voudrait que l'enseignement de l'espace qui était livresque devienne un enseignement manuel, les élèves appliqueraient leur activité à décrire, à représenter, à mesurer et enfin à calculer.

Dans les jeux qui leur sont consacrés, les enfants peuvent déjà se familiariser avec les figures géométriques, puis les assemblages de bâtonnets.

[1] 1 fasc. in-8°, VIII - 88 p. ; 38 figures ; 2 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

les boîtes de constructions, les combinaisons de cartons découpés (chapitre 8). Plus tard, lorsqu'ils seront en âge de comprendre, ils construiront eux-mêmes des cubes, des pyramides, on leur montrera l'usage du fil à plomb qui leur donnera le sens de directions perpendiculaires, directions obliques, etc. (chapitre 9).

Puis ils s'appliqueront à représenter des objets, d'abord des figures planes et ils se serviront de la règle et du compas ; plus tard on leur fera modeler des surfaces, des figures de l'espace « au moyen d'allumettes ou de cure-dents et de pois ramolins » (chapitre 10). On leur donnera des notions de perspective et ils seront en état de dessiner sur une feuille leurs modèles (chapitre 11).

On n'oubliera pas d'exercer les élèves aux mesures, ils devront savoir se servir du décamètre, savoir faire des visées, savoir évaluer des longueurs sur le terrain, et aussi faire des mesures millimétriques avec précision, et même toutes les fois qu'il sera possible on les familiarisera avec l'usage des instruments d'arpentage (chapitre 12).

Ils seront alors prêts à employer aussi les méthodes graphiques en usage pour mesurer des longueurs et des angles (chapitre 13).

Sachant mesurer des longueurs, ils pourront calculer des surfaces (chapitre 14) et des volumes (chapitre 15)

Tous ceux qui s'intéressent à la pédagogie liront avec plaisir le livre de M. Walther Lietzmann et lui sauront gré de l'avoir écrit.

A. Lévy (Paris).

## Mathématiques et Philosophie.

*Mathematik und philosophische Propädeutik*[1], von Dr A. Wernicke (Braunschweig). — Cet ouvrage est remarquable par la richesse et la clarté de son exposé et témoigne d'une érudition sûre et bien informée, jointe à un sens très juste des problèmes philosophiques et pédagogiques. M. Wernicke commence par montrer comment est insuffisante dans l'enseignement de la philosophie la place qui est faite à la méthodologie scientifique. Les mathématiques en particulier sont sacrifiées. On ne met pas en lumière leur caractère propre en tant que science, ni le rôle capital qu'elles jouent dans la connaissance et la conquête de la nature. De grandes difficultés, il est vrai, surgissent lorsque l'on veut préciser ces questions, surtout lorsqu'il s'agit de fixer les rapports entre l'intuition et la pensée discursive, entre l'empirisme et les éléments dits à priori. Les philosophes et les mathématiciens, d'une façon générale, sont loin d'être d'accord sur les limites à établir entre leurs disciplines respectives.

La solution kantienne de ces problèmes que plusieurs penseurs considèrent, encore maintenant, comme définitive, ne répond plus à l'état actuel des mathématiques, car elle se heurte à tout un ensemble de découvertes nouvelles, comme les géométries non-euclidiennes.

M. Wernicke se trouve ainsi forcé d'aborder les plus graves questions philosophiques, telles que la nature des catégories et les rapports de la pensée discursive et de l'intuition. D'après lui toutefois la vraie solution du problème ne peut être entrevue qu'en étudiant sur le vif la façon dont pro-

---

[1] 1 vol. in-8°, 138 p. ; 4 Mk. ; B. G. Teubner, Leipzig.

cèdent les mathématiciens pour constituer leur science. On constate alors que dans l'élaboration des mathématiques une certaine expérimentation est nécessaire de même que dans les sciences physiques ; seulement cette expérimentation porte non sur des objets matériels, mais sur des éléments psychiques. La déduction formelle n'intervient qu'après coup, et encore elle revêt un caractère spécial. Par conséquent, la logique formelle, même sous la forme de calcul logique, n'appartient pas au domaine des mathématiques (p. 69). Quant à l'objet même des mathématiques, il consiste essentiellement en une variété bien ordonnée, et les éléments qui constituent cette variété peuvent être explicités sous forme d'axiomes, de définitions, etc.

Après avoir traité ces difficiles questions, M. Wernicke indique comment elles peuvent être enseignées à l'école et de quelle façon. L'élève doit arriver à la conviction que les mathématiques représentent un système scientifique reposant sur des axiomes et que seules les mathématiques et les sciences qui en dépendent revêtent cette forme (p. 82). Les variétés forment partout l'objet propre des mathématiques et les opérations du calcul consistent à utiliser des rangées, des couples, des classes. De bonne heure, dans l'enseignement, des notions comme celles de la différentielle, du passage à la limite peuvent être introduites et cela d'une façon toute naturelle. Les mathématiques seront ensuite présentées à l'élève comme un moyen de connaître et de conquérir la nature ; le professeur sera ainsi amené à passer en revue les éléments essentiels de toutes les sciences mathématiques depuis l'arithmétique jusqu'à la physique. Mais nous ne pouvons que signaler les pages substantielles consacrées par M. Wernicke à l'étude de ces questions.

Une bibliographie très complète, au moins en ce qui concerne les auteurs allemands, termine le volume.

Il est à souhaiter que les idées exprimées par M. Wernicke pénètrent peu à peu dans l'enseignement secondaire, car s'il est indispensable au philosophe de posséder une culture scientifique étendue, l'homme de science de son côté a besoin d'être initié à une philosophie compréhensive des problèmes qui se posent à l'heure actuelle. L'on affirme volontiers que les sciences doivent se développer d'une façon autonome et que dans ce développement la philosophie ne leur est d'aucun secours, si même elle ne leur est pas nuisible. L'histoire des mathématiques ne semble pas ratifier en tous points ce jugement. C'est certainement parce qu'il était philosophe que Descartes a compris toute l'importance des coordonnées que d'autres avaient employées avant ou en même temps que lui, et c'est en s'appuyant sur les principes de sa logique métaphysique que Leibniz est parvenu à donner aux notations différentielles la forme la mieux appropriée.

Arnold Reymond (Neuchâtel).

## ILES BRITANNIQUES

### N° 11. — Le premier enseignement de l'Arithmétique et de la Géométrie.

*The Teaching of Mathematics to Young Children*[1], by Miss Irene Stephens, Lecturer in Mathematics at the House of Education, Ambleside. — Si nous

[1] Fasc. de 19 p.; prix 1 1/2 d. ; Wyman & Sons, Londres.

considérons l'éducation comme « une atmosphère, une discipline, une vie », nous voyons que l'enfant doit être éduqué dès sa plus tendre enfance. Mais, durant les premières années de son existence, cette éducation doit se faire par les moyens naturels, par son entourage, ses jeux, etc. L'enseignement scolaire proprement dit ne doit commencer qu'à l'âge de six ans accomplis.

Au début les leçons durent deux heures ou deux heures et demie chaque matin, avec une longue récréation. Vingt minutes par jour sont consacrées aux « nombres. » Durant les premières leçons on s'occupe successivement des nombres de 1 à 9 en les introduisant tout d'abord d'une façon concrète, à l'aide d'objets divers et d'exercices nombreux et variés, puis en opérant d'une façon abstraite. Les signes $+$, $-$ et $=$ sont ensuite expliqués et on les utilise à quelques petites opérations, pratiquées d'abord oralement puis par écrit. Au début cependant les exercices écrits devront se faire très rarement, le travail devant être presque exclusivement oral.

Le nombre 10 s'introduira tout d'abord comme les précédents, puis l'on s'arrêtera sur les notions d'unité et de dizaine. Le nombre 12 fournira l'occasion de nombreux exercices de conversion de pennies en shillings et sixpences et inversement et de petites opérations d'argent.

L'analyse des nombres de 1 à 100 fera l'objet de la première année. Les quatre règles et les tables se commencent dans la seconde année. Leur enseignement, tel qu'il se pratique aujourd'hui, n'a pas la prétention d'être original, il n'est qu'une modification des méthodes déjà existantes et est adopté par des manuels bien connus. En voici les principaux caractères :

1. L'analyse des nombres de 1 à 1000 est faite d'une manière très complète. Chaque nombre est envisagé sous tous ses aspects, et les applications sont nombreuses et variées (monnaies, poids et mesure, etc.).

2. Les quatre règles sont introduites dès le début, à l'aide de petits problèmes.

3. Tout un appareil, spécialement imaginé pour les besoins de l'instruction est à disposition.

Cet enseignement ainsi caractérisé présente cependant certains inconvénients de sorte que les modifications suivantes ont été adoptées :

1. On n'utilise pas l'appareil spécial cité plus haut ; car le jeune enfant aurait de la difficulté à séparer le fait qu'on tâche de lui inculquer de l'appareil compliqué qui sert à sa démonstration. Il est préférable d'utiliser à cet effet de simples objets tels que bâtons d'allumettes, boutons, etc.

2. Les exemples en usage, quoique intéressants, sont souvent beaucoup trop difficiles.

3. Il est préférable de renvoyer à plus tard l'étude des tables de poids et mesures de temps et de longueur.

4. Les signes $\times$ et $\neq$ (est contenu dans) ne sont pas introduits avant la table de la multiplication, et l'on évite d'employer des termes tels que soustrahende, addende.

5. On ne s'arrête pas si longtemps sur les nombres un peu élevés. Les enfants ne travaillent pas du tout à la maison et leur arithmétique se fait donc surtout oralement.

Passons maintenant aux opérations proprement dites :

*Addition et soustraction.* On débute par des exemples concrets sur des sommes d'argent, puis l'on passe aux opérations sur les nombres abstraits. L'analogie qui existe entre la transformation des pennies en shillings, shil-

lings en pounds et celle des unités en dizaines et dizaines en centaines facilitera le travail. Certains exemples serviront à faire envisager la soustraction comme complément de l'addition ; c'est la meilleure façon de la présenter aux débutants. Pour cette dernière opération la méthode par décomposition s'explique aisément, cependant certains maîtres lui préfèrent la méthode des additions égales (Equal Additions), parfois plus rapide. Viennent ensuite diverses applications à des exemples concrets et abstraits.

*Multiplication et division.* La multiplication s'introduira tout d'abord comme une extension de l'addition. Chaque enfant construira ensuite une table de multiplication, il se rendra ainsi mieux compte de son utilité. Il l'apprendra par cœur et s'en servira pour la résolution de problèmes variés, en commençant comme précédemment par des questions de nature concrète et passant ensuite aux opérations sur les nombres abstraits.

Avec la division, deux nouveaux points de vue s'introduisent : l'idée de soustractions consécutives et celle de parties aliquotes. On développera la première à l'aide de problèmes de partage. L'autre aspect de la division, qui suggère l'idée de fractions, pourra s'aborder également au moyen d'exemples concrets ; on introduira quelques fractions très simples, mais ce sujet ne sera qu'effleuré, car c'est uniquement pour donner à l'enfant une notion complète de la division.

*Poids et mesures.* Le sujet constitue la fin du programme d'arithmétique élémentaire. Les élèves qui l'abordent commencent leur neuvième année en moyenne. L'enfant devra peser, mesurer et construire lui-même ses tables, en commençant par le système des poids et mesures anglais, et en les appliquant à de nombreux exercices oraux et écrits. On passe ensuite au système métrique. L'auteur fait remarquer combien l'adoption de ce système en Angleterre simplifierait les choses, étant donné son caractère plus rationnel et plus logique que le système anglais.

*Mesure des aires et des volumes.* A l'aide du papier quadrillé il sera facile de montrer à l'enfant comment on doit s'y prendre pour évaluer une surface. On lui fera construire une table de yards, feet et inches carrés, dont il se servira pour la mesure des aires. On procédera de même pour le système métrique. L'évaluation des volumes s'obtiendra tout d'abord à l'aide de petits cubes et se poursuivra d'une façon analogue.

Ce programme termine la quatrième année scolaire. Pendant la dernière année, il a commencé la géométrie d'une façon purement expérimentale et pratique. Pendant la sixième et la septième année qui se passent dans la classe I, il s'est exercé à la confection de modèles géométriques en carton.

Les leçons de géométrie comprennent tout d'abord de nombreux exercices sur les points et les lignes droites ou courbes, évaluation de longueurs, dessins de plans à l'échelle, mesure des distances sur les cartes, etc. ; on s'occupe ensuite du cercle et des angles. Durant toute cette première étude, on évite autant que possible les procédés euclidiens, le travail n'étant qu'une simple préparation aux démonstrations logiques des propositions.

On peut constater deux tendances dans l'enseignement mathématique de ces dernières années qui consistent à

1. Préparer le travail futur de l'élève et lui constituer une base solide au cas où il poursuivrait ses études mathématiques.

2. Faire en sorte que, même dans le cas où le travail mathématique de l'élève finirait à sa neuvième année, son développement intellectuel lui soit un puissant auxiliaire dans sa vocation future.

## N° 12. — Les mathématiques et les branches techniques dans l'enseignement moyen.

*Mathematics with relation to engineering work in schools*[1], by Mr. T. S. Usherwood, Head of the Manual Training School, Christ's Hospital, West Horsham. Dans la première partie de son rapport, l'auteur résume le travail qui se fait actuellement dans une école secondaire ordinaire (secondary school) possédant un laboratoire d'ingénieurs ; dans la seconde partie, il en propose la réorganisation. L'école dont il s'agit ici plus spécialement est St-Dunstan's College, Catford, comprenant une division supérieure, avec sections littéraire, commerciale et technique, et une division inférieure renfermant une section latine et une section non latine. A son entrée dans la section technique (Technical IV) l'élève est âgé de 13 ans environ. Il est sensé connaître l'arithmétique, un peu d'algèbre et de géométrie expérimentale. Le fait d'être dans cette section ne constitue pas à proprement parler une spécialisation, car six ou sept leçons par semaine seulement sont consacrées aux branches essentiellement techniques (Engineering), les autres leçons se prenant avec les élèves des autres sections.

Les branches techniques, enseignées par l'auteur, comprenaient le travail des métaux, la mécanique expérimentale et le dessin mécanique. La principale difficulté concernait l'enseignement de la mécanique expérimentale. Les sujets suivant furent choisis : Poids, mouvement, tension des fils, machines, frottement. La méthode de travail adoptée avait spécialement pour but de cultiver l'esprit scientifique de l'élève, chaque objet d'étude étant l'occasion de recherches analytiques et d'investigations appropriées. Pour nous donner une idée plus précise des procédés employés, l'auteur nous expose en détail les leçons sur le « mouvement ». On se rendra compte que dans cet enseignement le dessin mécanique et la mécanique expérimentale aussi bien que le travail manuel sont avant tout considérés comme l'occasion d'investigations mathématiques. L'élève comprendra l'importance de l'emploi des expressions algébriques, se familiarisera avec la notion de fonction et les représentations graphiques. L'étude des forces et de leur équilibre ainsi que celle du mouvement conduira à l'usage de la notation vectorielle. Cependant toute incursion dans le domaine des mathématiques pures se fait dans un but utilitaire, chaque problème étant posé de telle façon que l'élève en réalise l'importance pratique. Toute question est abordée sous son aspect concret, les méthodes déductives n'étant pratiquées que lorsque le développement mental de l'élève s'y prête. La promotion en Technical VI se fait à l'âge de 16 ans environ. A ce moment deux alternatives se présentent à l'élève : se préparer pour l'un ou l'autre des collèges techniques ou entrer directement dans quelque manufacture industrielle, chimique, ou autre, et poursuivre ses études théoriques dans les cours du soir. La première alternative est préférable, la seconde devant être considérée comme un surmenage. Le travail de la Technical VI consistait donc en une préparation à l'entrée d'un collège d'ingénieur. La répartition des heures était la suivante : branches d'ingénieurs 10, science 8, physique 4, chimie 4, mathématiques 7, branches littéraires 7. L'une des dix heures consa-

[1] fasc. de 26 p. ; prix : 2 d., Wyman & Sons, Londres.

crées aux branches d'ingénieurs fut affectée aux mathématiques pratiques, 5 au dessin géométrique et mécanique, 2 à la mécanique expérimentale, 2 au travail métallique. Durant les heures de dessin, certains détails de machines furent abordés, nécessitant une étude plus avancée de géométrie pratique plane et solide. La géométrie descriptive fut développée expérimentalement sous forme de problèmes de dessin mécanique. La mécanique expérimentale fut envisagée à un point de vue plus systématique, en combinant le côté expérimental et le côté théorique. Enfin le temps réservé aux mathématiques proprement dites fut principalement consacré à l'introduction naturelle du calcul vectoriel et du calcul différentiel et intégral. A ce propos, le rapport nous fournit une foule de détails que nous ne pouvons reproduire ici. Disons seulement qu'au bout de deux ans de travail, en y consacrant une leçon par semaine en moyenne, les connaissances acquises dans ces branches furent suffisantes pour permettre aux élèves d'en apprécier l'importance et l'utilité.

L'auteur présente ensuite quelques observations concernant le système actuel d'enseignement. Il arrive souvent, dans les conditions présentes, que le maître de mathématiques est obligé de négliger complètement certains aspects de son sujet ou de les introduire d'une façon purément mécanique sans que l'élève puisse se rendre compte de l'utilité de cette introduction. Or, au point de vue éducatif il importe au contraire que toute nouvelle question se présente naturellement à l'esprit de l'élève et soit motivée par son travail antérieur. Un autre fait à déplorer c'est l'usage des manuels dans les classes inférieures. Dans l'enseignement supérieur les manuels sont indispensables, mais il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit d'élèves moins avancés; il est alors préférable que chacun fasse son propre manuel. Ce procédé a été adopté pour les branches scientifiques durant ces huit ou neuf dernières années et il en est résulté une amélioration sensible. On devrait aussi généraliser ce système dans l'enseignement mathématique des classes inférieures. Il faudrait également que les maîtres eussent une plus grande liberté dans le choix du sujet de leur enseignement et dans la façon de le présenter.

L'auteur propose une réorganisation des programmes où l'on réserverait une plus large place aux travaux manuels, spécialement dans l'enseignement inférieur. Par travail manuel il ne s'agit pas de simples exercices dans le maniement des outils, mais bien d'un travail intelligent, où l'esprit de l'élève est en jeu et dans lequel une certaine liberté lui est accordée dans le choix de ses méthodes.

Le programme concernant l'arithmétique pure devrait être simplifié et se réduire pratiquement à la multiplication, la division et aux proportions. En algèbre il serait nécessaire d'insister sur la notion de fonction et d'utiliser plus intelligemment les représentations graphiques. En géométrie, enfin, il y aurait avantage à réunir la stéréométrie et la planimétrie. Il serait alors possible d'introduire dans les classes avancées certains sujets négligés jusqu'à présent, ou traités superficiellement par suite du manque de temps (calcul infinitésimal, calcul vectoriel, analyse harmonique, théorème de Fourier, équations différentielles simples, etc.). Il s'agit simplement d'écarter les restrictions artificielles, d'encourager l'individualité et de favoriser les méthodes d'investigation.

## N° 13. — L'Arithmétique dans les Ecoles secondaires.

*The teaching of Arithmetic in Secondary Schools*[1], by Mr. G. W. Palmer, Mathematical Master at Christ's Hospital, Horsham. — Ce rapport concerne plus spécialement les *Public Schools*, mais s'applique également d'une façon générale aux établissements secondaires. A son entrée à l'école, l'élève doit connaître au minimum la numération, les quatre règles, l'usage des nombres complexes, et les éléments des fractions ordinaires. Malheureusement, dans bien des écoles préparatoires cet enseignement préliminaire laisse beaucoup à désirer, ce qui rend plus difficile la tâche du maître secondaire. Dans les classes inférieures des écoles secondaires, l'arithmétique est enseignée généralement par un non-spécialiste. Cette remarque est importante, car un non-spécialiste, tout en étant peut-être un excellent maître, sera tout naturellement plus conservateur, moins enthousiaste des réformes que le mathématicien.

Afin de pouvoir mieux juger des tendances actuelles de l'enseignement de l'arithmétique, l'auteur nous fait une description de cet enseignement tel qu'il se pratiquait il y a 25 ans, puis il nous montre ce qu'il est devenu à l'heure actuelle. Il y a 25 ans, l'arithmétique était à la veille d'une importante transformation. Avant cette époque, elle s'était développée à un point de vue presque exclusivement commercial. Sa valeur éducative n'était pas reconnue et son enseignement se faisait d'une manière fort peu rationnelle ; il suffisait généralement d'avoir appris les règles et de pouvoir les appliquer. Plus tard, lorsque les mathématiques devinrent une partie importante de l'éducation générale, on cessa de considérer l'arithmétique comme une branche purement commerciale et l'on commença à tenir compte de son utilité comme base de l'enseignement mathématique futur et des services qu'elle est appelée à rendre dans d'autres domaines, particulièrement la physique.

L'auteur passe ensuite aux détails de cet enseignement d'il y a 25 ans et s'occupe successivement des différents chapitres d'une façon plus approfondie (numération, les quatre règles, nombres complexes, plus grand commun multiple, fractions, fractions décimales, fractions décimales périodiques, pratique, aires et volumes, méthode de réduction à l'unité, pourcentage, profits et pertes, intérêts, escompte, etc., racines carrée et cubique, moyennes, alliages, partages proportionnels, etc.).

Après cela nous abordons l'arithmétique moderne. C'est la « Mathematical Association », société de maîtres de mathématiques qui, en fait, a pris la direction des réformes récentes. En 1902, cette association publia un rapport où étaient indiquées les transformations les plus urgentes à introduire dans l'enseignement mathématique. Dans la partie concernant l'arithmétique et l'algèbre, on signalait en particulier le danger qu'il y avait de sacrifier la compréhension claire du sujet à l'habileté mécanique, tendance fort nuisible à la véritable valeur éducative de ces sujets. Pour combattre cet état de chose, on y faisait les recommandations suivantes : pratiquer fréquemment des exercices de vive voix, insister sur l'importance des principes fondamentaux, généraliser les règles en s'appuyant autant que possible sur la propre

[1] 1 fasc. de 33 p. prix : 2 1/2 d. ; Wyman & Sons, Londres.

expérience des élèves, appliquer la géométrie, en particulier les représentations graphiques, à l'arithmétique et à l'algèbre, remettre à plus tard les règles trop difficiles et les exercices trop compliqués.

Après diverses remarques concernant ces observations générales, l'auteur s'occupe plus spécialement des différents chapitres de l'arithmétique moderne (numération, les quatre règles, les nombres complexes, système métrique et fractions décimales, facteurs et multiples, fractions ordinaires, parenthèses, méthode de réduction à l'unité, proportions, variations, pourcentages, racine carrée, aires et volumes de figures rectangulaires, mesures, approximation, logarithmes, méthodes de calcul, intérêts simples, intérêts composés, escompte, etc., représentations graphiques, problèmes).

En résumé, les *tendances modernes* concernant l'enseignement de l'arithmétique sont les suivantes : Ecarter du programme bon nombre de chapitres dont on peut parfaitement se dispenser, éliminer également tout développement compliqué et d'un caractère purement artificiel. Cette élimination permettrait d'insister par contre sur les parties plus importantes et d'introduire plus tôt d'autres domaines des mathématiques, par exemple la trigonométrie. Rendre les notions nouvelles aussi réelles que possible à l'aide d'applications concrètes (point de vue géométrique, diagrammes, représentations graphiques, travail de laboratoire).

Les commissions d'examens peuvent contribuer pour une large part à la réalisation de ces réformes. Mais actuellement, il faut le constater, la majorité des questions d'examens constituent un sérieux obstacle aux changements qui devraient se faire dans l'enseignement mathématique.

## N° 14. — Scholarships (Bourses d'études).

*Examinations for Mathematical Scholarships*[1], by Dr. F. S. Macaulay, Assistant Master at St Paul's School, London, and Mr. W. J. Greenstreet, Editor of the « Mathematical Gazette » and late Head Master of the Marling Endowed School, Stroud. — Actuellement les universités, collèges et établissements publics des Iles Britanniques ont à leur disposition des bourses permettant aux jeunes gens non fortunés de poursuivre leurs études s'ils ont fait preuve de capacités suffisantes. Autrefois ces bourses étaient dues à la générosité de certains donateurs particuliers, mais à l'heure qu'il est, l'Etat lui-même y prend part de plus en plus. Ce sont naturellement les meilleurs candidats qui ont droit à ces facilités leur permettant l'entrée à Cambridge, Oxford, etc. Il en est résulté que l'obtention de ces bourses constitua de plus en plus un honneur pour l'école d'où sortait le candidat. Peu à peu le travail même de l'école s'en ressentit, il se régla en vue précisément de ces examens d'entrée aux universités et l'on put dire que l'école secondaire n'était que le vestibule de l'université. Cette façon de procéder présentait de graves inconvénients. Il n'était pas juste de sacrifier les intérêts de la majorité à ceux de quelques-uns se proposant d'achever leurs études à l'université. Actuellement, grâce au « Board of Education » cet état de chose a été modifié. Dans le domaine des mathématiques, spécialement, une distinction est faite entre le mathématicien professionnel et les élèves

[1] 1 fasc. de 53 p.; prix : 3 d.; Wyman & Sons, Londres.

qui n'ont pas l'intention de continuer à l'université ; le programme n'est pas non plus le même pour les garçons et les filles.

Il existe plusieurs sortes de bourses : Foundation Scholarships, Scholarships, Major Scholarships, Minor Scholarships, Exhibitions, Sizarships, Bursaries, selon leur provenance ou leur montant.

Cet argent est fourni par les universités elles-mêmes, par les écoles et par le gouvernement, les « County Councils » et autres corps publics. En Ecosse, les « bursaries » sont délivrées à la suite d'examens généraux comprenant les mathématiques comme branche obligatoire. L'entrée à l'université (Edinburgh, Glascow, Aberdeen, S^t-Andrews) se fait plus tôt qu'en Angleterre. En Irlande, la « Queen's University of Belfast » et la « National University of Ireland » disposent de quelques bourses ; l'Université de Dublin en délivre un plus grand nombre, mais le système qui en règle la distribution laisse plutôt à désirer ; ainsi les connaissances mathématiques que l'on exige de la part des candidats sont insuffisantes. En Angleterre proprement dite, les petites universités et l'Université de Wales ne possèdent qu'un nombre restreint de « Scholarships » ; l'Université de Londres n'en a aussi que relativement peu. En juin, des candidats âgés de moins de 18 ans peuvent se présenter à un examen pour l'obtention de 5 bourses de 40 l. par an, valables pour deux ans. L'une de celles-ci concerne les mathématiques combinées à une branche accessoire. En juillet également, 19 « scholarships » de 50 l. valables pour une année sont mises en compétition, dont 3 pour les mathématiques. A Oxford et Cambridge, les examens qui permettent d'obtenir les « scholarships » sont pratiquement identiques. A Cambridge on délivre chaque année une cinquantaine de bourses diverses pour les mathématiques, dont le montant varie de 30 l. à 80 l.; à Oxford une trentaine. Les branches exigées sont la géométrie, l'algèbre, la trigonométrie, le calcul différentiel et intégral et la mécanique.

A Cambridge, ces examens peuvent être divisés en deux groupes : le « Trinity College group » comprenant cinq collèges et le « Pembroke and S^t-John's group » qui en comprend sept. Pour les deux groupes, les examens se passent en même temps, au mois de décembre, de sorte qu'il n'est pas possible au candidat de se représenter la même année s'il ne réussit pas la première fois.

Il y a vingt ou trente ans, les questions d'examen se répartissaient à peu près également en questions théoriques et questions pratiques. Plus tard la théorie a été supprimée, car on pensait que ce n'était qu'une affaire de mémoire et que seuls les problèmes rendaient possible l'appréciation exacte de la valeur d'un candidat. Aujourd'hui on en est revenu, et l'on estime que certaines questions théoriques peuvent être introduites avantageusement dans les examens, car elles présentent de l'intérêt par la façon originale dont elles peuvent être traitées et parce qu'elles permettent de juger si le candidat est capable de s'exprimer d'une manière intelligible.

Dans le « Trinity group » les questions d'examens présentent une grande variété ; celles du « Pembroke group », par contre, sont plus uniformes. L'auteur formule quelques critiques personnelles concernant ces questions d'examens et relativement aux diverses branches sur lesquelles elles roulent. Pour l'algèbre, les questions sont en nombre insuffisant étant donné la grande variété de sujets qui s'y trouvent renfermés (convergence des séries, fractions continues, déterminants, probabilités, théorie des nombres, théorie des équations). L'examen de géométrie ne devrait pas rouler exclusivement

sur la géométrie moderne, mais devrait comprendre également des applications géométriques du calcul différentiel et intégral. Il faut féliciter Cambridge et Oxford d'avoir refusé d'accorder aux méthodes graphiques plus d'importance qu'elles n'en méritent, et cela malgré l'insistance avec laquelle certains enthousiastes chantent leurs merveilles. Les méthodes graphiques appliquées à la résolution de questions de statiques sont utiles à l'ingénieur, mais ne présentent que peu d'importance pour le mathématicien. Les questions des examens de statique et de dynamique présentent un réel progrès sur celles du passé, car elles n'étaient autrefois qu'une source de perplexité pour l'étudiant.

Un point sur lequel l'auteur insiste tout spécialement, c'est l'importance de la géométrie pure dont les méthodes ne présentent pas l'aridité de celles de l'analyse élémentaire.

L'un des inconvénients inévitables d'un système d'examens c'est la publication de manuels écrits spécialement à leur effet. Il existe pourtant d'excellents manuels n'ayant en vue aucun examen particulier, mais ils n'ont pas obtenu jusqu'à présent le succès qu'ils mériteraient.

Le jury chargé de la décision des questions d'examens devrait être composé d'experts suffisamment nombreux et vraiment capables. Toute question artificielle, ou dont la solution ne dépend pas de quelque méthode ou principe important, devrait être éliminée sans scrupule.

On trouvera en appendice deux rapports publiés par la « Mathematical Association », l'un, publié en 1904, porte le titre : *Report on Advanced School Mathematics*, et l'autre, paru en 1907, intitulé : *Report on Entrance Scholarships at the Universities.* On y a joint également des spécimens de questions d'examens provenant des Universités de Cambridge, Oxford et Londres.

## N° 15. – La valeur éducative de la géométrie.

*The Educational Value of Geometry*[1], by Mr. G. St. L. Carson, Head Mathematical Master at Tonbridge School. — Comme le titre l'indique, ce rapport n'envisage pas la géométrie au point de vue de ses applications dans d'autres sciences ou de son importance pratique, ni même relativement à la place qu'elle occupe dans l'éducation mathématique proprement dite. Il se propose uniquement d'établir les raisons pour lesquelles cette branche est universellement acceptée comme un élément nécessaire de l'éducation générale. Pour cela, il est nécessaire d'expliquer d'une façon quelque peu détaillée ce qu'est réellement la géométrie. Cette branche est basée sur un certain nombre de faits fondamentaux qui résultent de l'expérience. Il importe d'insister sur cette nature particulière des principes fondamentaux. Pour cela il s'agira :

1. De distinguer ce qui est essentiel de ce qui est secondaire dans l'appréciation des points, lignes et plans et dans leurs relations mutuelles.

2. De baser sur cette appréciation des raisonnements logiques, sous forme d'enchaînements continus.

3. De discuter la dépendance mutuelle des principes et de les établir d'une façon précise.

---

[1] 1 fasc. de 17 p.; prix : 1 ½ d.; Wymann & Sons, Londres.

Cette façon de procéder est commune à toute forme de construction humaine, et, à ce point de vue, la valeur éducative de la géométrie est indiscutable.

Un autre facteur qui a son importance et sur lequel on n'insiste malheureusement pas assez, c'est la valeur esthétique de la géométrie. La contemplation de systèmes logiques inattaquables tels qu'on en trouve dans les mathématiques évoque en nous une idée de perfection différente de celles qu'on rencontre dans la littérature et dans les arts.

Au point de vue éducatif, l'étude de la géométrie peut se diviser en trois périodes correspondant aux trois divisions citées plus haut. Dans la première, on cherchera surtout à stimuler et développer l'imagination. Dans la seconde c'est le raisonnement qui joue le principal rôle. Dans la troisième on discutera les principes qui servent de base au corps géométrique et l'on recherchera leurs relations mutuelles. On ne s'occupera pas ici de cette troisième division car elle ne rentre généralement pas dans le cadre des études scolaires.

Dans la première époque de l'éducation géométrique, il s'agira donc de stimuler l'imagination de l'enfant en développant les impressions qu'il est capable de ressentir. Pour cela, il faudra faire appel à des notions qui lui sont familières (maisons, routes, montagnes, îles, etc.). Il n'est pas difficile de concevoir des problèmes répondant à cette condition, stimulant l'imagination, développant l'esprit de recherche et le raisonnement géométrique dans ses formes les plus simples. On peut diviser ces problèmes en cinq groupes :

1. Construction de triangles et de polygones, les données n'étant que des longueurs.
2. Simples constructions pour déterminer la hauteur de bâtiments, la route de vaisseaux, etc., dépendant des indications de la boussole et d'angles d'élévation.
3. Construction de triangles et de polygones, les données étant des longueurs et des angles.
4. Extension des questions précédentes à des problèmes comportant plus d'un seul plan.
5. Détermination d'un point par l'intersection de deux lieux géométriques ou de ses limites lorsqu'il est astreint à rester à l'intérieur ou à l'extérieur de plusieurs lieux géométriques.

Les applications devront se faire d'abord relativement à des objets définis, puis sur des représentations mentales de classes d'objets, ensuite sur des abstractions (point, ligne, couleur, etc.) et pour finir on considérera le procédé lui-même dans toute sa pureté. Cette façon d'opérer peut être regardée comme une introduction aux idées de groupe et de fonction.

La transition entre ce stage préliminaire et le premier cours de géométrie formelle se fera par l'introduction progressive du raisonnement déductif et en cessant graduellement l'emploi d'objets concrets servant à renforcer l'imagination. Dans un premier cours de géométrie toute proposition qu'il est possible de faire accepter à l'enfant sans mesure d'aucune sorte devrait être adoptée comme un postulat. Cette définition comprend : 1. L'égalité des angles opposés par le sommet, 2. Les propriétés des parallèles relativemement aux angles, 3. Les propriétés des figures qui sont évidentes par symétrie, 4. Les propriétés des figures qui peuvent être démontrées par superposition. Tout théorème proprement dit devrait démontrer une propo-

sition nouvelle qu'il n'aurait pas été possible d'apercevoir par intuition directe, symétrie ou superposition.

Si l'on se demande où les méthodes de la géométrie se présentent avec le plus d'unité, de simplicité et de beauté, il faut répondre que c'est en géométrie de position et en géométrie projective. Ces branches doivent-elles rester la propriété exclusive des mathématiciens de profession et sont-elles vraiment hors de portée de l'adolescent? L'auteur pense que les notions et méthodes élémentaires de la géométrie projective peuvent être comprises par des élèves ordinaires, qu'elles présenteront un plus grand intérêt qu'une forme quelconque de la géométrie euclidienne et que leur valeur éducative est de beaucoup supérieure. Des expériences concluantes ont été faites à ce propos, soit sur des élèves individuels, soit sur de petites classes.

En ce qui concerne la dépendance mutuelle des postulats, une discussion détaillée ou systématique serait déplacée dans un programme scolaire; cependant quelques exemples de déduction de postulats les uns des autres pourraient être traités; il serait alors possible de faire réaliser à l'élève l'idéal d'une géométrie basée sur le plus petit nombre d'axiomes possible. L'auteur est également convaincu que tout étudiant ayant l'idée de poursuivre son éducation à l'université devrait avoir quelques notions sur la nature de la géométrie non-euclidienne.

Pour bien se rendre compte des tendances actuelles de l'enseignement de la géométrie en Angleterre, il suffit d'examiner les transformations qu'il a subies ces derniers temps. Il y a quelques années Euclide y était encore exclusivement en usage. Peu à peu, les différentes écoles se libérèrent de cette stricte obligation, et en 1903 l'Université de Cambridge publia un programme où il était spécifié que les examinateurs accepteraient toute démonstration systématique des questions proposées. Il faut noter aussi deux points importants: l'introduction des cours préliminaires et la pratique des exemples numériques. Le but de ces préliminaires est de familiariser l'enfant avec les notions fondamentales du sujet; ils consistent principalement en exercices de mesure et de construction; il faut seulement regretter que la géométrie de l'espace n'y occupe pas une place plus importante. De tels cours devraient être basés sur l'extension graduelle de l'expérience et de l'imagination de l'enfant, ce qui n'est malheureusement pas le cas: il est enfin regrettable d'y rencontrer cette tendance, dont il a été question plus haut, à faire intervenir des procédés numériques à propos des postulats.

On trouvera dans une circulaire[1] publiée par le *Board of Education* (N° 711, 1909) d'intéressants renseignements sur les transformations de ces dernières années et quelques conseils pratiques concernant l'enseignement. C'est surtout dans les écoles secondaires modernes qu'on constate une amélioration sensible, beaucoup plus que dans les établissements de l'ancien type qui sont restés comparativement stationnaires. C'est que les écoles modernes ont à leur disposition des maîtres qui non seulement connaissent bien leur sujet mais savent également comment l'enseigner. C'est là surtout qu'il faut chercher la raison de ce progrès, plutôt que dans les récents changements de programme.

---

[1] Traduite dans l'*Ens. math.* du 15 mai 1910, p. 238-253.

## N° 16. — La géométrie dans l'enseignement moyen.

*A School Course in advanced Geometry*[1], by Mr. C. V. Durell, Assistant Master at Winchester College. — Etant donné le rôle considérable que joue la géométrie dans les programmes scolaires, il est important d'assurer une coordination aussi complète que possible entre les diverses formes que présente cette branche. Jusqu'à présent on n'a pas suffisamment tenu compte de l'unité fondamentale du sujet. Ce manque de cohésion entre les différentes branches de la géométrie occasionne nécessairement de nombreuses répétitions et par suite une perte de temps considérable.

Si l'on examine le champ de géométrie exigé de la part d'un candidat en mathématiques à son entrée à l'université, on se demande comment le maître peut arriver au bout de son programme :

*a)*. Euclide, livres I-IV, VI.

*b)*. Principes élémentaires de stéréométrie et notions fondamentales de stéréométrie pratique.

*c)*. Etude plus approfondie des propriétés du triangle et du cercle et théorie des faisceaux.

*d)*. Géométrie analytique, coordonnées cartésiennes et polaires et quelques notions sur les coordonnées homogènes.

*e)*. Les coniques au point de vue géométrique en se basant sur la définition relative au foyer et à la directrice.

*f)*. Projections orthogonales et coniques.

*g)*. Dualité.

*h)*. Homographie et involution.

Si chacun de ces sujets doit être traité séparément et d'une façon suffisamment complète, il est clair que le temps dont on dispose est tout à fait insuffisant. Il en résulte que certains d'entre eux seront laissés complètement de côté ou envisagés très superficiellement. Ainsi, à part les spécialistes il n'y a que bien peu d'élèves qui abordent les sujets *f)*, *g)*, *h)*.

Il s'agit d'examiner ici s'il ne serait pas possible de modifier l'ordre généralement adopté dans l'étude de la géométrie, de façon à profiter plus avantageusement du temps dont on dispose.

Ainsi, la question des projections présente un intérêt tout particulier car elle ouvre à l'étudiant des horizons nouveaux et constitue pour lui un précieux instrument d'investigation. Il serait donc fort regrettable d'omettre ce sujet. Pour en commencer plus tôt l'étude, deux changements seraient nécessaires : l'étude analytique des coniques devrait se faire en même temps que l'exposé des propriétés géométriques simples ; puis l'étude approfondies des coniques au point de vue géométrique, *e)*, ne devrait se faire que plus tard, une fois que les résultats élémentaires de la géométrie projective auraient été établis.

Si l'on mène de front les procédés analytiques et géométriques on aura l'avantage de pouvoir choisir entre les deux méthodes dont on dispose pour résoudre les diverses questions qui se présenteront. Le mieux sera de se servir des moyens les plus simples, analytiques ou géométriques suivant les cas ; l'élève se rendra compte ainsi des avantages que présente l'une des

---

[1] 1 fasc. de 14 p. ; prix : 1 ½ d. ; Wymann & Sons, Londres.

méthodes sur l'autre selon le genre de la question; sans parler de l'économie de temps réalisée. L'introduction des éléments à l'infini peut se faire d'une façon intéressante par l'un ou par l'autre procédé; étant donné l'importance du sujet, on pourra avantageusement présenter les deux points de vue.

Une autre question se pose : jusqu'à quel point doit-on avoir recours à l'analyse pour établir les théorèmes fondamentaux des projections. Au point de vue de l'enseignement, les démonstrations analytiques des théorèmes fondamentaux seront plus accessibles que d'autres à l'ensemble des élèves, car si l'on exclut la méthode analytique, on rencontrera de grandes difficultés lorsqu'il faudra identifier la définition des coniques obtenue en partant des projections et celle qui est basée sur les notions de foyer et directrice.

L'auteur examine ensuite d'une façon plus détaillée ces diverses modifications touchant à l'enseignement de la géométrie. Le nouveau plan d'études qu'il nous propose a été conçu conformément aux trois idées directrices suivantes :

1. Economiser du temps en évitant les répétitions inutiles.
2. Mettre à la portée de l'élève moyen ces importantes notions de continuité, projectivité, transformation, si propres à stimuler l'intérêt et qui font de la géométrie supérieure un sujet d'une si haute valeur éducative.
3. Elaborer un programme qui, tout en étant accessible à l'élève n'ayant pas de dispositions spéciales pour les mathématiques, constitue cependant une préparation suffisante pour le spécialiste.

Contentons-nous d'indiquer les principaux avantages que présenterait ce nouveau programme qui, du reste, a déjà été expérimenté ces dernières années :

1. On économise un temps considérable en réunissant en un seul sujet les théories analytique, géométrique et projective des coniques; on saisit mieux l'unité du sujet et l'on a une idée plus nette de ses principes fondamentaux.
2. Le changement de point de vue stimule l'intérêt de l'élève, lui donne un sentiment de maîtrise et l'engage à pousser plus loin ses investigations.
3. L'étude de la géométrie projective ne restera plus un domaine exclusivement réservé aux spécialistes.

## N° 17. — Ecoles navales.

*Mathematics at Osborne and Dartmouth*[1], by Mr. J. W. Mercer, Head of the Mathematical Department of the Royal Naval College, Dartmouth, with a Preface by M. C. E. Ashford, Head Master of the College.

*Introduction.* — Le Collège d'Osborne a été fondé pour permettre aux cadets de commencer leur service plus tôt. Ils y entrent à 13 ans déjà et y passent deux ans. A Osborne et Dartmouth, la moitié des heures de travail environ est consacrée aux sciences et aux travaux d'ingénieurs; le tiers ou la moitié de ce temps se passant à l'atelier. Durant les deux années d'Osborne, les mathématiques se répartissent en 6 ½ heures d'enseignement et 2 heures de préparation par semaine. A Dartmouth, pendant la première

[1] 1 fasc. de 41 p.; 2 ½ d.: Wyman and Sons, Londres.

année, 5 heures d'enseignement et 2 $^1/_2$ heures de préparation et, pendant la seconde année, 6 heures d'enseignement et 3 $^1/_2$ heures de préparation, mais ces heures comprennent le temps consacré à la navigation, c'est-à-dire 3 $^1/_2$ heures par semaine durant la seconde année. Après avoir quitté Dartmouth, les cadets passent 8 mois sur un croiseur spécial où ils reçoivent un enseignement pratique ; en outre, les élèves les plus capables y poursuivent l'étude des mathématiques pures. D'une façon générale, la préparation actuelle des officiers de marine est moins essentiellement mathématique qu'autrefois, mais la mécanique y joue un rôle plus prépondérant. Le temps consacré aux mathématiques étant moins considérable qu'autrefois, il importe de l'utiliser convenablement. A ce point de vue, les récentes transformations de l'enseignement mathématique et l'élimination d'un bon nombre de chapitres inutiles et surannés permettent une sensible économie de temps. Une certaine partie des cadets (moins de la moitié probablement) n'ont pas l'occasion de poursuivre l'étude des mathématiques supérieures pendant les stages subséquents de leur carrière ; ils formeront le corps des officiers généraux *(general service officers)*. Mais ceux qui désirent devenir officiers spécialistes devront suivre, à leur sortie de Darmouth, des cours spéciaux à Greenwich et ailleurs. C'est pourquoi il existe à Osborne et Darmouth, à côté du cours de mathématiques pratiques, un cours supplémentaire moins concret servant de préparation à ces cours spéciaux.

Une fois leurs études théoriques terminées et après avoir accompli leur stage de 8 mois à bord du croiseur dont il a été question, les cadets doivent faire un service de 5 ans sur mer afin d'entrer dans l'activité même de leur profession. A la fin de cette période, les spécialistes devront suivre des cours de mathématiques avancées, il faudra qu'ils se remettent au travail théorique après une interruption de 5 ans. Si l'on veut donc que cette interruption ne leur soit pas trop nuisible, il faudra tenir compte de ces circonstances dans l'enseignement mathématique d'Osborne et Darmouth : insister plus particulièrement sur la méthode de travail plutôt que de chercher à acquérir une grande habileté dans la manipulation des symboles.

*Les mathématiques à Osborne et Dartmouth.* — Les mathématiques ne sont enseignées aux cadets de marine qu'en tant qu'instrument utile pouvant servir dans la physique, la navigation, les travaux d'ingénieurs, etc. Il ne faudrait cependant pas en conclure qu'elles se réduisent à l'étude de quelques règles empiriques ; on insiste également sur l'enchaînement logique des idées et l'on développe l'esprit d'initiative de l'élève afin qu'il soit à même d'utiliser ses connaissances à la résolution des problèmes.

Le programme de mathématiques comprend : *a)* un cours minimum qui doit être suivi par tous ; *b)* un cours de compléments pour les meilleurs élèves des classes inférieures ; *c)* un cours de compléments pour les meilleurs élèves des classes supérieures ; *d)* un cours encore plus avancé pour un très petit nombre de cadets ayant des aptitudes toutes particulières.

L'auteur passe en revue les différentes branches de l'enseignement mathématique, tout en remarquant qu'un même problème peut être envisagé généralement de différentes manières et qu'il est bon de laisser l'élève libre de choisir telle ou telle méthode.

*Arithmétique.* Les questions concernant les opérations financières et les problèmes dont la résolution exige certains artifices spéciaux étaient autrefois beaucoup trop nombreux. L'enseignement actuel vise à l'exactitude et la facilité dans les opérations élémentaires, à une connaissance approfondie

du système métrique et à l'usage courant des logarithmes à 4 décimales. On insiste particulièrement sur l'exactitude des calculs en habituant les élèves à de fréquentes vérifications, et sur le degré d'approximation des résultats.

*Algèbre.* L'élève doit acquérir une habileté suffisante dans la manipulation des expressions algébriques, mais on laisse de côté tous ces exercices fastidieux sur la simplification des fractions, ou ces artifices spéciaux concernant la résolution des problèmes. Ici également, on insiste sur la vérification des solutions trouvées. On fait constamment appel à la notion de fonction et aux représentations graphiques. On habitue les élèves à saisir toute la portée d'un graphique et à en tirer tous les renseignements possibles. Le champ d'études comprend en outre la résolution des équations du premier et du second degré, la détermination de maxima et minima, le calcul des racines et des puissances en se bornant aux règles fondamentales. La question des logarithmes est amenée progressivement de façon à en bien faire saisir la signification et la portée. L'étude de la variation d'une fonction d'une ou plusieurs variables se fera à l'aide de nombreuses applications pratiques tirées de différents domaines tels que la géométrie, la physique, etc.

*Géométrie.* Le but poursuivi peut se résumer brièvement de la façon suivante : 1. Doter l'élève d'un certain nombre de faits géométriques. 2. Le rendre capable d'appliquer ses connaissances géométriques à la résolution de problèmes. 3. L'habituer à raisonner convenablement et à s'exprimer avec précision. Le programme comprend la géométrie plane et de l'espace et un cours préliminaire de géométrie sphérique servant d'introduction à la trigonométrie sphérique et à l'astronomie de marine. Le travail est essentiellement d'ordre pratique, la théorie étant constamment illustrée d'applications concrètes et de mesures effectives

*Trigonométrie.* Les rapports trigonométriques sont introduits progressivement en commençant par la tangente et en motivant cette introduction à l'aide d'applications pratiques. Relativement à la résolution des triangles rectangles, les cadets étudient la « Traverse Table » qui présente pour eux une importance toute particulière. Les triangles quelconques sont traités tout d'abord comme somme ou différence de triangles rectangles puis on passe aux formules plus générales.

En ce qui concerne la trigonométrie sphérique, le nombre des formules absolument indispensables a été considérablement réduit, grâce aux simplifications introduites dans l'enseignement de l'astronomie nautique.

*Calcul différentiel et intégral.* La moitié des cadets environ entreprennent l'étude de cette branche durant leur dernière année à Dartmouth. On attache beaucoup plus d'importance à la compréhension du sujet et à son utilité qu'à l'habileté du calcul. Avant d'introduire la notation du calcul différentiel, on s'occupe assez longuement des notions de vitesse à un instant donné et de pente en un point donné d'une courbe. Après avoir traité un grand nombre de cas particuliers, l'élève ressent lui-même le besoin de généraliser ces procédés. Comme application des dérivées, citons les maxima et minima, les propriétés géométriques des courbes, les questions de vitesses et accélérations, d'approximation, d erreur relative, etc

Puis on passe au problème inverse, c'est-à-dire à la recherche de la fonction primitive, et le calcul intégral est introduit par le problème des aires. Comme application on s'occupera de la détermination des surfaces, des volumes de révolution, des centres de gravité, des moments d'inertie, etc.

En somme, les cadets n'étudient le calcul infinitésimal qu'en vue de son utilité pratique, et le but de ce cours élémentaire est de leur montrer les différents genres de problèmes auxquels on pourra l'appliquer.

*Géométrie analytique.* Cette branche est abordée en même temps que le calcul infinitésimal. On se propose uniquement d'exposer quelques principes fondamentaux pouvant être appliqués à l'étude d'une courbe dont l'équation est donnée en coordonnées cartésiennes. On recherche les équations de nombreux lieux géométriques, entre autres de l'ellipse, de la parabole et d'autres courbes intéressantes. La ligne droite est traitée d'une façon détaillée, et l'on s'occupe aussi quelque peu du cercle.

On trouvera en appendice un relevé des questions d'examens proposées en avril 1911.

J.-P. Dumur (Genève).

## N° 18. — Ecoles de jeunes filles.

*Mathematics in the Education of Girls and Women* [1], by Miss Gwatkin, Miss Sara A. Burstall and Mrs. Henry Sidgwick. — Ce rapport se compose de trois parties distinctes :

1. *The value of the Study of Mathematics in Public Secondary Schools for girls* (15 p.) par Miss E. R. Gwatkin, Head Mistress of the Queen Mary's High School, Liverpool.

2. *The place of Mathematics in the Education of Girls and Women* (7 p.) par Miss Sara A. Burstall, Head Mistress of the Manchester High School for Girls.

3. *Higher Mathematics for Women* (9 p.) par Mrs. Henry Sidgwick, late Principal of Newnham College, Cambridge.

1. — *Ecoles publiques secondaires de jeunes filles.* L'importance donnée aux mathématiques dans les écoles de jeunes filles est assez satisfaisante, au moins pour les écoles publiques, mais cette position est menacée de divers côtés. Les programmes trop chargés, entre autres, sont cause que chaque branche d'étude ne peut subsister qu'à la condition de justifier de son utilité. M<sup>lle</sup> Gwatkin s'est proposée de considérer cette question pour les mathématiques, elle envisage à cet effet successivement les différentes objections faites à cette étude et les arguments qui peuvent être allégués pour sa défense. Les principales parmi ces objections sont :

Le peu d'intérêt (relatif sinon absolu) que le sujet semble inspirer à beaucoup de jeunes filles.

La valeur négligeable de cette étude à un point de vue purement utilitaire (cette dernière objection pourrait peut-être expliquer la première).

L'effort hors de proportion avec le résultat acquis nécessité de la part de l'élève par la difficulté du sujet.

L'auteur réfute ces objections en se plaçant à divers points de vue. Plutôt que d'adopter le remède un peu radical consistant à supprimer une étude parce qu'elle semble n'intéresser que médiocrement l'élève, M<sup>lle</sup> Gwatkin estime qu'il faudrait surtout s'appliquer à employer des méthodes d'enseignement plus propres à la rendre attrayante pour les jeunes filles.

De plus, bien qu'il soit possible que la majorité des jeunes filles préfè-

[1] 1 fasc. de 31 p.; 2 $\frac{1}{2}$ d. ; Wymann and Sons, Londres.

rent le domaine littéraire au domaine mathématique, il faudrait s'assurer que cela ne vient pas principalement du fait que celui-là est bien donné depuis plus longtemps que celui-ci. Quant à la question très complexe de l'utilité des études mathématiques, il faudrait pouvoir tenir compte non seulement de l'utilité directe et patente, mais aussi faire sa part au développement général des facultés.

M^lle Gwatkin n'est pas du tout persuadée qu'il y ait plus de différence entre un garçon et une fille pris au hasard qu'entre deux garçons ou qu'entre deux filles pris au hasard.

La difficulté du sujet est loin d'être un obstacle à son maintien dans le plan d'études, au contraire.

Enfin M^lle Gwatkin fait quelques remarques générales sur les relations qui devraient exister entre les enseignements des diverses branches, arithmétique, géométrie, algèbre, et sur la nécessité d'adapter constamment le programme aux aptitudes de chaque classe.

Des adversaires de l'enseignement mathématique avaient proposé de supprimer cet enseignement comme branche obligatoire à l'examen d'admission à l'université ; l'auteur estime que ce serait une erreur, car les jeunes filles incapables de satisfaire pour les mathématiques aux exigences de cet examen, sont généralement aussi inaptes à profiter d'une éducation universitaire.

L'auteur est d'avis qu'il existe un nombre plus considérable qu'on ne le croit communément de jeunes filles qui trouvent un plaisir intellectuel réel dans la connaissance des théorèmes de mathématiques pures tels que ceux que l'on rencontre dans la théorie élémentaire des nombres.

2. — *Les mathématiques dans l'éducation des jeunes filles et des femmes.* L'auteur de ce rapport débute par un exposé historique de la question, elle montre la place que les mathématiques occupent actuellement dans l'instruction féminine et la manière dont elles l'ont conquise.

Pendant fort longtemps l'instruction donnée aux femmes était exclusivement littéraire, même l'arithmétique élémentaire ne faisait pas partie du programme pour un grand nombre d'écoles. L'introduction des mathématiques dans les plans d'étude des écoles de jeunes filles, fut un des changements les plus caractéristiques effectué dans l'enseignement pendant la 2^me moitié du XIX^e siècle. Les premiers collèges de femmes furent ceux de l'université de Cambridge, créés en 1871. Les mathématiques sont maintenant obligatoires pour *toutes* les jeunes filles désirant poursuivre des études universitaires, alors que le latin est, dans certains cas, facultatif.

De complètement théorique qu'il était, l'enseignement mathématique, obéissant à une nouvelle réaction, tend actuellement à devenir plus pratique et la spécialisation à se faire de plus en plus tôt et de plus en plus complète. Mais il faut prendre garde que cette influence utilitaire ne devienne trop considérable ; ce qui risque d'arriver plus encore dans l'enseignement mathématique des jeunes filles que dans celui des jeunes gens ; elle pourrait bien être une des causes du manque d'intérêt et d'aptitudes pour les mathématiques manifesté par un certain nombre de jeunes filles.

Le surmenage est également plus à redouter chez les jeunes filles que chez les jeunes gens ; celles-là ayant ordinairement plus de devoirs sociaux et d'occupations accessoires que ceux-ci. En résumé M^lle Burstall estime qu'il faudrait, pour éviter ces écueils, considérer trois groupes de jeunes filles :

1° Un groupe très important, quoique peu nombreux, de jeunes filles et de femmes ayant du goût et de réelles aptitudes pour les mathématiques dont l'étude leur semble par conséquent relativement facile. Les études mathématiques des écoles et des collèges seraient naturellement conservées pour ce groupe.

2° Un autre petit groupe, un peu moins restreint cependant que le précédent est son antipode comprenant les jeunes filles et les femmes absolument réfractaires aux mathématiques (catégorie qui existe également chez les jeunes gens) et pour lesquelles les mathématiques exigées dans l'examen d'admission des collèges est une barrière infranchissable qu'il faudrait peut-être supprimer.

3° Le troisième groupe comprend la majorité des jeunes filles, celles qui peuvent arriver à étudier les mathématiques d'une manière relativement satisfaisante. Pour celles-ci la question se pose de savoir si les résultats obtenus sont en rapport avec les efforts et le temps nécessités de la part des élèves. Cette question se résoud dans l'un ou l'autre sens selon le point de vue où l'on se place ; l'importance capitale étant donnée soit à la quantité des connaissances acquises proportionnellement au temps employé soit au développement du pouvoir de raisonnement et de compréhension.

M^lle Burstall préconise un moyen terme. Les mathématiques ne seraient pas obligatoires jusqu'à l'examen de matriculation, mais seulement pendant trois ans, de 12 à 15 ans, avec comme programme l'arithmétique, la géométrie élémentaire, l'algèbre élémentaire telle que M. Godfrey la recommande pour la moyenne des jeunes gens et des jeunes filles [1]. Le développement intellectuel nécessaire à l'examen de matriculation serait alors garanti soit par les mathématiques, soit par le latin, au choix du candidat. Ou même par l'harmonie, étude que M^lle Burstall voudrait voir se développer plus que ce n'est actuellement le cas dans les écoles.

Il y aurait donc un cours très limité d'arithmétique générale et de géométrie élémentaire pour les jeunes filles ne se préparant pas à entrer dans un collège et dont les aptitudes sont plus pratiques qu'académiques ; un cours moyen de mathématiques pour la majorité de celles qui poursuivront leurs études dans un collège, mais avec faculté de remplacer les mathématiques par du latin ou de l'harmonie dans l'examen de matriculation et enfin pour un petit nombre d'entre elles les études mathématiques telles qu'elles se font actuellement en y adjoignant seulement une branche d'étude littéraire obligatoire jusqu'au bout.

3. — M^me Sidgwick traite la question de l'enseignement des *mathématiques supérieures pour les femmes* en comprenant sous le terme de mathématiques supérieures toutes les mathématiques enseignées dans les universités et ne faisant pas partie de l'instruction générale des écoles secondaires.

Elle estime qu'il est inutile de faire des comparaisons entre les facultés mathématiques des femmes et celles des hommes, puisque l'expérience a montré qu'il y a des femmes ayant des aptitudes mathématiques suffisantes pour justifier des études universitaires.

L'auteur base ses observations principalement sur les études mathématiques de Newnham College à Cambridge.

---

[1] The Algebra Syllabus in the Secondary School. By Mr. C. Godfrey. N° 5 des publications du Board of Education.

En résumé elle conclut qu'il est nécessaire que les femmes ayant des aptitudes mathématiques d'un degré quelconque soient encouragées à les cultiver et à étudier cette science pour elle-même et non avec les limites prescrites par le point de vue utilitaire ; c'est ainsi qu'elles en retireront le plus de profit et de plaisir.

Le plan d'étude mathématique du concours mathématique de Cambridge (Mathematical Tripos) est annexé au rapport.

Renée MASSON (Genève).

# ITALIE

## L'enseignement élémentaire.

*L'insegnamento della matematica nelle scuole infantili ed elementari* [1]. Relazione di A. CONTI prof. nella R. Scuola normale Margherita di Savoia in Roma.

*Ecoles enfantines.* A chaque école normale de jeunes filles est joint un jardin d'enfants, dont chaque maîtresse établit le programme, d'accord avec le directeur de l'école normale. Presque partout les programmes sont inspirés de la méthode de Frœbel, de sorte que les mathématiques y trouvent leur compte.

Comme il n'existe pas d'instructions officielles spéciales, il est difficile de se renseigner au sujet des écoles enfantines séparées des écoles normales, et qui peuvent être organisées par les communes, par des associations ou même par des particuliers. Le décret exigeant de toutes les personnes qui y enseignent les titres établissant leur capacité ne peut pas toujours être appliqué rigoureusement à cause de la pénurie de maîtresses.

*Ecoles élémentaires.* L'école élémentaire complète se compose de 6 classes. A la fin de la 4e les élèves peuvent subir un examen (maturité) qui leur donne accès à l'école moyenne. La loi de 1904 tolère un type transitoire d'écoles élémentaires à 3, 4 ou 5 classes.

Les élèves sont admis à partir de six ans. Les classes sont mixtes si elles comptent moins de 50 élèves, au delà de ce nombre on les sépare par sexe.

Les programmes de l'école élémentaire ont été modifiés à plusieurs reprises, en 1860 (Mamiani), en 1867 (Coppino), en 1888 (Boselli), en 1894 (Bacelli) et finalement, en 1905, à la suite de la loi Orlando de 1904, qui a donné à l'école son organisation actuelle.

Les programmes sont accompagnés d'instructions officielles qui ont davantage le ton de recommandations que de commandements.

Dans les classes inférieures il importe que l'élève ait toujours une représentation concrète des nombres, et que ceux-ci ne soient jamais pour lui de pures notions verbales.

Le calcul mental doit avoir la priorité, il faut éviter l'abus des exercices écrits de calcul qui deviendraient une mécanique de signes graphiques.

Il faut éviter de continuer un exercice lorsque les élèves donnent des signes de fatigue et exiger toujours que les réponses soient énoncées correctement.

---

[1] Un fasc. de 38 p. ; les rapports ne seront mis en vente qu'une fois réunis en volume.

L'enseignement des mathématiques doit contribuer à obtenir des élèves la précision et la clarté du langage.

On enseignera le système métrique en mettant dans les mains des élèves les instruments de mesure avec lesquels ils feront de nombreux exercices pratiques.

L'enseignement de l'arithmétique doit préparer l'enfant à résoudre les problèmes qu'il rencontrera dans la vie, on évitera donc les énoncés énigmatiques, les successions compliquées d'opérations trop longues.

Dans les classes supérieures il est très utile de laisser les élèves proposer des problèmes relatifs aux questions traitées, c'est le meilleur moyen de constater qu'ils ont compris.

Le calcul des fractions ordinaires sera exclusivement pratique, on ne parlera que de fraction d'un objet déterminé (un champ, un capital à répartir, etc.).

D'après la loi de 1911, ce sont les communes qui fournissent le matériel d'enseignement, on y rencontre les objets nécessaires à l'enseignement frœbelien. Collections de poids et mesures du système métrique. Modèles en carton et en bois : cube (décomposable en 8 parties), cylindre, cône, pyramide, sphère.

Les manuels sont choisis par les maîtres dans une liste établie annuellement dans chaque province par une commission spéciale.

La promotion d'une classe à la classe supérieure a lieu à la suite d'examens qui sont oraux dans les deux premières classes, oraux et écrits dans les autres.

Les élèves ayant obtenu 7 (sur 10) pour leur travail durant l'année, sont dispensés de l'examen.

Le maître fait toujours partie du jury d'examen.

Les sujets d'examens sont choisis par le jury, entre un certain nombre proposés par le maître.

La loi en vigueur ne datant que de juin 1911, il n'a pas pu se manifester encore de désirs de réforme. Il serait utile de connaître les résultats obtenus en s'informant auprès des maîtres. Il semble que la plupart d'entre eux seraient partisans d'une simplification, s'il devait en résulter plus de clarté dans les notions acquises, plus de précision dans l'expression et plus d'habileté dans l'exécution des opérations fondamentales.

## Ecoles normales.

*L'insegnamento della matematica nelle scuole normali.* — Relazione di A. Conti, prof. nella R. Scuola normale Margherita di Savoia in Roma (1 fasc. de 70 p.). — Les écoles normales furent créées par la loi Casati de 1859 et comportaient 3 ans d'études ordonnées, de telle sorte qu'à la fin de la 2e année les élèves pouvaient obtenir par examen un diplôme (patente inferiore) permettant d'enseigner au cours inférieur des écoles élémentaires, tandis que les élèves de 3e année qui réussissaient le dernier examen obtenaient un diplôme (patente superiore) exigé des maîtres du cours supérieur. Depuis 1896, il n'existe plus qu'un seul titre d'aptitude à l'enseignement, c'est la licence de 3e année de l'Ecole normale.

A chaque école normale de jeunes filles sont joints : une école complémentaire (trois ans reliant l'école élémentaire à l'école normale) ; — un

jardin d'enfants ; — un cours élémentaire complet pour les exercices de pédagogie pratique.

A chaque école normale de jeunes gens est joint un cours élémentaire complet.

Il y a 80 écoles normales féminines et 32 masculines, ces dernières reléguées pour la plupart dans de petites villes (beaucoup de villes importantes, Rome, Gênes, Venise, Bologne, Turin, en sont privées).

Depuis 1909 et sous certaines conditions les écoles normales peuvent recevoir des élèves des deux sexes, quelques-unes se sont déjà mises au bénéfice de cette nouvelle ordonnance.

Le corps enseignant est masculin dans les écoles de jeunes gens, il est mixte dans les écoles de jeunes filles.

Dans les écoles de jeunes gens le maître de mathématiques enseigne également la physique et les sciences naturelles.

Dans les écoles de jeunes filles le maître de mathématiques n'enseigne que cette branche, mais il l'enseigne encore dans les 3 classes de l'école complémentaire.

Depuis la création des écoles normales jusqu'à la réorganisation de 1896, les programmes ont été défavorablement influencés par l'obligation de préparer des élèves à un examen en deux ans, tandis que d'autres restaient trois ans à l'école ; on s'efforça par exemple de faire terminer en deux ans l'étude théorique de la géométrie.

Le programme de mathématiques, assez vaste, qui fut appliqué durant les premières années, demandait que l'étude des mathématiques fût dès l'abord rigoureusement rationnelle.

L'expérience montra que malgré l'âge d'entrée assez élevé (16 ans pour les jeunes gens, 15 ans pour les jeunes filles), les élèves ne possédaient ni la préparation ni la maturité d'esprit nécessaire pour suivre ce programme. Les simplifications commencèrent en 1861 et furent accentuées en 1867. Le besoin de maîtres primaires était si grand, qu'il fallait accepter tous les jeunes gens simplement disposés à embrasser cette carrière, sans songer à leur imposer des programmes ou des examens qui en auraient trop éliminé.

Pour la géométrie les méthodes graphiques intuitives prennent la place de la rigueur scientifique.

L'école complémentaire ou de préparation à l'école normale de jeunes filles fut créée en 1880, et permit d'enrichir un peu les programmes d'arithmétique des futures institutrices, d'y introduire, par exemple, l'étude des progressions et des logarithmes, mais la même année marque le commencement d'une période de réformation à outrance, durant laquelle les programmes ne furent pas modifiés par moins de 5 décrets en une dizaine d'années.

Par la loi de 1896, les écoles normales entrèrent dans une ère nouvelle. Il n'y a dès lors plus qu'un seul diplôme obtenu à la fin de la 3e année, ce qui facilite l'élaboration des programmes, ceux-ci se limitent, pour les mathématiques, à l'arithmétique, à la géométrie élémentaire et à la comptabilité.

Des objections venant de toute part établissent que les programmes ne sont pas en rapport avec le nombre d'heures trop restreint attribué aux mathématiques (2 à 3 h. par semaine), il est impossible de parcourir le programme de comptabilité. Tandis que l'enseignement à l'école complémentaire a un but particulièrement pratique, l'école normale doit à la fois

enseigner les mathématiques comme instrument d'éducation du raisonnement et préparer les futurs maîtres à enseigner les éléments d'arithmétique aux enfants. Ce double but ne saurait être atteint aussi longtemps que les professeurs devront se débattre entre les limites trop étroites de l'horaire. Il paraît indispensable d'ajouter une année à la durée du cours normal.

Au sujet des *méthodes* d'enseignement, les instructions officielles, sans employer toujours à propos les termes « déductif » et « inductif », recommandent d'enseigner l'*Arithmétique* à l'école complémentaire en associant la méthode inductive et la méthode déductive et à l'école normale par une méthode rigoureusement scientifique. A l'école complémentaire on donnera expérimentalement des notions pratiques de *Géométrie*, tandis que cette science sera enseignée à l'école normale par la méthode déductive dans la 1re classe et par la méthode inductive en 2e et 3e.

L'auteur de ce rapport préférerait voir recommander partout la rigueur scientifique dans la mesure du possible en tenant compte de l'âge, des facultés, de la préparation des élèves, et en rapprochant l'enseignement de la réalité objective pour fixer par des exemples et des expériences les principaux faits géométriques dans la mémoire des élèves.

Dans une seconde partie M. Conti signale les vœux de réformes émis par les milieux compétents. Nous relevons tout particulièrement celui qui consiste à prolonger les études d'un an et à répartir l'instruction en deux cycles, le premier étant consacré uniquement à la culture générale, tandis que le second serait destiné spécialement à la préparation professionnelle.

Pour ce qui concerne la préparation des maîtres à l'école normale, nous renvoyons le lecteur au rapport du professeur S. Pincherle. (Voir *L'Enseignement mathématique*, numéro de mars 1912).

## Observations et propositions relatives à l'enseignement des mathématiques dans les écoles élémentaires, moyennes et normales.

*Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, mèdie e di magistero.* Relazione di A. Padoa Prof. nel R. Instituto tecnico di Genova (1 fasc. de 22 p.).

L'auteur se propose d'examiner les critères qui devraient présider à la détermination des programmes et des méthodes d'enseignement dans les différentes écoles en les subordonnant au but de chacune d'elles.

1. — Lorsqu'une école sert de préparation à une autre, ce sont les maîtres de la seconde qui devraient établir le programme minimum à étudier dans la première, et il ne faudrait guère s'écarter de ce minimum.

Par exemple, les maîtres de l'enseignement secondaire demandent à l'école primaire d'habituer les élèves à exécuter avec assurance et rapidité les opérations fondamentales sur les nombres entiers et décimaux, et de bien les habituer au calcul mental, mais ils retrancheraient du programme primaire la géométrie, les mesures de volume, etc., dont l'introduction prématurée ne peut que décourager les enfants.

2. — On pourrait craindre qu'avec un programme ainsi appauvri l'école élémentaire ne remplisse pas son rôle de préparation aux plus humbles manifestations d'activité agricole, industrielle ou commerciale, mais il y a lieu de remarquer qu'elle ne le remplit pas non plus avec le programme actuel, il faudrait la compléter (pour ceux qui n'étudieront pas davantage) par des écoles professionnelles inférieures diversement spécialisées.

3. — A l'Ecole Moyenne les mathématiques devraient être enseignées en trois cours successifs : *préparatoire*, — *déductif*, — *complémentaire*.

Les deux premiers, de 3 ans chacun, devraient être communs à toutes les divisions de l'école moyenne, tandis que le programme et la durée du 3e devraient varier pour se conformer aux exigences des différentes divisions.

4. — Au cours *déductif* qui doit former le noyau de la culture mathématique à l'*école moyenne*, on attribuerait le programme esquissé ci-dessous :

*Arithmétique et Algèbre*. — *Ire année*. Etude déductive complète des différentes espèces de nombres (du nombre naturel absolu au nombre rationnel relatif) et de leurs opérations.

Nombreux exercices de calcul littéral.

*IIe année*. La division de seconde espèce (déterminant le quotient et le reste) sur les nombres entiers absolus et sur les polynômes ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une grandeur. Cas de divisibilité $x^m \pm a^m$ par $x \pm a$. Quotient et reste de la division d'un polynôme par $x \pm a$. Les nombres naturels considérés comme polynômes, justification des règles pour effectuer les opérations fondamentales. Changement de base de numération. Dépendances des critères de divisibilité et de la base. Nombres premiers. Théorie du P. G. C. D. et du P. P. C. M.

*IIIe année*. Nombres décimaux et fractions génératrices. Nombres irrationnels, nombres complexes. Extraction de la racine carrée avec une approximation donnée. Calcul des radicaux.

Théorie complète des équations du second degré à une inconnue.

5. — Comme ce programme exige plus de maturité intellectuelle que de préparation spéciale, on utilisera le cours *préparatoire* à habituer les élèves au calcul arithmétique, ils devront y acquérir beaucoup d'assurance et de rapidité.

Voici un schéma du programme qu'il faudrait parcourir uniquement par des exercices, par des problèmes nombreux et faciles.

*Ire année*. Règles pratiques de divisibilité. Notions sur les nombres premiers. Recherche du P. G. C. D. et du P. P. C. M. par les deux méthodes. Transformation de fractions et de nombres fractionnaires. Somme de fractions. Différence de deux fractions. Produit et quotient d'une fraction par un entier.

*IIe année*. Transformation de fraction ordinaire en fraction décimale et inversement, fractions périodiques. Extraction de racine carrée. Proportions, recherche de la quatrième proportionnelle, de la moyenne proportionnelle.

*IIIe année*. Nombres négatifs, application à la détermination d'un point sur une droite puis au thermomètre, dettes et crédits, gains et pertes, etc. — Addition et soustraction de nombres de mêmes signes et de signes contraires.

Usage des lettres pour résumer en formules les règles apprises dans le cours d'arithmétique pratique.

Durant tout ce cours le maître ne donnera pas de démonstrations rigoureuses, mais seulement des explications intuitives qu'il ne fera pas répéter aux élèves, ceux-ci devront seulement faire des exercices, répéter les règles et résoudre des problèmes.

6. — C'est à propos du programme de *Géométrie* que l'auteur s'écarte le plus de la tradition.

A cause de l'impénétrabilité de la matière, le « mouvement » ne permet

pas toujours de constater l'égalité géométrique, par exemple le sculpteur qui veut constater l'identité de la statue qu'il vient de prendre dans le marbre et du modèle qu'il devait copier vérifiera, à l'aide du compas d'épaisseur, que les paires de points de la statue et du modèle sont superposables.

L'auteur n'accepte que le système de définitions géométriques dans lequel on ne considère comme éléments primitifs que les points et la *relation d'égalité entre paires de points.*

Il a démontré en 1900 la suffisance de ce système qui a reçu de notables développements dans les récents mémoires de G. Peano, B. Levi et M. Pieri.

7. — Cette méthode, nécessairement *fusionniste,* supprime l'ancienne subdivision de la Géométrie en Planimétrie et Stéréométrie, pour lui substituer une répartition basée sur les *relations* que les figures présentent.

Projet de programme pour le cours *déductif.* — *Ire année.* Conception d'égalité géométrique. Idées primitives. Définitions. Postulats. Conditions d'égalité. Relations mutuelles de position (perpendicularité et parallélisme de droites et de plans, points communs à des droites, des circonférences, des plans, des surfaces sphériques, etc.). Constructions géométriques fondamentales. Propriétés des triangles et trièdres, des parallélogrammes et parallélipipèdes, des polygones et polyèdres réguliers.

*IIe année.* Théorie de l'équivalence des polygones et des polyèdres. Théorie euclidienne des proportions entre grandeurs. Conception générale de similitude et application aux polygones et polyèdres. Transformation d'une proportion entre segments en équivalence de rectangles et inversement, application à l'énoncé des deux manières possibles et à la démonstration de quelques propositions (perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse ; sécantes et tangentes, etc.).

*IIIe année.* Définition de la longueur de la circonférence comme grandeur intermédiaire entre les périmètres des polygones inscrits et circonscrits ; et de même surface d'un cylindre, d'un cône. Aire d'un cercle, volume d'un cylindre, d'un cône.

Surface et volume de la sphère. Théorie de la mesure.

Les fonctions sinus, cosinus, tangente, les égalités $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ; $\sin \alpha : \cos \alpha = \text{tg}\, \alpha$.

Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Théorème du sinus.

8. — Lorsque plusieurs propositions successives se démontrent de la même manière, on pourra se contenter de demander aux élèves la démonstration de la première, mais il serait utile que le livre de texte contienne néanmoins toutes les démonstrations pour que les élèves ne soient pas tentés de considérer comme postulats certaines de ces propositions.

9. — La tâche de l'enseignement géométrique *préparatoire* sera de développer l'intuition géométrique, de faire saisir l'idée d'égalité, de familiariser l'élève avec les mouvements géométriques fondamentaux (translation, rotation) et avec les faits géométriques qu'il retrouvera comme postulats. Tout cela à l'aide du dessin (sur papier blanc et quadrillé) ; à l'aide de papier plié, découpé, etc.

Pour que cette tâche de l'enseignement préparatoire puisse être efficacement remplie, il faut que le maître de ce cours soit celui du cours déductif. La cohésion est plus nécessaire entre le cours préparatoire et le cours déductif d'une même branche qu'entre l'arithmétique et la géométrie dans un même cours.

Il faut que le professeur puisse subordonner son enseignement du cours préparatoire aux exigences du cours déductif.

Le cours préparatoire ayant ainsi reçu une tâche déterminée ne pourra plus servir de préparation aux écoles professionnelles de deuxième degré, ni former à lui seul une petite école de culture générale, ces deux derniers rôles devant être dévolus à d'autres établissements.

10. — Les élèves de toutes les tendances auraient reçu le même enseignement au cours *préparatoire* et au cours *déductif*, tandis qu'il existerait un programme particulier pour le cours *complémentaire* dans chacun des trois lycées : classique, — moderne, — scientifique.

11. — Durant la 1re année, les élèves du lycée *classique* n'étudieront pas de mathématiques, mais ils en auraient 2 heures par semaine durant la seconde année (dans la dernière classe, la 8e).

L'enseignement serait philosophique, il faudrait examiner les principes de l'arithmétique et de l'algèbre, analyser la formation des premiers concepts, observer l'enchaînement des définitions, faire comprendre que les postulats sont nécessaires, mais aussi ce que leur choix a de relativement arbitraire. En reprenant quelques démonstrations caractéristiques on pourrait faire sentir la valeur et la beauté de la méthode déductive. Il faudrait ajouter quelques renseignements historiques.

12. — Depuis quelques années des expressions, des symboles que les mathématiciens avaient seuls utilisées jusqu'alors sont entrés dans tous les domaines et sont devenus nécessaires aux biologistes, aux économistes, etc C'est pour cette raison que le cours complémentaire au lycée *moderne* devra (en 2 ans et 2 heures par semaine) familiariser les élèves avec les notions de *fonction, correspondance, limite, probabilité*, etc. On leur enseignera les premiers principes de la géométrie analytique, du calcul différentiel et intégral.

13. — Au lycée *scientifique* le cours complémentaire comprendrait 4 h. durant deux ans.

Le programme, à la détermination duquel les professeurs de l'Université devraient collaborer, contiendrait une partie *obligatoire :*

Théorie des nombres irrationnels. Théorie et usage des logarithmes, progressions. Equations et systèmes d'équations réductibles au 2e degré. Trigonométrie plane et sphérique. Application de l'algèbre et de la trigonométrie à des problèmes géométriques.

Et une partie *facultative*, au choix du maître : Fractions continues. Calcul combinatoire, puissance d'un binôme. Probabilité. Analyse indéterminée. Maxima et minima. Eléments de la géométrie du triangle. Plans, axes, centres radicaux. Géométrie de la sphère. Sections coniques.

14. — Les élèves des écoles *normales* devraient suivre aussi le cours préparatoire et le cours déductif, puis dans un cours complémentaire examiner les programmes de l'école élémentaire, commenter et comparer des manuels, préparer des séries d'exercices, donner des leçons, etc.

Tout cet enseignement devrait être confié au maître de mathématiques plutôt qu'à celui de pédagogie.

Eug. Chatelain (La Chaux-de-Fonds).

# SUISSE

## Ecoles supérieures de jeunes filles. — Ecoles normales primaires Ecoles modernes

Le fascicule 3 de la Sous-commission suisse de l'enseignement mathématique contient 3 rapports :

I. *Der mathematische Unterricht an den höheren Mädchenschulen der Schweiz.* (35 p.) Dr S. E. Gubler (Zürich).

II. *Der mathematische Unterricht an den Lehrer-und Lehrerinnenseminarien der Schweiz* (32 p.) F. R. Scherrer (Küsnacht).

III. *Organisation und Methodik des mathematischen Unterrichts in den Landerziehungsheimen* (41 p.) Dr K. Matter (Frauenfeld).

Nous donnons un compte rendu succinct de ces trois rapports :

I. *L'enseignement mathématique dans les écoles supérieures de jeunes filles en Suisse.* — M. Gubler a réuni des renseignements relatifs à l'enseignement moyen, c'est-à-dire aux classes qui font suite aux écoles primaires et secondaires, abstraction faite des écoles normales dans les cas où elles constituent des établissements distincts. Elles sont alors étudiées dans le rapport de M. Scherrer.

M. Gubler a tenu compte dans son rapport, soit des réponses à un questionnaire envoyé par la Sous-commission suisse, soit des renseignements qu'il a obtenus directement des directeurs des établissements considérés.

Chaque canton étant autonome au point de vue de l'instruction, la diversité des organisations, des buts poursuivis, ou le manque de but et le rôle restreint donné aux mathématiques ont amené l'auteur à traiter la question sous une forme assez succincte. Il présente seulement les traits saillants communs à la majorité des écoles supérieures de jeunes filles. M. Gubler envisage d'abord la question au point de vue général, soit la place occupée par les écoles supérieures de jeunes filles dans l'organisation scolaire cantonale en Suisse et le but de ces écoles pour les principaux cantons. Enfin dans le 3me chapitre il aborde l'étude de l'enseignement mathématique dans la section de culture générale, les sections normales, gymnasiales et commerciales et donne comme exemple quelques plans d'études mathématiques ; ceux-ci sont trop souvent plus restreints que ceux des établissements correspondants de jeunes gens. Relativement aux examens l'auteur reproduit les remarques qui lui ont été transmises. La fin du rapport est consacrée aux méthodes d'enseignement et à des remarques générales.

II. *L'enseignement mathématique dans les écoles normales de jeunes gens et de jeunes filles en Suisse.* — M. Scherrer donne un aperçu des relations diverses entre la Confédération et les cantons au sujet de l'instruction à ses différents degrés.

Au point de vue de l'organisation des écoles normales, il existe dans un grand nombre de cantons des écoles normales préparant le corps enseignant pour les écoles primaires, dans quelques-uns ce ne sont que des sections dans l'école moyenne, appelées sections pédagogiques ou de séminaire Il y a également à côté de ces établissements des écoles normales privées généralement avec une couleur confessionnelle. L'âge d'entrée dans les écoles

normales varie entre 14 et 16 ans et la durée de scolarité entre 3 et 4 ans, de sorte que l'âge moyen de sortie est 19 ans.

Les plans d'études de ces établissements accusent des différences considérables spécialement pour les mathématiques. Tandis que les uns n'atteignent même pas le niveau mathématique d'une bonne école secondaire, d'autres peuvent parfaitement lutter avec les gymnases. Le nombre des heures affecté à l'enseignement des branches mathématiques : mathématiques pures, arpentage, étude des projections, du dessin technique et géométrique, géographie mathématique, arithmétique commerciale et comptabilité, oscille entre 10 et 28 heures par semaine avec une moyenne de 19,36 pour l'ensemble des établissements. Elle est de 22,125 pour les institutions normales pour jeunes gens ou de coéducation, tandis qu'elle n'est que de 11,6 pour les écoles normales pour institutrices.

La comparaison des plans d'études permet de distinguer 3 types d'écoles normales.

*1)* Celles où l'on se borne à répéter le programme de l'école primaire et à enseigner son application méthodique.

*2)* Celles où les mathématiques sont à peu près celles des gymnases, c'est-à-dire sont considérées comme une partie intégrante de l'instruction générale, mais en appuyant sur l'arithmétique pratique et le calcul mental.

*3)* Celles où l'enseignement mathématique est poussé plus loin que ne l'exigerait le programme à enseigner ultérieurement. Il n'y a encore qu'une faible moitié des écoles normales qui ait introduit la notion de fonction et la représentation graphique.

Un chapitre est réservé aux méthodes d'enseignement, un autre aux examens qui sont soit des examens de promotion, soit des examens de capacité. Enfin dans le dernier chapitre M. Scherrer traite la question de l'instruction nécessaire au corps enseignant des écoles normales et du développement de leur culture générale.

III. *L'organisation et la méthodologie dans l'enseignement mathématique des écoles nouvelles* (Landerziehungsheime). — Ces écoles ont pour caractère principal d'attacher une importance considérable au rôle *educatif* de l'école, celle-ci ne doit pas, comme autrefois, s'occuper uniquement du côté intellectuel, mais développer simultanément le corps, l'esprit et l'âme, donner dans toute l'acception du mot une *éducation complète*.

Les écoles de ce genre, en Suisse, sont les imitations plus ou moins directes des établissements similaires allemands, aussi M. Matter commence-t-il par exposer brièvement ce qui concerne les trois établissements allemands appelés « Lietzschen Landerziehungsheime » du nom de leur fondateur le Dr Hermann Lietz. Ce sont : celui de Ilsenburg am Harz (3 classes inférieures 11 à 13 ans) créé en 1898 ; celui de Haubinda in Thüringen (3 classes moyennes 14 à 16 ans) ouvert en 1901 et celui de Bieberstein in der Rhön (3 classes supérieures, 17 à 19 ans) établi en 1904. Il existe en Allemagne toute une série d'autres Landerziehungsheime qui s'éloignent plus ou moins de ceux de M. Lietz et auxquels sur la proposition de M. Klein, M. Matter a consacré un chapitre de ce rapport.

En Suisse le plus ancien et le plus complet de ces instituts est celui de de Glarisegg à Steckborn au bord du lac de Constance, fondé en 1902 par les Drs Frei et Zuberbühler sur le modèle de ceux du Dr Lietz (7 classes, élèves de 12 à 19 ans). Les principaux parmi les autres sont ceux de Hof Oberkirch à Uznach (St-Gall) fondateur, M. Tobler, 1906 et celui du châ-

teau de Kefikon près Frauenfeld établi par M. Bach, inspecteur scolaire, 1906.

Depuis 1906 il s'est créé en Suisse romande des « écoles nouvelles » sur des principes sensiblement analogues, soit celle du Dr Vittoz à Chailly-sur-Lausanne, soit l'Ecole nouvelle de la Châtaignerie-sur-Coppet, de M. E. Schwarz-Buys. Enfin il existe plusieurs écoles avec direction médicale pour les enfants physiquement ou intellectuellement anormaux.

Pour les mathématiques les plans d'études des écoles considérées sont presque équivalents à ceux des écoles cantonales quant aux matières enseignées, les méthodes par contre sont notablement différentes, l'attention est portée beaucoup plus sur le développement général permettant l'application des connaissances acquises que sur l'acquisition de connaissances théoriques nombreuses. La méthode inductive est employée à tous les degrés. Les travaux pratiques jouent un rôle prépondérant dans toutes les branches scientifiques. Il n'y a pas d'examen au sens ordinaire du mot. Les élèves sortant de ces établissements et désirant poursuivre leurs études sont obligés de subir soit l'examen d'admission à l'Ecole polytechnique fédérale, soit celui de maturité fédérale soit encore un de ceux de maturité cantonale.

Le corps enseignant de ces écoles a besoin non seulement de connaissances solides, mais aussi de tact et d'un idéal pédagogique très élevé.

M. Matter termine par des considérations sur les réformes à effectuer dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes en Suisse.

Dans le cours de son rapport, M. Matter a intercalé un supplément par M. Wunder, relatif à l'enseignement des sciences naturelles dans l'école de Bieberstein.

R. Masson (Genève).

---

## Cours universitaires; semestre d'été 1913.

## BELGIQUE (suite) [1]

**Bruxelles** (suite). — P. Stroobant : Astronomie sphérique et astronomie mathématique, 2.

**Liège.** — J. Deruydts : Equations différentielles, 3; Formes algébriques, 2. — J. Fairon : Géométrie analytique générale, 2. — L. Meurice : Déformation et cinématique des milieux continus, hydrodynamique et théorie des tourbillons, 3. — C. le Paige : Compléments de mécanique analytique et mécanique céleste, 2. — P. De Heen : Théorie gyrostatique de l'électricité, 1; Travaux pratiques de physique, 4.

**Louvain.** — C. de la Vallée-Poussin : Fonctions d'une variable complexe, 1; Fonctions elliptiques, 1; Equations aux dérivées partielles non linéaires, 1; Méthodologie mathématique, 2; Histoire des sciences, 1. — G. Verriest : Formes binaires, 1. — E. Pasquier : Dynamique des solides, 2, Perturbations des planètes, 3. — A. de Hemptinne : Dissolutions, dissociation électrolytique, loi du rayonnement et théorie des Quanta, 1. — *a.* — Demanet : Electricité et magnétisme, 1.

---

[1] Non compris les cours des deux premières années ni les cours des écoles techniques annexées aux Universités.

# FRANCE

**Paris** ; *Faculté des Sciences*. Deuxième semestre (à partir du 1er mars 1913). — Mécanique analytique et mécanique céleste, M. P. Appell : Des théorèmes généraux de la mécanique analytique, 2 h. — Analyse supérieure et algèbre supérieure, M. E. Picard : De la théorie des fonctions analytiques, en particulier des rapports de celle-ci avec la théorie des équations intégrales et des problèmes relatifs à l'uniformisation, 2 h. — Calcul différentiel et calcul intégral, M. Goursat : Equations différentielles et équations aux dérivées partielles. — Mécanique rationnelle, M. C. Guichard, prof. de mathématiques générales, exposera les lois générales du mouvement des systèmes, la mécanique analytique, l'hydrostatique et l'hydrodynamique, 2 h. — Mathématiques générales, M. Vessiot, chargé du cours, exposera les éléments de l'analyse et de la mécanique, 2 h. Travaux pratiques, 1 h. — Astronomie, M. Andoyer, développera l'ensemble des matières comprises dans le programme du certificat d'études supérieures d' « astronomie approfondie », 2 h. Travaux pratiques, 2 h. — Physique mathématique et calcul des probabilités, M. Boussinesq, après avoir terminé l'exposé des matières du 1er semestre, étudiera les ondes d'oscillation (houle et clapotis), les ondes liquides d'émersion et d'impulsion, enfin les ondes sonores des fluides, 2 h. — Mécanique physique et expérimentale, M. G. Kœnigs, traitera de la théorie des moteurs thermiques, 2 h. Travaux pratiques.

Cours annexes : Théorie des nombres, M. Cahen, chargé du cours, continuera à traiter du « Grand théorème » de Fermat, 2 h.

*Conférences*. — M. Lebesgue, maître de conférences d'analyse mathématique : Calcul intégral et ses applications géométriques, 2 h. — M. Drach, chargé du cours : Mécanique rationnelle, 2 h. — M. Andoyer : Astronomie, 1 h. — M. Servant, chef des travaux, chargé de conférences de mécanique : Principes de la statique graphique et de la résistance des matériaux, 1 h.

*Ecole normale supérieure*. — Conférences de MM. Borel et Cartan professeurs, Lebesgue, maître de conférences et Vessiot et Drach chargés de cours.

---

# BIBLIOGRAPHIE

---

Louis Bachelier. — **Calcul des probabilités**. *Tome* I, 1 vol. de VII-518 p. ; 25 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Dans cet ouvrage, l'auteur expose le développement des théories qu'il professe depuis plusieurs années, dans un cours libre, à la Faculté des Sciences de Paris. Avec un soin méticuleux, il a écarté de son œuvre tout développement d'ordre analytique, toute méthode exigeant des connaissances étendues ou profondes sur les sciences purement mathématiques. Son but

a été d'écrire un véritable traité du Calcul des probabilités, de faire comprendre les principes fondamentaux, les idées générales, les résultats réellement importants ; de montrer enfin que ce calcul constitue par lui-même une véritable science ayant un genre d'esthétique très spécial et ne tirant pas uniquement son intérêt de ses multiples applications ou des développements analytiques dont elle peut être le prétexte.

La notion d'intégrale, maintenant enseignée dans les éléments, suffit pour étudier ce livre ; les méthodes employées sont toujours très naturelles et les problèmes les plus classiques ont presque tous été l'objet de simplifications. La rédaction a été faite de telle sorte que l'ouvrage puisse être parcouru sans qu'il soit nécessaire de connaître les démonstrations ; ce sont surtout les résultats importants qui sont mis en évidence et commentés avec beaucoup de soin ; une classification très claire et très méthodique des matières étudiées facilite d'ailleurs la lecture. Il en résulte que cet ouvrage, pour très élevé qu'il soit au point de vue des probabilités est, au point de vue mathématique, essentiellement simple et élémentaire.

Ce livre ne contient pas seulement le développement des problèmes classiques, il renferme aussi les travaux personnels de l'auteur. Plusieurs chapitres sont entièrement nouveaux ; d'autres sont présentés sous une forme originale.

Parmi les résultats intéressants obtenus par les nouvelles conceptions, on peut citer la résolution complète et définitive du problème des probabilités dans les épreuves répétées. Ce problème, le plus important peut-être, du calcul des probabilités, n'avait été résolu par Lagrange, Laplace et Poisson que dans des cas particuliers et, depuis les travaux de ces géomètres, sa résolution n'avait en rien progressé.

E. Bardey. — **Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis.** Reformausgabe ; A, für Gymnasien. B, für Realanstalten. I. Teil : Unterstufe herausgegeben von Dr. W. Lietzmann. — 1 vol. in-8 ; VI-201 p. ; 2 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Sur la demande de M. Teubner, M. Lietzmann a entrepris de remanier les manuels de mathématiques de la collection bien connue « Bardeys Aufgabensammlung » en vue d'une nouvelle édition conforme aux tendances actuelles de l'enseignement mathématique. Ces manuels sont presque exclusivement des groupements d'exercices. Cela a facilité leur remaniement et permet de les utiliser pour les plans d'études les plus divers et suivant la méthode personnelle du maître et de la tradition scolaire.

Dans le choix des exercices empruntés aux anciens manuels Bardey, M. Lietzmann a toujours eu en vue le double but de l'enseignement arithmétique, développement de la compréhension et acquisition d'exactitude et de rapidité dans les calculs. Un certain nombre des anciens exercices ont été laissés de côté comme étant soit trop compliqués, soit de données trop fantaisistes. Ces exercices qui paraissent souvent les plus intéressants pour les élèves ne sont cependant pas totalement exclus, des nouveaux ont même été introduits ainsi que des problèmes « des anciens temps ».

La notion de fonction est introduite dès le début d'abord implicitement, puis à l'aide de la représentation graphique. Le rôle de la représentation graphique, soit des fonctions soit des données de statistique, est peut-être un des caractères principaux de ce volume. A partir des équations du

1er degré elle est constamment appliquée. De plus, sous la forme ordinaire des courbes représentatives ou sous celle de figures géométriques proportionnelles aux données, elle fait l'objet d'un chapitre spécial comprenant environ 200 exercices touchant à tous les domaines. R. Masson (Genève).

L. F. Braude. — **Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve** (Thèse Heidelberg). — 1 fasc. in-8°, 50 p. : W. Neumann, Pirmasens.

Ce travail comprend quatre chapitres dont les points fondamentaux peuvent être exposés comme suit :

I. *La courbe générale de Mannheim.* $\Gamma$ roule sur $\Gamma_1$ ; on recherche le lieu des centres de courbure relatifs au point de tangence de chaque position de $\Gamma$. $\Gamma_1$ est une droite, un cercle ou une courbe quelconque. Comme cas spécial l'auteur considère encore $\Gamma$ comme un cercle puis comme une conchoïde de $\Gamma_1$.

II. *Développées « intermédiaires »* (Zwischen Evoluten). L'auteur recherche le lieu d'un point P du rayon de courbure de A sur $\Gamma_1$ tel que le rapport des segments déterminés par le point P sur le rayon de courbure est connu. Comme la base $\Gamma_1$ d'une part, et sa développée d'autre part, sont des cas limites de ce lieu, les courbes considérées peuvent être appelées « développées intermédiaires ».

III. *Courbes générales d'ordre supérieur de Mannheim.* Tandis que la courbe de Mannheim est le lieu des centres de courbure relatifs aux points de tangence dans le mouvement de $\Gamma$ sur $\Gamma_1$, l'auteur désigne sous ce nouveau nom les lieux des centres de courbure des développées de développées ou des développées d'ordre supérieur et il en expose la recherche avec de forts jolis exemples.

IV. *Extension et application des théorèmes de Steiner et Habich aux roulettes.* Le premier de ces théorèmes s'énonce comme suit : « Soit une courbe K roulant sur une droite et $\Phi$ la trajectoire d'un point P du plan de K, chaque arc de $\Phi$ est égal à l'arc correspondant de la podaire de $\Phi$ par rapport à P. » Le suivant s'appelle : « Soit une courbe K roulant sur une droite G, $\Phi$ la trajectoire d'un point P du plan de K et une podaire de K, si la podaire roule sur $\Phi$ pendant le mouvement de K, le pôle de cette podaire décrit la droite G ».

Après avoir établi une démonstration plus générale de ces théorèmes, M. Braude en étudie diverses applications partiellement connues et très originales. (Voir l'article de M. E. Turrière cité plus loin).

Dans tout son ouvrage l'auteur utilise les coordonnées naturelles R et $s$, ainsi que les équations intrinsèques $R = f(s)$ des courbes considérées. Il part des recherches de Mannheim, puis de Césaro et en dernier lieu de M. Wieleitner et il les développe d'une manière fort intéressante.

Dans le même ordre d'idées, nous croyons utile de rappeler ici l'article publié par M. E. Turrière dans l'*Enseignement mathématique* (1911 n° 1). « Sur l'interprétation géométrique d'après Mannheim de l'équation intrinsèque d'une courbe plane ». L. Crelier (Bienne).

Fagnano. — **Opere Matematiche** del marchese Giulio Carlo dei Toschi di Fagnano, pubblicate sotto gli auspici della Società Italiana per il Progresso delle Scienze per cura dei professori Senatore Vito Volterra, Gino

Loria e Dionisio Gambioli. — 3 vol. gr. in-8°; de VII-474, IX-471, XI-227 p.; 40 Lires; Soc. editrice Dante Alighieri di Albrighi, Segali et Cie, Rome, Milan et Naples.

Il faut savoir gré à la Société italienne pour l'avancement des Sciences d'avoir donné son appui à la publication des œuvres complètes du marquis de Fagnano. Les *Produzioni Matematiche* du savant mathématicien italien ne se trouvaient plus que chez de rares bibliophiles et il y a un véritable intérêt pour l'histoire de la science à posséder l'ensemble des travaux de Fagnano qui, comme on sait, a été l'un des initiateurs de la Théorie des fonctions elliptiques. Les deux premiers volumes renferment les « Produzioni matematiche », le troisième contient divers écrits, la correspondance scientifique et une biographie du savant mathématicien, par M. Gambioli.

A. F. Forsyth. — **Lectures on the Differential Geometry** of Curves and Surfaces. — 1 vol. relié, gr. in-8°, XXIV-526 p.; 21 sh.; Cambridge University Press; C. F. Clay, Londres.

On ne possédait pas, dans les pays de langue anglaise, de traité spécialement consacré à la Géométrie infinitésimale. Le présent ouvrage vient donc combler une lacune; il permettra aux étudiants anglais et américains d'aborder plus facilement que par le passé, l'étude de l'œuvre magistrale de M. G. Darboux. Comme le dit l'auteur dans sa préface, ce volume est en effet destiné à servir d'introduction à la *Théorie générale des surfaces* de l'éminent géomètre français.

Dans une *première section* M. Forsyth traite de la théorie des courbes gauches et des notions fondamentales qui s'y rattachent. Puis dans une *seconde section*, comprenant le chap II à VI, il aborde la théorie des surfaces en partant de la représentation paramétrique et étudie successivement les lignes tracées sur une surface, les lignes de courbures, les lignes géodésiques, et la notion d'invariant différentiel.

La *troisième section* est consacrée à l'étude de surfaces répondant à des conditions particulières; on y trouve les surfaces minima, les surfaces de Weingarten, le problème de la déformation des surfaces, les systèmes triples orthogonaux. Elle se termine par un intéressant exposé de la théorie des congruences de courbes.

Les démonstrations de M. Forsyth sont présentées avec beaucoup de clarté et de précision. Selon la tradition, fort bonne, des auteurs anglais, le texte est accompagné de nombreux exemples et de problèmes. Dans le domaine de la géométrie infinitésimale il importe tout particulièrement que le lecteur s'assimile bien les théories nouvelles en les appliquant au fur et à mesure à des problèmes bien choisis. L'ouvrage en contient plus de deux cents, dont un grand nombre ont été extraits de mémoires originaux. A ce titre il constitue un guide utile non seulement pour ceux qui veulent s'initier aux méthodes de la Géométrie infinitésimale, mais aussi pour tous ceux qui enseignent cette branche.

H. F.

A. Galle. — **Mathematische Instrumente.** (Sammlung Mathem.-physik. Schriften für Ingenieure u. Studierende herausgegeben von G. Jahnke). 1 vol. in-8°, 178 p.; relié toile, 4 M. 80; B. G. Teubner, Leipzig.

L'emploi des instruments mathématiques s'est beaucoup développé dans les sciences techniques. Il y avait donc intérêt à réunir dans une petite mo-

nographie les principales notions concernant la théorie et l'usage des instruments mathématiques utiles à l'ingénieur. L'auteur examine notamment les instruments mathématiques basés sur les logarithmes, les machines à calculer, les planimètres, les analysateurs harmoniques et les intégraphes. Pour chacun des groupes d'appareils il présente les différents types, leur théorie et leur mode de fonctionnement. Tous ceux qui ont à utiliser les instruments mathématiques consulteront avec fruit ce nouveau volume de la collection Jahnke.

**Œuvres de Ch. Hermite**, publiées par Emile Picard. *Tome III*. 1 vol. gr. in-8°, de VI-524 p.; 18 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Ce volume renferme les mémoires publiés par Hermite de 1872 à 1880. Il commence toutefois par un travail inédit « Sur l'extension du théorème de Sturm à un système d'équations simultanées », datant de la jeunesse d'Hermite, retrouvé récemment dans les papiers de Liouville. On lira aussi dans ce Tome divers Chapitres empruntés au Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, une note publiée dans l'Algèbre supérieure de Serret sur les équations résolubles par radicaux, et enfin une Leçon sur l'équation de Lamé, faite à l'Ecole Polytechnique pendant l'hiver 1872-1873.

En tête du volume se trouve un portrait représentant Hermite vers l'âge de 65 ans.

Dans un dernier volume M. E. Picard publiera la fin de l'œuvre mathématique d'Hermite, ainsi que divers articles et discours.

Emil Müller. — **Lehrbuch der darstellenden Geometrie** für technische Hochschulen. Zweiter Band, erstes Heft. Mit 140 Figuren. — 1 vol. in-8°. 129 p. ; 4 M. 40 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Nous avons signalé, il y a quatre ans, le premier volume du cours de Géométrie descriptive que M. E. Müller professe à l'Ecole technique supérieure de Vienne. Aujourd'hui nous pouvons ajouter qu'il a rencontré le même accueil auprès de tous ceux qui ont à enseigner la Géométrie descriptive aux ingénieurs et aux architectes.

Sur la demande instante d'un grand nombre de ses lecteurs, l'auteur vient de publier un premier fascicule du Tome II. Il expose d'abord la Géométrie des projections cotées et les applications à la topographie. A mentionner aussi le chapitre consacré aux applications, en architecture, à la représentation des fermes de toitures. La seconde partie du fascicule traite des méthodes et des problèmes de l'axonométrie normale.

A. Padoa — **La logique déductive dans sa dernière phase de développement.** — 1 vol. gr. in-8° 106 p.; 3 fr. 25. Gauthier-Villars, Paris.

L'ouvrage de M. Padoa vient heureusement compléter la liste des livres français publiés durant ces dernières années sur la logique moderne. M. Couturat sans doute avait initié le public français à cette science nouvelle par deux ouvrages remarquables de simplicité et de clarté ; mais l'un de ceux-ci, l'Algèbre de la logique, ne fait que résumer les idées de Schrœder et de son école, tandis que l'autre, les principes des mathématiques, a surtout pour but de faire connaître la conception de Russell et sa tentative de ramener les notions mathématiques à un nombre limité de notions logiques

Mais jusqu'à ce jour il n'existait aucun ouvrage donnant un aperçu systématique des travaux accomplis par l'école italienne. Ce sont ces travaux que M. Padoa vient de résumer et de compléter sur plus d'un point en une centaine de pages d'une limpidité parfaite.

On sait quel est le but poursuivi par l'école italienne dont M. Peano est le fondateur. Cette école ne se propose pas d'expliquer la nature et le contenu des sciences mathématiques, envisagées au point de vue logique. Elle cherche uniquement à analyser, d'une façon plus approfondie qu'on ne l'a fait jusqu'à maintenant, les diverses formes du raisonnement déductif et à découvrir les éléments nécessaires à cette déduction. De cette façon et en ce qui concerne plus spécialement les sciences mathématiques, les prémisses fondamentales sur lesquelles elles reposent, seront ramenées à leur forme simple et dépouillée de tout élément accessoire, tout en gardant l'originalité qui leur est propre. Une recherche aussi rigoureuse ne saurait être poursuivie sans l'aide d'un langage spécial et c'est pourquoi la logique symbolique utilise l'idéographie, c'est-à-dire un ensemble de signes, analogue aux notations algébriques. De même que « le microscope permet de voir les bacilles qui, par leur petitesse, échappent à la vue ordinaire, de même l'idéographie logique nous permet de représenter des concepts qui, par leur subtilité, échappent à toute détermination précise par le langage ordinaire », p. 15.

La logique symbolique ainsi comprise offre au mathématicien comme au philosophe un objet d'étude du plus grand intérêt ; elle apparaît comme « une analyse approfondie de la pensée » et forme une introduction naturelle et nécessaire aux mathématiques, car elle leur est comparable par la précision du langage et la rigueur des procédés », p. 19. Dans une étude de ce genre on ne saurait prendre un meilleur guide que M. Padoa ; « le but de vulgarisation qu'il a poursuivi, dit M. Peano dans la préface, me paraît atteint par son traité qui est clair, ordonné, complet : il contient l'explication de tous les symboles logiques, l'étude de leurs propriétés, l'analyse de leurs liens et leur réduction au nombre minimum, due à M. Padoa. Beaucoup d'exemples, tirés du langage courant et du langage scientifique en rendent la lecture plus intelligible et plus agréable ; et des notices historiques bien choisies permettent de suivre les progrès de ces études depuis Leibniz jusqu'à nos jours ».

Dans son avant-propos, M. Padoa annonce qu'il publiera une méthodologie pure et appliquée (aux principes de l'Arithmétique). Nous souhaitons l'apparition prochaine de cet ouvrage, suite du beau travail que nous venons de caractériser brièvement. Arnold Reymond (Neuchâtel).

W. Ritz. — **Œuvres de Walther Ritz,** publiées par la Société suisse de Physique. — 1 vol. in-8°, XXII-541 p., avec 48 fig. et un portrait ; 18 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

En publiant les œuvres de Walther Ritz, la Société suisse de Physique a tenu à rendre hommage à la mémoire du savant physicien suisse, qu'une mort prématurée a enlevé à la science le 7 juillet 1909, à l'âge de 31 ans. Elle a estimé que ces mémoires méritaient d'être signalés à l'attention des mathématiciens et des physiciens en raison des idées nouvelles et hardies que renferment les remarquables travaux de Ritz.

Le volume débute par une belle Notice de M. Pierre Weiss, sur la vie et

les travaux de Ritz. Nous signalerons ici tout spécialement les recherches sur la méthode de calcul des problèmes dépendant des équations aux dérivées partielles et celles qui sont relatives aux lois de l'électrodynamique générale et de l'optique. « Il s'était proposé, dit M. Weiss, d'écrire d'abord une étude critique montrant l'insuffisance des théories antérieures et de faire ensuite la synthèse d'une Electrodynamique nouvelle comprenant l'Optique. La partie critique seule est achevée...

« Nous avons ajouté aux travaux sur l'Electrodynamique le discours d'habilitation qu'il a prononcé le 5 mars 1909 dans sa leçon inaugurale. Il n'a pu mettre la dernière main à cet exposé qu'il avait l'intention de publier et nous avons dû le reconstituer d'après des brouillons. Il n'a sans doute pas la perfection de forme qu'il aurait su lui donner, et tout ce qu'il contient d'essentiel est déjà énoncé dans ses autres travaux. Mais nous avons cru devoir le conserver, ne serait-ce que comme résumé en langue allemande d'une partie de son Œuvre écrite entièrement en français.

« Il avait, sur d'autres questions encore que celles qui sont traitées dans ses écrits, des idées neuves et sans doute fécondes dont il avait parlé à ses amis. Il était convaincu entre autres que les problèmes de la Mécanique statistique ne sont si difficiles que parce que les véritables méthodes de calcul restent encore à trouver, et il semble, d'après une de ses lettres, qu'il se soit occupé de ces questions avec un commencement de succès ».

Dav.-Eug. Smith. — **The Teaching of Geometry.** — 1 vol in-8°, V-340 p.; 5 s. 6 d.; Ginn and Co., Boston-New-York-Chicago-London.

Dans sa préface, l'auteur indique nettement le but qu'il poursuit. Son livre est destiné aux professeurs de géométrie élémentaire qui ne sont ni des révolutionnaires, ni des conservateurs à outrance.

Avant d'aborder l'exposé de la matière à enseigner M. Smith traite des diverses questions pédagogiques, psychologiques et philosophiques qui s'y rapportent. Il appuie sur la raison d'être de cet enseignement, donne un aperçu historique très suggestif soit de la géométrie elle-même, soit de son enseignement, de l'influence d'Euclide, des perfectionnements apportés à sa méthode, de ce que doit être un manuel de géométrie pour les écoles d'Amérique, des relations de cette branche avec l'algèbre. Quoique M. Smith ait eu en vue plus spécialement l'enseignement en Amérique, l'esprit très large dans lequel son livre est conçu rend ses suggestions utiles pour tous ceux qui sont appelés à enseigner la géométrie élémentaire ; tels les chapitres relatifs à l'introduction de la géométrie et la direction d'une classe de géométrie. Ils y trouveront des indications très précieuses pour surmonter les difficultés inhérentes à l'organisation et à l'application d'un cours de géométrie élémentaire.

La matière à enseigner en elle-même fait l'objet de la seconde moitié du livre. Le champ parcouru est celui des huit premiers livres d'Euclide. M. Smith conserve cette division en donnant les raisons pour et contre ce maintien. Pour ce qui concerne l'ordre et le choix des théorèmes, dans chaque livre, M. Smith s'est occupé des exigences des écoles américaines d'aujourd'hui et des exigences psychologiques et pédagogiques telles qu'on les conçoit actuellement. Il démontre les principaux théorèmes d'Euclide en supprimant cependant ceux qui sont soit trop intuitifs, soit trop difficiles. Il y joint une série d'applications typiques, de renseignements et de conseils à l'usage des maîtres.

R. Masson (Genève).

A.-W. Stamper. — **A History of the Teaching of Elementary Geometry.** With reference to Present-day Problems, submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, in the Faculty of Philosophy, Columbia University. — 1 vol. in-8°, X-163 p.; Teachers College Series Columbia University.

M. Stamper fait l'historique du développement de l'*enseignement de la géométrie* en s'appuyant dans une certaine mesure sur les « histoire des mathématiques » classiques, mais surtout en remontant le plus possible aux sources originales. Il considère les diverses périodes déterminées par l'influence d'Euclide, l'apparition des écoles chrétiennes, la Renaissance et enfin l'époque moderne.

Il s'arrête peu sur l'époque égyptienne, première période où l'étude de la géométrie est purement pratique, engendrée par les besoins de la vie en société et pour laquelle il n'existe que fort peu de documents. C'est chez les Grecs que naît la géométrie logique ; elle atteint au reste un développement déjà assez considérable avant Euclide. L'auteur constate même que les méthodes employées actuellement en géométrie élémentaire se retrouvent presque intégralement dans les documents relatifs à cette époque.

Le mérite d'Euclide est d'avoir réuni, ordonné, perfectionné et complété l'œuvre de ses prédécesseurs parmi lesquels Pythagore et son école, Eudoxus et Thaetetus. En résumé M. Stamper estime qu'Euclide a surtout systématisé la logique de la géométrie et qu'il faut le considérer comme le compilateur et non l'auteur de ses « Eléments ». Les traits caractéristiques de ceux-ci sont la suppression de toute application pratique et de toute construction hypothétique et l'exclusion de toute construction qui ne serait pas justiciable de l'équerre et du compas. Avec Euclide, chez les Grecs, l'apogée du développement logique était atteint. Après Euclide la géométrie n'est plus susceptible d'un développement réel que dans la direction du domaine pratique. A Alexandrie, chez les Hindous et surtout chez les Romains la géométrie de cette époque a tendance à s'occuper beaucoup plus des applications.

Quelques pages sont ensuite consacrées à l'enseignement de la géométrie depuis l'apparition des écoles chrétiennes jusqu'en 1525. La faculté de mémorisation semble avoir été alors le principal desideratum. M. Stamper s'occupe également des auteurs ayant exercé une influence sur l'enseignement avant et après la création des universités, tel Leonardo de Pise qui a systématisé l'étude de la géométrie pratique. Les méthodes géométriques de l'enseignement universitaire avant l'invention de l'imprimerie donnent lieu à des détails intéressants ainsi que l'importance de cette découverte soit pour l'université, soit pour les écoles secondaires créées au XVI[e] siècle. L'auteur montre comment l'étude de la géométrie s'insinue peu à peu dans ces dernières, mais dans une mesure et avec des tendances variables avec les pays. En Angleterre, par exemple, la méthode des Eléments d'Euclide s'implante lentement pour arriver à supplanter toute autre méthode au milieu du XIX[e] siècle ; tandis qu'en France, où elle s'était répandue plus rapidement, au XVIII[e] siècle déjà, avant Legendre, elle n'est plus seule en usage.

Ensuite M. Stamper étudie l'enseignement géométrique actuel dans les écoles secondaires des principaux pays avec les divers courants modernes de réforme et leurs causes souvent fort complexes. Dans le dernier chapitre il reprend le sujet dans sa généralité pour faire un tableau d'ensemble de la

situation actuelle et du développement historique des problèmes qui se posent aujourd'hui.

Il assimile la croissance mentale de l'enfant au développement de la conscience géométrique de la race. L'étude comparative des méthodes de chaque pays à chaque époque lui suggère alors des renseignements utiles sur la meilleure méthode à adopter pour l'enseignement de la géométrie aux enfants et des réflexions d'ordre pédagogique terminent cette étude très documentée.

R. Masson (Genève).

Paul Tannery. — **Memoires scientifiques de Paul Tannery,** publiés par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen. Tome I: *Sciences exactes dans l'antiquité.* — 1 vol. gr. in-8°, XIX-466 p.; avec 17 fig. et un portrait en héliogravure; 15 fr.: Gauthier-Villars, Paris.

On sait la place importante que prennent les travaux de Paul Tannery dans l'Histoire de la Science, et l'on n'ignore pas que dans le domaine de la Philologie classique et de la Philosophie leur rôle n'est pas moins important. Le monde scientifique sera donc extrêmement reconnaissant aux professeurs Heiberg et Zeuthen d'avoir entrepris la publication de ces mémoires sur l'invitation et avec le concours de Mme Paul Tannery. C'est à leur dévouement que l'on doit ce monument scientifique, élevé par une main pieuse à la mémoire du savant historien.

Dans leur *Avant-Propos* MM. Heiberg et Zeuthen indiquent comment ils comptent utiliser les matériaux réunis par Mme P. Tannery :

« Sont exclus de la réimpression les Ouvrages publiés en volumes, les articles publiés d'abord à part, puis remaniés et entrés dans quelques-uns de ces Ouvrages ; enfin les contributions personnelles aux grandes éditions de Fermat, Descartes, etc., dont Paul Tannery a été chargé par le Ministère de l'Instruction publique.

« Ne sont pas insérées les questions et réponses données à l'*Intermédiaire des Mathématiciens* et à la *Bibliotheca mathematica,* quelques rapports, notes préliminaires, dont on trouvera le détail complet dans la liste des travaux de Paul Tannery.

« Un choix a été fait parmi ses comptes rendus critiques et ses articles biographiques compris dans la *Grande Encyclopédie.*

« Ces derniers seront placés respectivement dans les sections auxquelles ils se rapportent. Il en sera de même des articles posthumes. Tout le reste de l'œuvre de Paul Tannery sera publié en sept sections, savoir :

1° Sciences exactes dans l'Antiquité. — 2° Sciences exactes chez les Byzantins. — 3° Sciences exactes au moyen âge et dans les temps modernes. — 4° Mathématiques pures. — 5° Philosophie. — 6° Philologie classique. — 7° Recensions.

« Une huitième section sera ajoutée plus tard concernant la Biographie, la Bibliographie, et contenant en outre un choix d'extraits de la Correspondance scientifique.

« La première section comprendra trois volumes : chacune des autres en formera un. Chaque volume contiendra une Table des Matières spéciale et aura un numérotage particulier des articles ».

Ce premier volume reproduit les mémoires allant de 1876 à 1884. En voici la liste :

Note sur le Système astronomique d'Eudoxe. Le Nombre nuptial de Pla-

ton. L'Hypothèse géométrique du Ménon de Platon. Hippocrate de Chio et la quadrature des Lunules. Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe. A quelle époque vivait Diophante. L'article de Suidas sur Hypatia. L'Arithmétique des Grecs dans Pappus. Sur l'âge du pythagoricien Thymaridas. L'Article de Suidas sur le Philosophe Isidore. Sur le problème des Bœufs d'Archimède. Quelques fragments d'Appollonius de Perge. Les Mesures des marbres et des divers bois de Didyme d'Alexandrie. Sur les Fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus. Sur les Fragments d'Eudème de Rhodes relatifs à l'Histoire des Mathématiques. Sur Sporas de Nicée. Sur l'Invention de la Preuve par neuf. L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie. Sur la mesure du Cercle d'Archimède. De la Solution géométrique des Problèmes du second degré avant Euclide. Un fragment de Speusippe. Sérénus d'Antissa. Sur une Critique ancienne d'une Démonstration d'Archimède. Seconde Note sur le Système astronomique d'Eudoxe. Le Fragment d'Eudème sur la quadrature des Lunules. Aristarque de Samos. Stéréométrie de Héron d'Alexandrie. Etudes Héroniennes. Sur le « Modius Castrensis ».

E. B. Wilson. Ph. D. Professor in the Massachusetts Institute of Technology. — **Advanced Calculus.** A text upon select parts of Differential Calculus, differential Equations, Integral Calculus, Theory of functions with numerous exercises. — 1 vol. gr. in-8°, IV-566 pages ; 20 sh.; Ginn and C°, Boston et Londres.

Il y a évidemment à l'heure actuelle une certaine réaction contre les complications et les subtilités qu'amena un souci exagéré de la rigueur dans l'enseignement de l'Analyse mathématique. On constate en même temps un désir assez général d'alléger cet enseignement de façon à le rendre accessible, — même dans ses parties les plus élevées, — aux futurs ingénieurs et physiciens. Plusieurs voies ont été choisies pour atteindre ce but.

Les uns se borneront à exposer seulement ce qui est essentiel (mais tout ce qui est essentiel), à ne prouver les théorèmes fondamentaux que dans les cas pratiquement utilisés sans chercher à obtenir une généralité qui amènerait des difficultés inutiles. C'est la méthode qu'a suivie M. Baire dans ses remarquables et excellentes « Leçons sur les théories générales de l'Analyse ». Il a pu ainsi ramasser, dans moins de 600 pages, un exposé simple, clair et cependant parfaitement rigoureux de tout ce qui est nécessaire aussi bien au mathématicien qu'au physicien, pour aborder les parties les plus difficiles de l'Analyse.

M. E. B. Wilson s'est placé à un point de vue voisin mais un peu différent : il a eu surtout en vue les besoins du technicien. Il ne s'est point soucié, dit-il dans sa préface, « d'écrire un traité artistique sur l'Analyse » : mais il a voulu donner au lecteur le moyen d'entrer le plus rapidement possible dans la pratique du calcul et de se familiariser avec « ces grands algorithmes des mathématiques qui sont naturellement associés avec l'Analyse ». Il a certainement atteint le but qu'il visait, sans avoir négligé pour cela de mettre son ouvrage à la hauteur des récents progrès de la Théorie des fonctions.

On trouvera dans son cours un nombre considérable d'exercices sur toutes les parties de l'Analyse. Ces problèmes ont été soigneusement choisis de façon à n'admettre que ceux qui seraient à la portée de la plupart des étu-

diants, même de ceux pour qui les mathématiques sont un moyen plutôt qu'un but. Ces derniers trouveront en outre un peu partout dans le texte même des applications du cours qui les rassureront sur l'utilité des matières traitées ; citons au hasard : les dimensions des unités physiques, l'équilibre des fils, les vibrations d'un système matériel, le potentiel retardé. Le choix des matières purement mathématiques a lui-même été dominé par le souci de la préparation des futurs physiciens. C'est ainsi qu'on trouvera des sections ou des chapitres entiers sur la notation vectorielle, les fonctions cylindriques, les fonctions gamma et de Bessel, les fonctions elliptiques, les fonctions harmoniques. Par contre, la théorie des fonctions analytiques, qui occupe souvent une place exagérée dans les cours d'analyse, est résumée en moins de trente pages.

Ce compte rendu ne serait pas complet sans quelques critiques. Il y a dans le texte quelques imperfections inévitables que l'auteur pourra corriger dans une nouvelle édition que nous souhaitons prochaine. Par exemple, à la page 449, l'auteur fait ressortir un avantage de la transformation d'Euler qui consiste en ce qu'on peut parfois l'utiliser pour transformer une série en une autre dont les coefficients sont petits. Or, dans l'exemple donné à l'appui, le calcul de log 2 par la formule

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \dots$$

On observe que la nouvelle série en $y$ a exactement les mêmes coefficients en valeur absolue et, ce qui la rend plus convergente, c'est essentiellement le fait que pour $x = 1$, $y$, qu'on a pris égal à $\frac{x}{1+x}$, se réduit à la valeur $\frac{1}{2}$. Mais je ne m'arrêterai pas à ces chicanes sans portée, et je terminerai en recommandant la lecture de cet attrayant ouvrage non seulement aux étudiants mais aux professeurs. M. Fréchet (Poitiers).

**Taschenbuch für Mathematiker und Physiker**, herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe. 3. Jahrgang 1913. — 1 vol. in-16, X-463 p. ; 6 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Le *Taschenbuch* publié par MM. Auerbach et Rothe, avec la collaboration de nombreux savants, présente à la fois les caractères d'un *annuaire* et d'un *aide-mémoire*. Il constitue en réalité une véritable petite encyclopédie des sciences mathématiques et physiques. A côté de tables numériques, on trouvera de nombreuses notes fournissant un aperçu sommaire des différentes branches des mathématiques et de la physique. Les auteurs ont surtout insisté sur les travaux récents et donnent les renseignement bibliographiques les plus importants. Ce troisième volume du *Taschenbuch* contient plusieurs nouvelles Notes, tandis que les anciennes ont été remaniées ou condensées. Nous mentionnerons les suivantes qui ont été ajoutées dans cette édition :

O. Knopf, astronomie ; G. Hessenberg, la théorie des ensembles ; W. Bieberbach, la théorie des groupes et la théorie des équations ; A. Fleck, le dernier théorème de Fermat ; A. Tœplitz, les équations intégrales ; Bieberbach, fonctions multiformes ; W. Lietzmann, enseignement mathéma-

tique ; LIEBMANN, mécanique analytique ; SOMMERFELD, théorie des Quanta ; GAST, géodésie élémentaire ; L. MILCH, cristallographie ; AUERBACH, chimie générale.

L'annuaire se termine par une liste des périodiques et des publications récentes en mathématiques et en physique, puis viennent la liste des sociétés scientifiques des divers pays et celle des mathématiciens décédés en 1911 et 1912.

---

# BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

## 1. Publications périodiques :

**Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Georg Reimer, Berlin.

Band 141. Heft. 1. — H. WEYL Ueber die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung. — L. LICHTENSTEIN : Ueber das Poissonche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentientials. — A. FRÆNKEL : Axiomatische Begründung von Hensels $p$--adichen Zahlen.

Heft 2. — R. REMAK : Ueber eine von Herrn H.-A. Schwarz angegebene Funktion. — L. SCHLESINGER : Ueber eine Klasse von Differetialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritische Punkten. — E. BUSCHE : Ueber die Theorie der biquadratischen Reste.

Heft 3. — H. WEYL : Ueber das Spektrum der Hohlraumsrtrahlung. — J. HORN : Zur Theorie der nicht linearen Differential-*u*. Differenten- gleichungen: — H. BOHR : die Funktion $\zeta'(s) : \zeta(s)$

## 2. Livres nouveaux :

W. H. BESANT and A. S. RAMSEY. — **A Treatise on Hydromechanics.** Part II. Hydrodynamics. — 1 vol. in-8°, XIII-360 p.; 10 sh. 6 ; G. Bell & Sons, Londres.

H. BOUASSE et E. TURRIÈRE. — **Exercices et compléments de Mathématiques générales,** faisant suite au cours de mathématiques générales de H. Bouasse. — 1 vol. in-8°, XV-500 p.; 18 fr.; Ch. Delagrave, Paris.

F. CALDARERA. — **Trattato dei Determinanti.** — 1 vol. gr. in-8°. 255 p.; 7 lires; Virzi, Palerme.

G. DEMARTRES. — **Cours de Géométrie infinitésimale,** avec une préface de P. APPELL. — 1 vol. in-8°, X-418 p.; 17 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

P. DIENES. — **Leçons sur les singularités des fonctions analytiques.** — 1 vol. in-8°, VIII-172 p.; 5 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

G. KOWALEWSKI. — **Einführung in die Infinitesimalrechnung,** mit einer historischen Uebersicht. — 2me édition. (Sammlung « Aus Natur und Geisteswelt », No 197.) 1 vol. in-16, 106 p.; relié 1,25 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

E. LEBON. — **Armand Gautier,** Biographie, Bibliographie analytique des Ecrits. — 1 fasc. in-8°, VIII-96 p.; Gauthier-Villars, Paris.

M. Lindow. — **Differential- und Integralrechnung,** mit Berücksichtigung der praktischen Anwendungen in der Technik. — (Sammlung « Aus Natur und Geisteswelt », No 387.) 1 vol. in-16, VII-111 p.; relié 1,25 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

L. Michælis. — **Mathematik für Biologen und Chemiker.** — 1 vol. in-8°, VII-253 p.; 7 M. 80; J. Springer, Berlin.

O. Perron. — **Die Lehre von den Kettenbrüchen.** — 1 vol. in-8°, XII-520 p.; prix, broché, 20 Mk.; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Picard. — **Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft,** Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. — (Sammlung « Wissenschaft und Hypothese », No XVI.) 1 vol in-8°, IV-292 p.; 6 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Sainte-Laguë. — **Notions de Mathématiques,** avec préface de G. Kœnigs. — 1 vol. in-8°, VII-512 p.; 7 fr.; A. Hermann & fils, Paris.

Schwab u. Lesser. — **Mathematisches Unterrichtswerk** für höhere Lehranstalten. Unter Mitarbeit von C.-H. Müller (Frankfurt a.-M.) und Max Linnich (Potsdam), herausgegeben von K. Schwab und O. Lesser (Frankfurt a.-M.).

*Ausgaben für höhere Knabenschulen : Band I :* Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. I. Teil : Für die mittleren Klassen sämtlicher höherer Lehranstalten. Dritte Auflage. 2 M. 80. — II. Teil : Ausgabe A : Für die oberen Klassen der Realanstalten. 3 M. — II. Teil : Ausgabe B : Für die oberen Klassen der Gymnasien. 2 M. — *Band II :* Lehr- und Uebungsbuch der Geometrie. I. Teil : Ausgabe A und B; 4 M. und 2 M. 50. — II. Teil : Ausgabe A und B; 2 M. und 3 M. — III. Teil : Ausgabe A ; 2 M. — *Band III :* I. Teil : Ausgabe A : Für Realanstalten. Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte und der analytischen Geometrie. — 3 M.; G. Freytag, Leipzig.

*Ausgabe für höhere Mädchenschulen,* herausgegeben von M. Linnich. Lehr- und Uebungsbuch der Mathematik. Teil I. und II. 2 M. le vol.

*Ausgabe für Lehrerinnenseminare,* von M. Linnich. Teil I : Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra, mit einem Anhang für den Unterricht in der analytischen Geometrie ; 2 M. 50. — Teil II : Lehr- und Uebungsbuch der Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie ; 3 M. ; G. Freytag, Leipzig.

D.-E. Smith et C. Goldziher. — **Bibliography of the Teaching of Mathematics 1900-1912.** — 1 fasc. in-8°, 95 p. — United States Bureau of Education, Washington.

G. Vivanti. — **Esercisi di Analisi infinitesimale.** — 1 vol. in-8°, IX-410 p.; 15 L.; Mattei & Cie, Pavie.

V. Volterra. — **Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles,** publiées par M. Tomassetti et F.-S. Zarlatti. — 1 vol. in-8°, VI-172 p. ; 5 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

**Taschenbuch für Mathematiker und Physiker,** herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe. 3. Jahrgang 1913. — 1 vol. in-16, X-463 p.; 6 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

# EXCENTRICITÉS ET MYSTÈRES DES NOMBRES[1]

« La source de toutes les mathématiques se trouve dans les nombres entiers ».
MINKOWSKI.

1. Durant un séjour prolongé dans une station balnéaire très fréquentée, où les patients ne font en général que de brèves cures, je fus frappé du très grand nombre de personnes qui défilèrent sous mes yeux. Ce nombre me paraissant énorme, j'eus la curiosité de m'informer auprès de la Direction des Bains et j'appris que durant les meilleures saisons le nombre des visiteurs n'atteignait pas dix mille, de sorte que je ne pouvais en avoir vu plus de cinq mille : je conçus de ce fait un respect considérable pour le nombre cinq mille et je remarquai que je devrais assister à toutes les saisons d'un siècle entier pour voir un million d'hommes et me former une conception de ce nombre *un million* que beaucoup prononcent, croyant en avoir une idée précise alors qu'ils ne font que répéter un mot entendu dès leur enfance. Je reconnus que la Nature m'ayant assez libéralement accordé l'Intuition géométrique m'avait en revanche refusé le don correspondant en Arithmétique, si bien que le regretté Georges Darwin n'eût pas manqué de déclarer mon « œil mathématique » ouvert à moitié seulement.

2. Je me suis aperçu depuis que cette incapacité de concevoir le nombre correspondant à une énorme totalité d'individus doit être un patrimoine commun de toute l'humanité et ceci explique les expédients auxquels on recourt pour aider à concevoir de nombres très grands. Ainsi lorsque l'administration du Palais de cristal à Londres publia, en 1864, que, durant ses dix premières années d'existence, l'établissement avait reçu Quinze Millions de visiteurs, elle exposa un ruban de coton sur lequel Un Million de points noirs étaient régulièrement disposés. Un amateur de statistique ayant calculé approximativement combien l'ensemble des œuvres écrites par les hommes, depuis la Création, remplirait de

[1] Résumé d'une conférence présentée par M. Gino LORIA au 3e Congrès de la Société « Mathesis », à Gênes, le 22 octobre 1912. — Traduction de M. Eug. CHATELAIN, Dr ès sc., La Chaux-de-Fonds (Suisse).

volumes in-8°, obtint un nombre si énorme que pour en donner une idée il dut ajouter qu'une personne lisant un de ces volumes par jour en aurait pour Trente Mille ans.

3. Après m'être persuadé que les collections d'hommes ou d'objets ne facilitaient pas la conception des grands nombres abstraits (au contraire !), je voulus recourir à faire correspondre aux nombres des intervalles de temps, ainsi que Hamilton me paraît en suggérer l'idée lorsqu'il dit : « l'Algèbre, la science du temps pur ». Je me préparais une désillusion. Une minute passe si rapide qu'on est porté à penser qu'Un Milliard de minutes ne constituent pas une période très considérable et pourtant Hermann Schubert a calculé que le 28 avril 1902, à 10 h. 40 du matin, un milliard de minutes s'étaient écoulées depuis la naissance du Christ. Passons en revue les bouleversements politiques et sociaux survenus durant ce temps, l'énorme travail accompli dans les Arts de la Paix et de la Guerre, dans les Sciences, pures et appliquées, dans l'Industrie et le Commerce, tenons compte des époques de torpeur et de folie furieuse, où l'on a détruit ce que les ancêtres avaient bâti, nous devons reconnaître qu'un milliard de minutes est un temps beaucoup plus formidable que nous n'aurions pu le supposer et que Un Milliard est une totalité plus énorme que n'en jugent même ceux qui en ont fait leur blason.

On ne se heurte pas à de moindres difficultés si l'on appelle l'Espace au secours de la représentation des nombres. Qui saurait concevoir la plus modeste des longueurs considérées en Astronomie ? La distance qui sert de base, celle qui sépare la Terre du Soleil est en moyenne de 150 Millions de Kilomètres. Une automobile qui ne s'arrêterait pas pourrait parcourir cette distance en 340 ans, à l'allure de 50 km. à l'heure.

4. Cette difficulté à concevoir les très grands nombres a été observée dès la plus haute Antiquité. L'Ecriture Sainte ne cite jamais de nombre supérieur à Dix Mille. Les Babyloniens ne se risquèrent jamais au delà de Cent Mille. En écriture hiéroglyphique égyptienne Un Million est représenté par un homme qui lève les bras en signe d'extrême étonnement. Les Chinois atteignirent le nombre formé de Un suivi de quatorze zéros, et les Hindous allèrent jusqu'à Un suivi de vingt et un zéros, mais il est permis de douter qu'ils aient effectivement conçu des grandeurs aussi stupéfiantes.

Les contemporains d'Archimède n'ont pas surmonté ces obstacles; épuisés par l'effort immense qu'ils devaient faire pour arriver à une certaine limite, ils préfèrent ne pas la dépasser et s'abîmer dans l'infini ; en effet, dans une de ses œuvres, l'*Arenarius*, Archimède s'efforce de démontrer qu'il est erroné de considérer comme infini le nombre des grains de sable qui constituent le fond de la mer. Dans ce but, l'illustre Syracusien imagina un système de

numération excessivement ingénieux qui lui permettait de représenter graphiquement tous les nombres jusqu'à celui que nous écririons Un suivi de 80 Mille Millions de zéros.

5. Les énormes difficultés rencontrées par la plupart de ceux qui veulent se faire une image claire de très grands nombres prouvent que l'intuition arithmétique est une faculté beaucoup plus rare que l'intuition géométrique. Les calculateurs célèbres qui étonnèrent le monde ont sans doute développé par un savant entraînement une qualité latente très rare et l'on pourrait rechercher et étudier les procédés développant l'intuition arithmétique, correspondant à ceux que l'on connaît dans le domaine de la Géométrie. Pour comprendre l'importance de cette action il suffit de se souvenir que la « myopie arithmétique » si répandue cause la stupéfaction et l'incrédulité que rencontrent les résultats d'opérations arithmétiques fort simples. C'est l'occasion de répéter avec Bacon : « l'Etonnement est père de Science », mais c'est le cas d'ajouter qu'il est fils de l'Ignorance.

Un des plus anciens exemples d'opération apparemment enfantine, mais à résultat stupéfiant, est la récompense si connue que Sissa ben Daher l'inventeur du jeu d'échecs demanda à son roi : Un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième et ainsi de suite en doublant le nombre de grains de case en case jusqu'à la soixante-quatrième. La quantité de blé demandée sous cette apparente modestie formerait une couche de un centimètre d'épaisseur sur toute la surface de la Terre. Ce résultat merveilleux est devenu proverbial.

D'ailleurs ce n'est pas sans scepticisme que beaucoup de personnes apprirent en 1871 que la France eût possédé l'indemnité de guerre de cinq milliards si, en 1413 (peu après la mort de Jeanne d'Arc), le roi Charles VII avait eu la précaution de placer Un franc à intérêts composés à 5 %.

L'analyse combinatoire conduit plus encore que les progressions à des nombres inconcevables. Le nombre de groupes que l'on peut former avec un ensemble assez restreint d'éléments est énormément plus grand que le vulgaire n'imagine. C'est sur cette ignorance que sont basés la plupart des tripots (loto, etc.), officiels ou clandestins, qui distribuent des sommes toujours dérisoires aux naïfs alléchés par le mirage de la fortune.

C'est encore à cause de cette ignorance qu'on se demande quelquefois si le nombre de motifs musicaux, combinaisons qu'on peut former avec les 7 notes de la gamme, ne sera pas épuisée bientôt ; mais, que les jeunes compositeurs se rassurent, le nombre des combinaisons encore inédites obéissant aux lois de l'Harmonie est assez formidable pour qu'on ose attendre encore d'innombrables chefs-d'œuvre.

6. Pour faciliter la conception des nombres de la série naturelle

on a coutume de les représenter par des points équidistants d'une droite indéfinie; on est amené presqu'inconsciemment à choisir les intervalles de séparation égaux entre eux; mais tandis que les différents points d'une droite ne se distinguent les uns des autres que par leur position, les nombres correspondants ne diffèrent pas seulement par la grandeur, chacun d'eux possède des qualités spécifiques qui le caractérisent; on a donc fait correspondre l'homogène à l'hétérogène; par suite cette correspondance est grossière, infidèle, elle ne tient nul compte de l'essence même des notions à représenter.

Comme exemple de ces propriétés distinctives, rappelons qu'Edouard Lucas a démontré que *Cinq* est le seul nombre qui soit somme des carrés de deux nombres consécutifs et dont le carré puisse être exprimé de la même manière ($5 = 1^2 + 2^2$; $25 = 3^2 + 4^2$). Il a démontré encore que *Sept* est le seul nombre égal au double d'un carré moins un et dont le carré puisse être représenté de la même manière ($7 = 2.2^2 - 1$; $49 = 2.5^2 - 1$).

Cette grande diversité entre les propriétés des éléments de la suite naturelle des nombres a enrichi la Théorie des Nombres de tout un monde de propositions excessivement curieuses dont l'énoncé est intelligible à chacun, que chacun peut vérifier facilement sur d'innombrables exemples, que chacun croit pouvoir démontrer immédiatement, tandis qu'elles dissimulent des difficultés aussi graves qu'insoupçonnées. L'amour des généralisations audacieuses est si vif chez les mathématiciens que des savants pourtant perspicaces se sont laissé entraîner dans ce domaine à des affirmations que la postérité ne put confirmer; aussi doit-on, en Théorie des Nombres plus que dans aucune autre discipline, tenir en rigoureuse quarantaine toute proposition qui ne serait pas accompagnée d'une démonstration impeccable.

Dès les plus élémentaires recherches arithmétiques on perçoit l'hétérogénéité complète de la suite naturelle des nombres et la nécessité d'une classification.

On attribue à Pythagore la distinction entre nombres pairs et impairs, mais elle ne peut avoir échappé à aucun peuple tant soit peu civilisé. Cette distinction est fondamentale, non seulement au point de vue purement arithmétique, mais encore dans des domaines bien éloignés. Ainsi les Quadriques d'un espace linéaire jouissent de propriétés toutes différentes selon que les dimensions de l'espace sont en nombre pair ou impair; de même la Cinématique d'un espace linéaire présente des phénomènes radicalement différents suivant que l'espace a un nombre pair ou un nombre impair de dimensions. Et dans la théorie des Déterminants d'ordre supérieur, on ne peut éviter de distinguer le cas où cet ordre est indiqué par un nombre pair du cas où il est désigné par un nombre impair.

7. La distinction entre les nombres Premiers et les nombres Composés est aussi ancienne et plus féconde encore que la précédente. Lorsqu'on parcourt la suite naturelle en soulignant ceux de ses éléments qui sont nombres premiers on s'aperçoit qu'à mesure qu'on avance les éléments soulignés deviennent de plus en plus rares et l'on peut se demander si, au delà d'une certaine limite ne se trouvent plus que des nombres composés. Cette question s'est posée aux Anciens déjà, puisqu'Euclide a jugé bon d'y répondre en montrant comment on peut constituer une suite illimitée de nombres tous premiers, ce qui permet de dire que la progression arithmétique ayant l'unité comme premier terme et comme raison contient une infinité de nombres premiers. En est-il de même de toute progression arithmétique ? Il est évidemment *nécessaire* que le premier terme et la raison soient premiers entre eux, mais cette condition est-elle *suffisante* ? Legendre l'avait admis et Lejeune-Dirichlet l'a démontré en une impressionnante application de l'Analyse infinitésimale à l'Arithmétique. La démonstration ne remplit pas moins de 26 pages in-4° et ne révèle pas la raison intime de la vérité qu'elle établit, ainsi qu'il arrive toujours lorsqu'un raisonnement utilise des considérations n'ayant pas de liens visibles avec le but qu'il se propose. On attend encore la démonstration arithmétique de la présence d'une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique ou la preuve que cette démonstration est impossible par un raisonnement exclusivement arithmétique.

D'autres points de la Théorie des Nombres ont été longtemps ou sont encore entourés de mystère. En 1845, Joseph Bertrand, au cours de recherches sur la Théorie des Substitutions, fut conduit à admettre que « si $n$ désigne un nombre supérieur à 7 il existe toujours un nombre premier entre $\frac{n}{2}$ et $n - 2$ » ; bien que persuadé de l'exactitude de cette proposition il ne réussit pas malgré ses efforts réitérés à la démontrer et il la publia sous le nom de Postulat. Une dizaine d'années plus tard le géomètre russe Tchebycheff imagina une démonstration rigoureuse et fit de ce Postulat un véritable Théorème.

Vers le milieu du XVIII^e siècle Goldbach constata sur beaucoup de nombres pairs qu'ils étaient tous décomposables en somme de deux nombres premiers. Léonard Euler se déclara persuadé qu'il s'agissait là d'une véritable Loi, absolument générale, mais il ne parvint pas à la démontrer. A la fin du siècle passé Georges Cantor, aidé par un de ses disciples, établit expérimentalement l'exactitude de la loi de Goldbach pour les nombres inférieurs à 3000. Nous attendons de futurs chercheurs qu'ils démontrent logiquement cette loi ou qu'ils indiquent les cas où elle serait en défaut, et encore qu'ils décident de la généralité de la proposition ana-

logue proposée par le prince de Polignac : Tout nombre premier peut être considéré comme différence de deux nombres premiers.

En 1878, un mathématicien anglais, Glaisher, examina les couples de nombres impairs consécutifs tous deux premiers comme 11 et 13 ou 29 et 31 et constata qu'entre 1 et 100,000 il y a 1125 de ces couples, tandis qu'entre 1,000,000 et 1,100,000 il n'y en a que 725 et même qu'entre 8,000,000 et 8,100,000 leur nombre n'est plus que 518. Cette observation nous amène à nous demander si à partir d'une certaine limite on ne trouve plus aucun de ces couples. C'est de nouveau une question qui n'a pas encore reçu de réponse.

8. Pour faire pendant à ces Théorèmes dont l'énoncé paraît élémentaire mais dont la démonstration est singulièrement ardue nous avons des Problèmes d'apparence très simples et dont la solution présente des difficultés exceptionnellement graves lorsque les nombres donnés sont très grands.

Dans ce genre, les deux questions connexes de la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers et de l'établissement d'un critère sûr pour reconnaître si un nombre est premier, sont typiques. L'Antiquité eut déjà conscience des difficultés de la seconde question et le géomètre Erastothène, de l'école d'Alexandrie, en proposa une solution empirique : son célèbre « Crible » établissant une table des nombres premiers.

Tous les traités d'Arithmétique, même les plus élémentaires, exposent la solution du premier problème. Cette méthode, dont l'origine se perd dans la nuit des temps, ne rend que des services d'une valeur discutable lorsqu'il s'agit de décomposer un très grand nombre en ses facteurs premiers, preuve en soit la curieuse erreur commise par Jean Bernoulli (le troisième de ce nom) en prétendant que $10^{11} + 1$ n'admet que les facteurs premiers 11 et 23, alors que ce nombre en possède encore 2 autres de 4 chiffres chacun.

On peut croire que Fermat ait été en possession d'une méthode satisfaisant pleinement aux exigences de la pratique lorsqu'on songe à l'impressionnante désinvolture avec laquelle il répondit au Père Mersenne que le nombre de 12 chiffres 100,895,598,169 est le produit des 2 nombres de 6 chiffres chacun : 898,423 et 112,303.

Un des plus intrépides calculateurs que l'humanité ait connu : Landry, à qui nous devons la décomposition en facteurs premiers de tous les nombres de la forme $2^n \pm 1$ pour toutes les valeurs de $n$ inférieures à 64, a déclaré que de toutes les décompositions effectuées celle qui avait exigé le plus de patience est celle du nombre $2^{58} + 1$ dont les deux derniers facteurs ont chacun 9 chiffres, leur produit qu'il s'agissait de décomposer est le nombre de 17 chiffres : 57,646,075,230,342,349. Voilà qui donne une idée de la difficulté du problème et qui fit déclarer à Landry qu'on ne

pourrait retrouver ces facteurs de fort longtemps s'ils venaient à se perdre. Il y aurait matière à une monographie aussi intéressante qu'utile à rassembler, à coordonner avec beaucoup d'art et de science les procédés utilisés pour venir à bout de ces difficultés pour des nombres d'une forme particulière.

Les merveilleuses méthodes analytiques utilisées dans l'étude de la répartition ou « fréquence » des nombres premiers sont exposées dans les remarquables travaux de Gabriel Torelli et d'Edmond Landau.

Faute d'un critère certain permettant de reconnaître si un nombre est premier ou d'une expression analytique comprenant tous les nombres premiers et aucun autre, bon nombre de problèmes très importants attendent en vain leur solution. Pour nous conformer au précepte de Newton : Exempla plus prosunt quam praecepta ! citons quelques faits.

Gauss a démontré que les polygones réguliers que l'on peut construire à l'aide de la règle et du compas sont ceux dont le nombre de côtés est premier et de la forme $2^{2^{\mu}} + 1$ ; or pour $\mu = 1, 2$ ou $3$ la formule donne les nombres 5, 17, 257 qui sont premiers. Fermat croyait qu'il en allait de même pour toutes les valeurs de l'exposant, mais on ne tarda pas à s'apercevoir de son erreur, car en 1732 Euler démontra que $2^{32} + 1$ est divisible par 641. Eisenstein affirma plus tard que la formule de Gauss embrasse une infinité de nombres premiers, mais jusqu'à ce que ce fait soit démontré nous ignorerons si les polygones réguliers constructibles élémentairement sont en nombre limité ou illimité.

Les Nombres Parfaits (qui sont égaux à la somme de leurs diviseurs) que nous connaissons sont pairs, on ne sait s'il y en a d'impairs, et Euclide a montré qu'ils sont de la forme $(2^n - 1)2^{n-1}$, à condition que $2^n - 1$ soit un nombre premier. Si à partir d'une certaine valeur de $n$, $2^n - 1$ est toujours composé, il n'existe qu'un nombre limité de nombres parfaits; si la formule $2^n - 1$ inclut au contraire une infinité de nombres premiers, les nombres parfaits sont aussi une infinité. Laquelle des deux propositions est vraie ? Mystère !

9. L'extraordinaire fécondité de la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers a éveillé l'idée d'étudier des décompositions basées non plus sur la multiplication mais sur l'addition.

Le Théorème de Pythagore avait conduit à la découverte d'une infinité de carrés qu'on peut décomposer en une somme de deux carrés. Plur tard, le Grec Diophante montra la possibilité de transformer dans certains cas une somme de deux cubes en une différence de deux autres cubes, ce qui suggéra la question, dont Euler s'est occupé, de décomposer quand c'est possible un cube en somme de trois autres cubes.

La première décomposition additive applicable à tous les nom-

bres est due à Fermat qui annonça que tout nombre peut être exprimé comme somme de quatre carrés. Lagrange démontra cette vérité. Fermat de plus formula les suivantes : Tout nombre est une somme de trois nombres triangulaires, ou de cinq nombres pentagonaux, etc. Elles furent démontrées par Cauchy.

A la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, le géomètre anglais Edouard Waring, signala que tout nombre peut être représenté comme somme d'un nombre déterminé N de puissances $n$-ièmes. — N a une valeur déterminée pour chaque valeur de $n$, ainsi pour $n = 2$, $N = 4$ (Théorème de Fermat-Lagrange). Le cas de cette proposition relatif à $n = 3$ (alors $N = 9$) attira l'attention de Jacobi qui, faute d'une démonstration procéda à la vérification expérimentale, avec l'aide du calculateur Dase, pour les nombres inférieurs à 12,000. Un demi-siècle plus tard on reconnut l'exactitude de la loi jusqu'au nombre 40,000.

Il y a quatre ans seulement que David Hilbert a démontré en général le Théorème de Waring à l'aide de l'analyse infinitésimale ; il donnait ainsi une preuve nouvelle des liens intimes qui unissent ce domaine à l'Arithmétique, mais la postérité devra décider si cette intervention de l'analyse infinitésimale est indispensable.

Si important que soit le progrès réalisé par Hilbert, il n'épuise pas les questions ayant le « Problème de Waring » comme noyau : il reste à déterminer la plus petite valeur que peut prendre N pour chaque valeur déterminée de $n$.

On s'est attaqué à ce problème en adoptant la tactique des approximations successives. Ainsi pour $n = 3$, Waring avait annoncé $N = 9$. Maillet trouva d'abord 17, plus tard Fleck abaissa ce nombre à 13 et finalement Wieferich établit définitivement que $N = 9$, de sorte que l'on peut dire avec certitude que « tout nombre peut être représenté comme somme de neuf cubes ».

De même pour $n = 4$ on a obtenu successivement 53, puis 47, 45, 41, 39, 38 et 37 ; au dire de Waring le minimum serait 19. Si l'on pouvait l'abaisser à 16, tout nombre serait décomposable en une somme de 16 puissances quatrièmes, ce qui donnerait à espérer qu'un jour, sans doute terriblement éloigné, peut-être on pourra dire : « Tout nombre est décomposable en une somme de $n^2$ puissances $n$-ièmes ».

10. Ces considérations décèlent l'existence d'une mine abondant en résultats précieux et qui n'attend que d'habiles explorateurs. En effet, en démontrant que *tous* les nombres peuvent être exprimés par une somme de N puissances $n$-ièmes, on n'exclut pas la possibilité que pour certains nombres de forme particulière il y ait moins de N addendes, ce qui pose le problème général de la détermination du plus petit nombre d'addentes pour des catégories spéciales de nombres. Par exemple : En combien de puis-

sances $n$-ièmes peut-on décomposer toutes les puissances $n$-ièmes. Cette question est résolue pour $n = 2$, car on connaît des carrés qui ne peuvent être représentés par moins de 4 carrés, mais on ne sait pas s'il existe des cubes qu'on ne peut obtenir en additionnant moins de 9 cubes. Si l'on arrivait à démontrer que quand $n$ surpasse 2, ce minimum est toujours spérieur à 2 et ne peut s'abaisser jusqu'à 2 pour aucun nombre isolé, on aurait démontré du même coup que la somme de 2 puissances $n$-ièmes n'est jamais une puissance $n$-ième (pour $n$ supérieur à 2). C'est le grand Théorème de Fermat, la plus célèbre et la plus obscure énigme des mathématiques. Bien que son auteur se soit prétendu en mesure de le démontrer en quelques pages personne n'est parvenu à reconstituer sa démonstration et les plus éminents chercheurs n'ont pu qu'étendre le champ des valeurs de l'exposant pour lesquels le Théorème est certainement valable et accroître la probabilité qu'il soit général. Existe-t-il un nombre original qui, choisi comme exposant, mettrait en défaut l'assertion de Fermat ? On n'est pas en mesure de le nier ! Des myriades de mathématiciens s'efforcent de dissiper cette incertitude et d'atteindre le sommet du mât de Cocagne où la générosité du docteur Wolfskehl a placé 100,000 Marks.

Dans ce qui précède nous n'avons guère célébré les splendides victoires des Mathématiques ; au lieu de nous élever sur les cimes déjà conquises, nous nous sommes attardés à contempler les abîmes inexplorés et nous ne saurions mieux conclure qu'en répétant avec Hamlet : « O Horace, il est au ciel et sur la terre plus de mystères que ne l'imagine notre philosophie ! »

Gino Loria (Gênes).

---

# SUR DIVERS PROCÉDÉS DE FACTORISATION[1]

> Problema, numeros primos a compositis dignoscendi, hosque in factores suos primos resoluendi, ad gravissima ac utilissima arithmeticæ pertinere.
>
> GAUSS.

Reconnaître si un nombre donné quelconque $a$ est divisible par un autre nombre donné $b$ est chose facile : on n'a qu'à effectuer la division de $a$ par $b$. Même si $a$ n'est pas donné explicitement, la chose est encore possible, en faisant appel à la théorie des congruences[2], d'après un procédé dû en principe à Euler.

La question inverse : *déterminer les nombres divisant un nombre donné,* c'est-à-dire résoudre l'équation $xy = n$, est au contraire d'une difficulté telle que, — sauf pour les nombres qu'on peut mettre sous certaines formes spéciales, — elle n'est pratiquement soluble que pour des nombres n'ayant guère plus de dix ou douze chiffres ; et encore les calculs qu'elle nécessite sont-ils alors d'une effrayante prolixité. D'après une assertion de Gauss, il ne faut pas se flatter de trouver une méthode dont la difficulté d'application ne croisse pas beaucoup plus rapidement que le nombre des chiffres à *factoriser*.

---

[1] Depuis une quinzaine d'années, on appelle ainsi, d'après les arithméticiens anglais, la décomposition d'un nombre entier en ses facteurs premiers.

[2] Ainsi *soit à trouver le reste de la division de* $2^{35}$ *par* 31867 : on a, suivant le module 31867,

$$2^{15} \equiv 32768 \equiv 901 \ , \qquad 2^{30} \equiv 901^2 \equiv 15126 \ , \qquad 2^{35} \equiv 15126 . 32 \equiv 6027 \ .$$

On démontre de même que $7^{160} + 1$ est divisible par 641 (Euler, voir *Ens. math.*, 1907, p. 437), que $3^{1000} - 3$ l'est par 13 (Gauss, *id.*), que $189^{n+1} - 189^{n} + 189^{n-6}$ l'est par 191 (Desmarets, *id.*), que $2^{2^{36}} + 1$ l'est par 2 748 779 069 441 (Seelhof).

Certaines identités algébriques fournissent très simplement une infinité de résultats de ce genre. Ainsi on connaît la factorisation algébrique des expressions $a^n - b^n$, $a^{2n+1} + b^{2n+1}$, $a^4 + 4b^4$ : *tout nombre de cette dernière forme est composé et égal au produit des deux suivants* $a^2 \pm 2ab + 2b^2$ (Euler) ; d'où trois théorèmes dus à Goldbach, Sophie Germain et Aurifeuille, en faisant

$$a = 1 \ ; \qquad b = 1 \ ; \qquad a = 1 \ , \quad b = 2^n \ .$$

Ed. Lucas et le lieut.-col. Cunningham entre autres, ont fait de nombreuses recherches sur ce genre de formules algébriquement décomposables.

La connaissance d'expressions jouissant de cette propriété est du reste extrêmement utile : pour factoriser un nombre donné, on cherche d'abord à le diviser par les plus petits nombres premiers, 3, 5, 7, 11, 13, ... ; on s'assure, par le calcul ou au moyen de tables, qu'il n'est ni carré, ni cube, ni triangulaire ; et on essaie ensuite de le mettre sous la forme d'une de ces expressions décomposables, ce qui — si on réussit — évite de longs calculs.

Les Anciens s'étaient probablement posé ce problème, mais sans aboutir jusqu'à Euclide, à d'autres résultats que la connaissance de certaines propriétés des nombres premiers. Peu après lui cependant, un pas important fut fait dans cette voie, l'invention du *crible d'Eratosthène*.

Les Indiens et les Arabes ont dû également s'en occuper; toutefois c'est dans Fibonacci qu'on voit, pour la première fois (1202), cette règle toute théorique d'*essayer la division du nombre à factoriser par tous les nombres premiers inférieurs à sa racine carrée*[1].

C'est seulement avec les Modernes qu'on est arrivé à reculer la limite des nombres qui peuvent être factorisés. A Frénicle paraît

---

[1] Les divisions à effectuer peuvent être facilitées par les considérations qui suivent :

*Il y a avantage à commencer les essais en partant de la limite* $\sqrt{n}$. En effet, soit $n = pa + r$; si un diviseur $q$ de $r$ ne divise pas $a$, il sera inutile d'essayer la division par $q$ (E. Lebon). Ainsi $4171 = 68.61 + 23$ : il est donc inutile de diviser par 23.

Si le quotient n'a pas plus de quatre ou cinq chiffres, on peut, avec Ed. Lucas, se servir d'une table de logarithmes à sept décimales.

Si le nombre à factoriser se termine à droite, par exemple par 7, les deux facteurs de ce nombre sont terminés l'un par 7 et l'autre par 1, ou bien l'un par 3 et l'autre par 9. On mettra sur une ligne les nombres premiers décroissants à partir de $\sqrt{n}$ et sur une deuxième ligne, les nombres croissants également à partir de $\sqrt{n}$ et qui, multipliés par leurs correspondants de la première ligne, paraissent devoir produire le nombre $n$. Ainsi soit le nombre $n = 4171$ ; on considère les couples

$$61.71\ ,\quad 59.69 \text{ ou } 59.79\ ,\quad 53.77\ ,\quad 47.93\ ,\quad 43.87 \text{ ou } 43.97\ ,\ \ldots$$

La preuve par 9 fait voir que $n \equiv 4 \pmod 9$ ; par l'addition des chiffres des différents couples, on voit qu'on peut se borner à essayer seulement les produits 53.77, 43.97, ... dont le deuxième réussit. Ainsi $n$ se trouve décomposé en ses facteurs 43 et 97.

*Si* $\alpha$ *et* $\beta$ *représentent les restes de la division de* a *et de* b *par* p, *celui de* $a^2 + b$ *divisé par* p *est congru à* $\alpha^2 + \beta$.

*Soit* $n = a^2 + b$ : *cherchons le nombre impair* x *tel que* $\frac{ax + b}{a - x}$ *soit entier :* n *est divisible par* $a - x$. Par exemple, faisant $a = 14$, $b = 1$ et $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ; la formule qui précède prend les valeurs

$$\frac{15}{13}\ ,\quad \frac{43}{11}\ ,\quad \frac{71}{9}\ ,\quad \frac{99}{7}\ ,\quad \frac{127}{5}\ ,\quad \frac{155}{3}\ .$$

dont aucune n'est entière : le nombre $14^2 + 1$ est donc premier.

*Si* n *est composé et* $p < E\sqrt{n}$, *l'un des nombres* $\frac{n - 9}{3}$, $\frac{n - 25}{5}$, $\frac{n - 49}{7}$, $\frac{n - 121}{11}$, $\frac{n - 169}{13}$, ... $\frac{n - p^2}{p}$ *est entier ; sinon* n *est premier*. Ainsi aucun des nombres $\frac{188}{3}$, $\frac{172}{5}$, $\frac{148}{7}$, $\frac{76}{11}$, $\frac{28}{13}$ n'est entier; donc 197 est premier.

Voici un autre procédé dû à M. E. Lebon : *soit* $n = a^2 + b$; *si aucun des nombres* $\frac{(a - 3)^2 + b}{3}$, $\frac{(a - 5)^2 + b}{5}$, $\frac{(a - 7)^2 + b}{7}$, ... *n'est entier*, n *est premier*. On peut l'appliquer à $n = 14^2 + 1$.

M. Barbette (*Les p*[ces] *puis.*, Liège, 1910), a remarqué que la question revient à rechercher le p.g.c.d. de deux nombres des formes $p - x$ et $n - (p - x)^2$, $x$ prenant les valeurs 0, 1, 2, 3, ...

A signaler aussi : 1° cette remarque faite incidemment par Euler : *soit* p *le plus petit nombre premier qui divise* n, *et soit* $n = pa$ : *on trouvera les diviseurs de* a *en divisant ce nombre par les nombres premiers compris entre* $\sqrt{a}$ *et* $\sqrt{n}$ ; d'où il suit que, comme l'a observé Legendre, *si* $p > \sqrt{a}$, a *est premier ;* 2° celle-ci: de Gauss : *le nombre* n *ne peut avoir plus d'un facteur supérieur à* $\sqrt{n}$.

due l'idée de réduire le nombre des essais, en classant les diviseurs sous certaines formes nécessaires qui montrent à priori l'inutilité de certains essais (L'ouvrage qu'il avait écrit sur cette question est resté manuscrit (voir *Divers ouvrages*..., Paris, 1693, préface de Lahire).

Fermat a beaucoup cultivé cette féconde théorie de l'*exclusion*, et semble avoir trouvé à ce sujet de nombreux théorèmes dont la plus grande partie est encore inconnue, malgré les recherches des érudits et des savants. On peut résumer ainsi qu'il suit ce qu'on sait des découvertes du célèbre géomètre sur cette question.

Dans ses *Cogitata* (1644), Mersenne, probablement d'après Frenicle, annonce que *jusqu'à* $n = 257$, *les seules valeurs de* n *qui font de* $2^{n-1}(2^n - 1)$ *un nombre parfait, c'est-à-dire de* $2^n - 1$ *un nombre premier, sont* 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 et 257. On peut voir dans le t. I de *Récr. math.* de Rouse-Ball (seconde édition française, 1909), quelques-unes des tentatives faites pour démontrer cette proposition.

Dans le *Comm. epist.* de Wallis (1658), on trouve, de Fermat, les suivantes, qui ont été le point de départ de nombreux travaux d'Euler : *tout nombre premier* 4 + 1 *est, d'une seule manière, une somme de deux carrés. Tout nombre premier* 3 + 1 *divise* $y^2 + 3z^2$.

Dans les *Varia Opera* (1679), on voit celles-ci :

*Une somme de deux carrés premiers entre eux n'a aucun facteur de la forme* 4 — 1, ainsi il est inutile d'essayer la division de $10^{10} + 1$ par 3, par 7, par 11, par 19, par 23, ...

*Si*, p *étant premier*, $a^t$ *est la plus petite puissance de* a *qui soit* $\equiv 1$ (mod *p*), t *est un diviseur de* $p - 1$ [1] ; *si* t *est impair, aucun nombre de la forme* $a^x + 1$ *n'est multiple de* p. *Si* t *est un nombre premier pair* 2z, *on a* $a^z + 1 \equiv 0$. *Si* $p = 4 - 1$ *et que* $a^{2n+1} \equiv b^2$, *on pourra écrire* $a^y \equiv 1$ *avec* y *impair, et par suite il sera possible de trouver un nombre* z *tel que* $a^z + 1 \equiv 0$.

*Aucun diviseur de* $a^2 - 2$ *n'est de la forme* $x^2 + 2$.

*Si* p *est premier, les diviseurs de* $2^p - 2$ *sont de la forme* 2px, *et ceux de* $2^p - 1$, *de la forme* $2px + 1$. Ainsi les diviseurs de $2^{37} - 1$ sont de la forme 74 + 1. Essayant la division par les nombres premiers de cette forme, 149, 233, ... l'opération réussit au deuxième essai [2]. *Aucun nombre* $2^{xy} - 1$ *n'est premier.*

*Tout nombre premier* 3 + 1 *est de la forme* $x^2 + 3y^2$. *Tout nombre premier* 8 + 1 *ou* 8 + 3 *est de la forme* $x^2 + 2y^2$.

---

[1] C'est là le théorème de Fermat.

L'exposant *t* s'appelle, d'après Ed. Lucas, le *gaussien* de *p* ; il serait, d'après ce qui précède, plus équitable de le désigner par un mot rappelant le nom de Fermat, qui l'a considéré le premier.

[2] On démontrera de même que $2^{11} - 1$ est divisible par 23 (Fermat) ; que $2^{23} - 1$, $2^{29} - 1$, $2^{43} - 1$, $2^{73} - 1$, sont respectivement divisibles par 47, 1103, 431, 439 (Euler) ; et autres factorisations analogues. (Voir Rouse-Ball, *op. cit.*, p. 311, et Ed. Lucas, *Th. des n.*, p. 51.)

Depuis, on a retrouvé et publié en 1880 et 1883 quelques lettres de Fermat, dont on citera ce qui suit :

*Tout impair non carré est autant de fois de la forme* $x^2 - y^2$ *qu'il est de fois le produit de deux facteurs*[1]. Soit à trouver les facteurs de $n = 2027651281$ ; l'extraction de la racine carrée donnera $n = 45029^2 + 40440$. Le carré immédiatement supérieur à $n$ le surpasse de $2 . 45029 + 1 - 40440 = 49619$, nombre non carré, ce qu'indiquent suffisamment ses deux derniers chiffres à droite[2]. Le carré qui suit surpasse $n$ de $49619 + 2 . 45029 + 3 = 139680$, nombre non carré. Continuant ainsi, on trouve à la dixième opération, $45041^2 = n + 1020^2$ ; de là la décomposition $n = 46061 . 44021$[3].

---

[1] A citer ces deux théorèmes analogues :

*Si on peut écrire* $a^2 + 4n = f^2$ et $a^2 - 4n = g^2$, *le nombre* n *est de la forme* $xy(x^2 - y^2)$. En effet, des deux relations données, on tire

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^2 + \left(\frac{f-g}{2}\right)^2 = a^2$$

ce qui conduit à poser

$$\frac{f+g}{2} = x^2 - y^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{f-g}{2} = 2xy , \qquad \text{d'où} \qquad n = xy(x^2 - y^2) . \qquad \text{(Aurifeuille)}$$

*Pour* n *premier*, $v^2 + 8n$ *ne peut donner un carré que si* $v = 2n - 1$ *ou* $v = n - 2$. En effet, tout entier $n$ peut se mettre sous la forme $xy - \frac{x(x-1)}{2}$, d'où $2x = 2y + 1 + \sqrt{(2y+1)^2 - 8n}$ ; donc, en posant $2y + 1 = u$, $u^2 - 8n$ doit être un carré $v^2$, qui doit être impair, car les nombres $u + v$ et $u - v$ sont de même parité et par suite tous les deux pairs puisque leur produit $8n$ est pair. Si $n$ est premier, on a les deux solutions uniques

$$u + v = 4n , \quad u - v = 2 , \qquad \text{d'où} \qquad v = 2n - 1 ;$$
$$u + v = 2n , \quad u - v = 4 , \qquad \text{d'où} \qquad v = n - 2 .$$

Si $n$ est composé, on a au moins les deux relations distinctes $u^2 - v^2 = 8n$, $u'^2 - v'^2 = 8n$, d'où, au moins, quatre solutions de l'équation $u^2 - v^2 = 8n$ (Barbette, *op. cit.*).

Posons $n = xy$; l'identité $nz = \left(\frac{x+yz}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-yz}{2}\right)^2$ montre que si $z$ est l'impair le plus voisin de $\frac{x}{y}$, $zn$ sera une différence de deux carrés dont le plus petit sera aussi petit que possible : on pourra ainsi appliquer à $zn$ la méthode de Fermat. La recherche des diviseurs de $n$ est donc ramenée à celle de la valeur de $z$. Le plus souvent, $z$ n'est pas très grand et il suffira d'appliquer la méthode aux nombres $n$, $3n$, $5n$, $7n$.

[2] On sait qu'un carré est toujours terminé par l'un des vingt-deux groupes suivants :

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96.

[3] Dans ce cas particulier, les opérations sont peu nombreuses, les deux facteurs différant peu l'un de l'autre. Toutefois, on pourrait abréger et exclure souvent dix nombres d'un coup.

Dans le même ordre d'idées, pour $n = 4171$, nombre examiné déjà plus haut, on a les deux relations

$$4n = 129^2 + 43 = (3 . 43)^2 + 43$$
$$13n - 12n = (232^2 + 399) - (241^2 + 313) = 473 . 9 - 86 ,$$

dont chacune donne la solution.

Plus généralement, la décomposition se trouvera de la même manière, si on peut écrire :

$$An = fa^2 + gb^2 + ha + jb + c , \qquad Bn = fb^2 + ga^2 + hb + ja + c .$$

On pourrait assigner d'autres formules plus faciles à imaginer qu'à appliquer. Par exemple, en combinant, par voie d'addition, les deux suivantes

$$An = a(c+f) + b(d+f) , \qquad Bn = b(c+g) + a(d+g) .$$

Mais souvent l'habitude du calcul suggérera des exclusions évidentes ; ainsi pour $n = 4171$,

Il convient de mentionner que ce procédé a été publié avant la lettre de Fermat, dans le *Dict. de math.* de Montferrier (Paris, 1835), et réinventé également par Landry et Aurifeuille.

p *désignant un nombre premier, l'entier* $\frac{2^p + 1}{3}$ *est de la forme* 2px + 1.

*Sauf le cas où* ab ... *est de la forme* $2^x$, *le nombre* $2^{ab\ldots} + 1$ *est composé.*

*Aucun facteur de* $a^2 + 3b^2$ *n'est de la forme* 3 — 1.

Enfin on citera la décomposition du nombre 100895598169 proposée par Mersenne à Fermat, qui la donna sans d'ailleurs indiquer la méthode qu'il avait employée[1].

---

on a :

$$n = 100.41 + 71 \ , \qquad 10n = 204^2 + 2.47 \ , \qquad 3n = 112^2 - 31 \ ,$$

ce qui fait immédiatement voir qu'il est inutile d'essayer la division par 41, par 47 et par 31.

Soit $n = a^2 + b$; posons $n = (a + x)^2 - (x^2 + 2ax - b)$ : la question est réduite à amener, par diverses substitutions, l'expression $x^2 + 2ax - b$ à être un carré. Supposons qu'on cherche seulement les facteurs premiers $\geq 17$ ; on posera

$$a + x - \sqrt{x(x + 2a) - b} > 16 \ , \qquad \text{d'où} \qquad x < \frac{n + 256}{32} - a \ .$$

Soit, par exemple, $n = 4171$. Par l'extraction de la racine carrée, on trouve $n = 64^2 + 75$; $x(x + 128) - 75$ doit donc être un carré. Il faut éliminer toutes les valeurs de $x$ inférieures à 64 et terminées à droite par l'un des chiffres 3, 4, 8, 9, car autrement le premier membre ne serait pas un carré. Pour le même motif, $x$ ne peut être ni 3 + 2, ni 7 + 1, 2, 3, 4, ni 8 + 0, 1, 3, 4, 5. Les nombres inférieurs à 74 et répondant a toutes ces conditions sont 6, 42 et 70, dont le premier donne le carré $27^2$ ; en le mettant à la place de $x$ dans $x^2 + 2ax - b$ : on a ainsi

$$n = (64 + 6)^2 - 27^2 = (70 + 27)(70 - 27) = 97.43 \ .$$

Si aucun de ces trois nombres n'avait donné de carré, le nombre $n$ n'aurait aucun diviseur premier plus grand que 16, et, en divisant par 3, 5, 7, 11 et 13, il aurait été aisé de voir s'il était premier.

Souvent, comme on l'a vu plus haut, la décomposition se voit plus aisément sur un multiple que sur le nombre proposé lui-même. Ainsi, pour $n = 4171$, on a : $8n = 183^2 - 11^2$, d'où $n = 97.43$. Pour $n = 118097$, on a : $3n = 595^2 - 2^2 = 597.593$, d'où $n = 199.593$.

On arriverait aussi à la solution si on pouvait trouver deux égalités de la forme $An = a^2 + \alpha$, $Bn = b^2 \pm \alpha$, car il s'ensuivrait $(A \mp B)\,n = (a + b)(a - b)$. Ainsi soit $n = 4171$, il viendra :

$$18n = 274^2 + 2 \ , \qquad 33n = 371^2 + 2 \ , \qquad \text{d'où} \qquad 15n = 645.97 \ .$$

En général, si $kn$ peut se représenter par la différence de deux valeurs de la fonction entière $F(x) = Ax^h + Bx^g + \ldots$ la décomposition est immédiate, car $F(a) - F(b)$ est divisible par $a - b$; par exemple, on peut prendre pour F les carrés, les cubes, les bicarrés, les triangulaires, etc., dont on possède des tables étendues.

[1] On a émis diverses conjectures sur le principe dont s'était servi Fermat pour obtenir cette factorisation. Ne serait-ce pas simplement la considération des triangulaires, telle que l'indique M. Barbette *(op. cit.)* et qu'on peut exposer ainsi :

La factorisation est facile si $n$ est un triangulaire, c'est-à-dire si on peut écrire $2n = x(x + 1)$ ou bien $2x = -1 + \sqrt{8n + 1}$. Ainsi la condition pour $n$ d'être un triangulaire équivaut à celle, pour $8n + 1$, d'être un carré. Essayant cette formule avec le nombre de Mersenne, on voit, en extrayant la racine de $8n + 1$, que ce nombre n'est pas carré, et que

$$8n = 89423^2 + 898423 \ ,$$

d'où la décomposition demandée. Cette égalité avait du reste été signalée antérieurement par M. Petersen (*I. M.*, 1908).

Euler a beaucoup étendu ces procédés de Fermat[1].

Contrairement à ce que pensait celui-ci, il reconnaît que $2^{2^n} + 1$ n'est pas toujours premier, même si $n$ l'est, car $2^{32} + 1$ est divisible par 641. Il donne les diviseurs de $2^x - 1$, pour $x = 29, 43$ et 73 ; et diverses extensions ou conséquences du théorème de Fermat. (1732.)

Il donne les formes linéaires des diviseurs de $x^2 + py^2$, pour les premières valeurs de $p$, et celles de $ax^2 + by^2$, pour différentes valeurs de $ab$. Il observe que *les formes* $ax^2 + by^2$ *et* $x^2 + aby^2$ *ont les mêmes diviseurs, de même que* $x^2 + ay^2$ *et* $x^2 + a$. (1744.)

*Tout diviseur de* $a^{2^n} + b^{2^n}$ *est de la forme* $2^{n+1}x + 1$. De là, la démonstration de la divisibilité de $2^{32} + 1$ par 641. (1748.)

*Le produit de deux sommes de deux carrés est une somme de deux carrés*[2]. *Si* a *et* b *sont premiers entre eux, les diviseurs de* $a^2 + b^2$ *sont des sommes de deux carrés. Un nombre* 4 + 1, *qui ne peut se décomposer que d'une seule manière en une somme de deux carrés est premier; dans le cas contraire, il est composé* et on trouvera aisément sa décomposition[3]. (1752.)

*Si un diviseur de* $a^2 + 2b^2$ *ou* $a^2 + 3b^2$ *est de même forme, il en est de même du quotient. Tout nombre premier* 6 + 1 *divise* $3x^2 + y^2$ *et il est de la même forme.* (1759.)

Il montre comment on détermine des nombres de la forme $x^2 + 1$ qui soient multiples du nombre premier $p$ de la forme 4 + 1, ce qui facilite la recherche des conditions de divisibilité d'un nombre donné par $p$, et permet de trouver de très grands nombres immédiatement décomposables. (1760.)

On sait, d'après Fermat, qu'un nombre $n$, de la forme 4 + 1, est premier s'il est, d'une seule manière, une somme $x^2 + y^2$ de deux carrés ; mais, pour peu que $n$ soit considérable, on avait ainsi à calculer un grand nombre de carrés. Euler montre comment on peut réduire le nombre de ces opérations, en déterminant les formes linéaires de $y$ d'après celles de $n$. Ainsi si $n = 16x + 1$ ou $16x + 5$, $x$ est de la forme $8 \pm 1$ : le nombre des carrés à calculer est ainsi réduit au quart. On comprend combien, avec des coefficients plus élevés, comme $60x + 1$, $240x + 1$,

---

[1] Pour les détails et les démonstrations de ce qui a rapport à Euler, voir *Ens. math.*, 1909, p. 330 et seq.

[2] Théorème déjà connu de Fibonacci et de Fermat, et peut-être de Diophante.

[3] Soit, par exemple, $n = a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ; si $\frac{f}{g}$ désigne la valeur de la fraction

$$\frac{a + \alpha}{\beta + b} = \frac{\beta - b}{a - \alpha}$$

réduite à sa plus simple expression, $n$ est divisible par $f^2 + g^2$.

Cette méthode paraît avoir été connue de Freniele.

$14400x + 1$, ... on augmenterait le nombre des exclusions, et par suite la rapidité de la vérification de la divisibilité des grands nombres. (1765.)

Il vérifie ainsi que, comme l'avait annoncé Fermat, le nombre $n = 2^{31} - 1$ est premier : 31 étant premier, tout facteur de $n$ est de la forme $62 + 1$ et, d'autre part, $n$ divisant $2^{32} - 2$, il est des deux formes $8 \pm 1$ ; il est donc de l'une ou de l'autre forme $248 + 1$, 63. Essayant la division de $n$ par les nombres premiers compris dans ces deux formes, Euler s'est assuré que ce nombre est premier[1]. (1772.)

Il propose, pour la construction des tables de nombres premiers, la méthode suivante : soit considérée l'expression $30a + \alpha$, où $a$ représente un entier quelconque, et $\alpha$, l'un des $\varphi(30)$ nombres 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, inférieurs à 30 et premiers avec lui. Les valeurs de cette expression comprennent entre autres, tous les nombres premiers avec 30 ; il faut en éliminer tous les multiples de nombres premiers. Pour cela, on résoudra, dans chaque cas, l'équation $30a + \alpha = \beta y$, $\beta$ désignant l'un quelconque des nombres $\alpha$[2] : la formule $30(x + k\beta) + \alpha$, où $k$ varie de 0 à $\infty$, donne la suite des nombres divisibles par $\beta$. Classant toutes ces suites en une même table, les nombres absents de celle-ci sont premiers[3]. (1774.)

Euler montre que *si* x *étant premier avec* k, *tous les nombres de*

---

[1] Landry et Ed. Lucas, comme on le verra plus loin, ont également vérifié cette assertion de Fermat, à l'aide de méthodes particulières. Legendre l'a fait par une méthode tout à fait générale.

[2] Par exemple, soit $30x + 1 = 7y$ ; on a

$$y = 4x + \frac{2x+1}{7} ;$$

ainsi les valeurs de $x$ qui rendent $30x + 1$ divisible par 7 sont les termes de la progression ÷ 3.10.17.24...

[3] Cette méthode a été retrouvée et perfectionnée récemment par MM. Lebon et G. Tarry. Le premier prend $2310 = 2.3.5.7.11$, au lieu de 30, ce qui lui donne $\varphi(2310) = 480$ types de l'expression $2310x + \alpha$. Si on résout l'équation $\beta x - 2310y = \alpha$ et qu'on pose $y = a - bx$, il viendra :

$$2310a + \alpha = (2310b + \beta)x .$$

Le nombre $2310a + \alpha$ sera donc divisible par le nombre $2310b + \beta$. En déterminant toutes les solutions, on obtiendra de même tous les multiples de $2310b + \beta$.

M. Lebon a depuis perfectionné sa méthode et s'occupe de la construction de tables qui permettent de factoriser un nombre quelconque inférieur à cent millions.

M. Tarry pose

$$n = 20580a + \alpha , \qquad \alpha = 210b + \beta ,$$

d'où

$$n = 20580a + 210b + \beta .$$

Soit le nombre premier $p > 7$, c'est-à-dire non diviseur de 20580, et soit $h$ l'associé de 20580, c'est-à-dire le nombre tel que $20580h \equiv 1$ ; on aura $hn \equiv a + 210hb + \beta h$, de sorte que, si $\alpha'$ et $\beta'$ sont les restes de la division de $210hb$ et de $\beta h$ par $p$, on pourra écrire

$$hn \equiv a + \alpha' + \beta' .$$

Ainsi $p$ divise $n$ si on a :

$$a + \alpha' + \beta' \equiv 0 .$$

*forme* $x^2 + k$ *et moindres que* $4k$ *sont premiers, ou des carrés de premiers, ou des puissances de* 2, *un nombre quelconque qui ne peut être représenté que d'une seule manière par la formule* $y^2 + kz^2$ *est premier*. Il donne la liste des soixante-cinq valeurs de $k$, qu'il appelle *numeri idonei*, et qui sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, ... 1365, 1848. (1776.)

Il enseigne, sur des exemples, différents procédés d'exclusion dans la recherche des solutions de l'équation $n = a^2 + b^2 = x^2 + y^2$, par la considération des formes linéaires possibles des inconnues; et il étend sa théorie au cas où $n$ est de la forme $x^2 + ky^2$. (1778.)

Lagrange ne s'est pas spécialement occupé de la factorisation des nombres, mais il a démontré cette réciproque d'un théorème d'Euler : *si* $k$ *est positif, le nombre premier* $p$ *ne peut être que d'une seule manière, de la forme* $x^2 + ky^2$. En effet, soit

$$p = f^2 + kg^2 = f'^2 + kg'^2 \ ;$$

on aura

$$(\alpha) \qquad (ff' - kgg')^2 + k(fg' + f'g)^2 = p^2 \ .$$

Or

$$f^2g'^2 - f'^2g^2 = p(g'^2 - g^2) \ :$$

$p$ diviserait donc l'un des deux nombres $fg' \pm f'g$, ce qui est impossible, puisque, d'après $(\alpha)$, on a

$$fg' + f'g < p \ . \qquad (\textit{Misc. Taurin.}\ 1766\text{-}69.)$$

Il a démontré le théorème de Wilson (*Mém. de Berlin*, 1771) qui, comme on sait, fournit un moyen, malheureusement impraticable, de caractériser et vérifier les nombres premiers [1].

Enfin il a donné le moyen de trouver les formes linéaires des diviseurs d'un nombre quelconque qu'on a pu mettre sous la forme $ax^2 + bxy + cy^2$. (*Id.*, 1775.)

Legendre, dans sa *Th. des n.* dont la première édition est de 1798, — outre une table des formes des diviseurs numériques des nombres de la forme $x^2 \pm ky^2$, jusqu'à $k = 103$, — a indiqué plusieurs voies qu'il serait bon de soumettre à de nouvelles explorations.

---

[1] Ainsi 37 étant de la forme $4 + 1$, on calculera ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} 1! \equiv 1,\ 2! \equiv 2,\ 3! \equiv 6,\ 4! \equiv 24,\ 5! \equiv 9,\ 6! \equiv 6.9 \equiv 17,\ 7! \equiv 7.17 \equiv 8, \\ 8! \equiv 8.8 \equiv 27,\ 9! \equiv 9.27 \equiv 21,\ 10! \equiv 10.21 \equiv 25, \ldots\ 18! \equiv 6.12 \equiv 6\ . \\ (18!)^2 + 1 \equiv 6^2 + 1 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{37}$$

donc 37 est premier.

Soit $n = af^2 + 2bfg + cg^2$, $a$, $b$, $c$ étant premiers deux à deux. Posons

$$n = ax^2 + 2bxy + cy^2 \qquad \text{et} \qquad ac - b^2 = \Delta \ ,$$

il viendra

$$(\alpha) \qquad an = (af + bg)^2 + \Delta g^2 = (ax + by)^2 + \Delta y^2 \ .$$

Donc $n$ peut se mettre de deux manières différentes sous la forme $\xi^2 + \Delta\eta^2$, et par suite, il est composé.

$\Delta$ est premier avec $a$ et $b$, donc l'un des deux nombres $(af + bg) \pm (ax + by)$ doit être divisible par $\Delta$, ce qui donne l'équation de condition

$$af + bg \mp (ax + by - \Delta z) = 0 \ ;$$

d'où, en substituant dans $(\alpha)$, la valeur de $ax + by$,

$$(\beta) \qquad g^2 + 2(af + bg)z - \Delta z^2 = y^2$$

et on aurait de même

$$(\gamma) \qquad f^2 + 2(bf + bg)w - \Delta w^2 = x^2 \ .$$

Si on peut trouver des valeurs de $z$ et de $w$ qui rendent les premiers membres de $(\beta)$ et de $(\gamma)$ des carrés parfaits, $n$ est composé.

Inversement si on ne trouve aucune de ces valeurs de $z$ et de $w$, il y a présomption que $n$ est premier, mais il faut s'en assurer autrement. Ainsi considérons la formule $F = f^2 + f + 41$ ; comme l'expression $1 + (4f + 2)z - 163z^2$ ne peut représenter un carré positif que pour $z = 0$ et qu'elle est négative pour $4f + 2 < 163$, ou $f < 40$, *pour les trente-neuf premières valeurs entières de* f, *l'expression* F *donne un nombre premier*, comme l'avait annoncé Euler.

Pour voir si le premier membre de $(\beta)$ ne peut devenir un carré, on essaiera toutes les valeurs entières de $z$ comprises entre les racines de l'équation $g^2 + \ldots = 0$ : le nombre des essais est $\frac{2}{\Delta}\sqrt{an}$ et pourra encore être réduit par l'examen des formes linéaires possibles de $z$. Legendre tire de ces remarques un moyen ingénieux — mais souvent illusoire — de trouver un nombre premier d'une forme assignée et supérieur à une limite donnée.

Un autre procédé de Legendre fournissant des résultats certains, sans nécessiter aucune connaissance préalable de la composition quadratique du nombre $n$ à factoriser, consiste à utiliser les propriétés des fractions continues pour la recherche de ces mêmes formes, en développant par ce moyen le nombre $n$ ou un de ses multiples.

Soient

$$\ldots f', \ g', \ h' \ \ldots$$
$$\ldots f'', \ g'', \ h'' \ \ldots$$

les deux séries auxquelles conduisent la décomposition de $\sqrt{n}$. On sait qu'on a

$$n = f''g'' + g'^2 = g''h'' + h'^2 ,$$

ce qui fait que $g'h'^2 - f''h''g''^2$ est un multiple de $n$. On trouvera ainsi plusieurs expressions de la forme $x^2 - Ny^2$ dont $n$ doit être diviseur.

Appliquant ce procédé au nombre $n = 10091401$ traité autrement par Euler, Legendre trouve qu'il est diviseur des formes

$$x^2 + 3y^2,\ x^2 + 31y^2,\ x^2 + 6y^2,\ x^2 + 5y^2,\ x^2 + 38y^2,$$
$$x^2 - 46y^2,\ x^2 - 55y^2,\ x^2 - 97y^2 ;$$

cherchant les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ et appartenant à la forme 1320 + 1, 7, 49, 103, ... combinaison des formes

6 + 1 ; 24 + 1, 5, 19; 23 ; 20 + 1, 3, 7, 9 ;
44 + 1, 5, 7, 9, 19, 25, 35, 37, 39, 43 ;

des diviseurs des formes quadratiques

$$x^2 + 3y^2,\ x^2 + 6y^2,\ x^2 + 5y^2,\ x^2 - 55y^2 ,$$

et retranchant de ces nombres ceux qui ne peuvent diviser

$$x^2 + 31y^2, \text{ ni } x^2 + 38y^2, \text{ ni } x^2 - 46y^2 ,$$

il reste, comme diviseurs possibles, les seuls nombres 727, 1423, 2281, dont aucun ne divise $n$ : ce nombre est donc premier[1].

Gauss, dans ses *Disq. arith.*, a donné, sur le même sujet, plusieurs méthodes très ingénieuses, dont on donnera seulement le précis. La première (voir *Ens. math.*, 1907, p. 36) s'appuie sur les propriétés des résidus, qu'on déterminera en remarquant que si $kn = f\alpha^2 + g\beta^2$, $-fg\alpha^2\beta^2$ est résidu en même temps que $-fg$.

---

[1] Tchebichef, dans son traité des congruences, publié en 1849, trouve par les mêmes moyens que le nombre 8520191, également considéré par Legendre, divise les formes

$$x^2 - 5y^2 ,\ x^2 - 2y^2 ,\ x^2 - 13y^2 ,\ x^2 - 37y^2 ,\ x^2 - 101y^2 .$$

De là les formules

260 + 1, 7, 9, 29, 33, ... 20 + 1, 9, 11, 19 ... 520 + 1, 9, 29, 49, 51, ...

Les nombres premiers de ces formes et inférieurs à $\sqrt{8520191}$ sont

521, 601, 1231, 1249, 1999, 2441, 2729, 2791.

Aucun d'eux ne divisant le nombre proposé, il est premier.

Soit $n = 4171 = 64^2 + 3.5^2 = 65^2 - 6.3^2$. Ses diviseurs sont de la forme $6 + 1$ et de l'une des formes $24 \pm 1, \pm 5$. Il s'ensuit que les diviseurs de $n$ sont de l'une des formes $24 + 1, 19$. On essaiera donc la division par 25, 43, 49, dont le second seul est premier.

Ainsi, on a :

$$997331 = 999^2 - 2.5.67 = 994^2 + 5.11.13^2 = 2.706^2 + 3.17.3^2$$
$$= 3.575^2 + 11.31.2^2 ;$$

donc les nombres $-2.5.67$, $5.11$, $2.3.17$, $3.11.31$ sont résidus, ainsi que $3.5.11^2.31$ ou $3.5.31$, etc. D'ailleurs, de ces résidus, on déduit de nouvelles conditions qui permettent d'exclure certaines formes de facteurs, à la manière d'Euler.

La seconde méthode de Gauss demande la résolution de deux équations importantes, qu'il montre à résoudre d'abord directement et ensuite par des procédés indirects tout à fait élémentaires quoique beaucoup plus rapides.

Soit d'abord à résoudre l'équation

$$(\alpha) \qquad a + ny = x^2 ;$$

il est permis de supposer qu'on a $0 < x \leq \frac{n}{2}$, car si $x = \theta$ est une solution, $x = n - \theta$ en est une autre. La valeur de $y$ est ainsi comprise entre $-\frac{a}{n}$ et $\frac{n}{4} - \frac{a}{n}$.

Soit $\varrho$ un non-résidu du nombre premier $p$ et soit $y = \alpha$ une valeur qui donne $a + ny \equiv \varrho$ ; tout nombre congru à $\alpha$ donne à la formule $a + ny$ une valeur qui est un non-résidu et à fortiori un non-carré. On peut donc exclure, des solutions de $(\alpha)$, les valeurs de $y$ comprises dans la formule $\alpha + pz$.

La considération d'un autre nombre $p'$ fournirait des exclusions analogues.

Ainsi, soit $x^2 = 22 + 97y$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| pour $p = 3$, $\rho = 2$ ; $\alpha = 1$ : | on exclura les nombres | | $3z + 1$ ; |
| » $p = 4$, $\rho = 2, 3$ ; $\alpha = 0, 1$ : | » | » | $4z$ et $4z + 1$ ; |
| » $p = 5$, $\rho = 2, 3$ ; $\alpha = 0, 3$ : | » | » | $5z$ et $5z + 3$ ; |
| » $p = 7$, $\rho = 3, 5, 6$ ; $\alpha = 2, 3, 5$ : | » | » | $7z + 2, 3, 5$ . |

Eliminant des valeurs entières de $y$ comprises entre $-\frac{22}{97}$ et $\frac{97}{4} - \frac{22}{97}$, celles qui sont comprises dans les formules qui précèdent, il ne reste que les nombres 6, 11 et 14, dont le second seul donne un carré. On a ainsi la solution $y = 11$, $x = 33$.

On arrive ainsi, de la manière suivante, à la connaissance des non-résidus $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ de $p$ : soient $f, f', f'' \ldots$ les solutions des congruences

$$(\beta) \qquad ny \equiv \rho\,, \quad \equiv \rho'\,, \quad \equiv \rho''\,, \ldots$$

et $g$, celle de la congruence $ny \equiv a$ ; on aura $\alpha \equiv f + g$. Si $n$ est résidu de $p$, $f, f', f'' \dots$ sont non-résidus d'après ($\beta$) et se confondent avec les nombres $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ Si $n$ est non-résidu, $f, f' \dots$ forment l'ensemble des résidus : de là, les non-résidus.

Soit en second lieu à mettre $n$ sous la forme $ax^2 + by^2$. On cherchera les valeurs de $z$ qui rendent $n - az$ divisible par $b$, et on posera $x = bw \pm z$, $w$ prenant les valeurs $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ; $x$ sera une solution quand l'entier $\dfrac{n - ax^2}{b}$ sera un carré parfait positif. Cette dernière condition montre qu'il n'y a pas lieu d'examiner les valeurs de $x$ supérieures à $\sqrt{\dfrac{n}{a}}$.

On peut encore réduire le nombre des essais, en remarquant que $z$ doit être un résidu de $b$, puisqu'autrement on ne pourrait écrire

$$x^2 \equiv z, \qquad \text{ni par suite} \qquad n - ax^2 \equiv n - az \equiv 0 \pmod{b}$$

De même que plus haut, on limitera le nombre des essais, autant qu'on le voudra, en remarquant que si $\varrho$ est un non-résidu de $p$ et qu'on détermine $z$ tel que $az \equiv n - b\varrho$, si on a en outre $x^2 \equiv z$, $\dfrac{n - ax^2}{b}$ sera $\equiv \varrho$, c'est-à-dire sera un non-résidu de $p$.

La résolution de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = n$ se ramènerait à la précédente, en remarquant qu'on peut l'écrire $(ax + by)^2 + (ac - b)^2 y^2 = an$.

Maintenant remarquons d'abord que *tout résidu de* n *est en même temps résidu des diviseurs de* n. Soit $kn = \mathrm{A}^2 - a\alpha$ : si $a$ est non-résidu des nombres premiers $p, q, r \dots$ $n$ n'est divisible par aucun de ces nombres ; la question revient donc à trouver les résidus de $n$, comme on l'a dit tout à l'heure.

Si $n$ est résidu de $p$, il l'est de $p^2$, car, en posant $\mathrm{A}^2 = n - ph$ et résolvant l'équation $2\mathrm{A}x - py = h$, il vient $(\mathrm{A} + px)^2 \equiv n \pmod{p^2}$. De là le moyen de mettre $n$ sous la forme $\mathrm{B} - \mathrm{C}p^2$, qu'on rendra d'autant plus utile que $n - \mathrm{B}^2$ sera plus petit.

Soit $-a$ un résidu de $n$ ; cherchons les racines de l'équation $x^2 + a = ny$ et soient $f^2 + a = ng'$, $f'^2 + a = ng'$ ; il viendra, en soustrayant, puis en multipliant,

$$(f + f')(f - f') = nh\ , \qquad n^2 gg' = (ff' - a)^2 + a(f + f')^2$$

D'un autre côté, soit

$$n = ax^2 + by^2 = ax'^2 + by'^2\ ;$$

il viendra d'abord la relation

$$a(x^2y'^2 - x'^2y^2) = n(y'^2 - y^2)\ ,$$

laquelle fait voir que $n$ divise l'un ou l'autre des deux nombres $xy' \pm x'y$, ou qu'il a avec chacun d'eux un facteur commun. Ensuite on a cette autre

$$(axx' - byy')^2 + ab(xy' + x'y)^2 = n^2 ,$$

qui donne $xy' + x'y < n$. On n'a donc qu'à chercher le p. g. c. d. de $n$ et de $xy' + x'y$.

Tchebichef a donné en 1851, dans le *J. L.*, une ingénieuse méthode de vérification des nombres premiers, dont voici le résumé :

*α désignant la plus petite valeur de* x *qui satisfait à l'équation* $x^2 - ky^2 = 1$, *si les nombres positifs* a *et* a', *inférieurs à* $\sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)n}{2}}$, *sont des valeurs de* x *satisfaisant à l'équation* $x^2 - ky^2 = \pm n$, *et que* b *et* b' *soient les valeurs correspondantes de* y, *le nombre* n *est composé, et on en trouvera deux diviseurs en cherchant le p.g.c.d. de* n *et de chacun des deux nombres* ab' ± a'b [1].

*Le nombre* n *ne peut être premier que dans le cas où il n'est qu'une fois représentable par la forme* $x^2 - ky^2 = \pm n$, x *étant inférieur à la limite donnée plus haut. Si en outre les diviseurs de* $x^2 - ky^2$ *sont tous de la forme* $lx^2 - my^2$, *et si* n *est premier avec* k, *et de la forme des diviseurs de* $x^2 - ky^2$, *la condition est en même temps suffisante* [2].

Il applique ce théorème au nombre $n = 8520191$, de Legendre ; ce nombre, qui est **12** — 1, est donc de la forme quadratique $3y^2 - x^2$, ce qui conduit à chercher $y$ entre $\sqrt{\frac{n}{2}}$ et $\sqrt{\frac{n}{3}}$ [3]. Les hypothèses faites sur $y$ relativement aux modules 2, 5, 7... font voir que $y$ est de l'une des formes de chacun des groupes suivants :

**4** ; **16** ± 1 ; **5** + 0, ± 2 ; **7** ± 1, ± 2 ; **11** ± 1, ± 2, + 5 ;
**13** + 0, ± 1, ± 3, ± 6 ; **17** ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 7 .

La valeur $y = 1937$ répond seule à toutes ces conditions, ce qui montre que $n$ est premier.

Landry (*Procédés nouveaux...*, Paris, 1859) a posé les premiers jalons d'une voie nouvelle aussi féconde qu'élémentaire, celle de l'assimilation du nombre à factoriser au produit de deux fonctions linéaires convenablement choisies.

---

[1] Voir, pour la démonstration de ce théorème, *Ens. math.*, 1912, p. 201.
[2] Pour la démonstration de ce second théorème, trop longue pour pouvoir être reproduite ici, voir *loc. cit.*
[3] Cette deuxième limite résulte de ce que $3y^2 - x^2 = n$ et $x > 0$.

Les facteurs, s'ils existent, du nombre $n = 2^{31} - 1$ appartiennent aux formes **248** + 1, 63 [1]. Posons en conséquence

$$n = (62x + 1)(62y + 1) = 3844xy + 62(x + y) + 1$$
$$= 3844.558658 + 62.37 + 1$$
$$= 3844(558658 - h) + 62(62h + 37) + 1 \ ,$$

d'où les formules

$$(\alpha) \quad xy = 558658 - h \qquad (\beta) \quad x + y = 62h + 37 \ ,$$

ou, $t$ désignant collectivement les nombres $x$ et $y$,

$$(\gamma) \qquad t = 62h + 37 \pm \sqrt{3844h^2 + 4592h - 2233263} \ .$$

Le plus petit, $y$, des deux nombres $x$ et $y$ diminue à mesure que $h$ augmente, puisque $xy$ diminue et que l'autre nombre $x$ ne cesse d'augmenter.

D'après ($\alpha$) et ($\beta$), $h$ est pair, et d'un autre côté, le nombre sous le radical dans ($\gamma$) est $\equiv h^2 + 2h - 3 \pmod 9$ ; de là, on conclut que $h$ est de l'une des formes **18** + 2, 6, 8, 10, 14. Or d'après ($\alpha$) et ($\beta$) on a :

$$xy \equiv 1 - h \qquad \text{et} \qquad x + y \equiv 2h + 1 \pmod 3$$

d'où, pour $h = \mathbf{3} + 2$,

$$xy \equiv 2 \ , \qquad x + y \equiv 2 \qquad \text{(id.)}$$

congruences auxquelles on ne peut satisfaire, car il faudrait, pour la première, $x \equiv 1$ et $y \equiv 2$, ou $x \equiv 2$ et $y \equiv 1$, d'où $x + y \equiv 0 \pmod 3$. Ainsi $h$ ne peut être **3** + 2 ; il doit donc appartenir à l'une des formes **18** + 6, 10.

De même ($\alpha$) et ($\beta$) font voir que $h$ ne peut être **5** + 0, 1, 2, car autrement on aurait

$$x + y \equiv 3 - h \ , \qquad x + y \equiv 2h + 2 \pmod 5$$

d'où, pour

$$h = \mathbf{5} \ , \qquad xy \equiv 3 \ , \qquad x + y \equiv 2 \qquad \text{(id.)}$$
$$\mathbf{5} + 1 \ , \qquad xy \equiv 2 \ , \qquad x + y \equiv 4 \qquad \text{(id.)}$$
$$\mathbf{5} + 2 \ , \qquad xy \equiv 1 \ , \qquad x + y \equiv 1 \qquad \text{(id.)}$$

résultats qui conduisent à des contradictions. Les seules formes admissibles sont donc **5** + 3, 4, ou, comme $h$ est pair, **10** + 4, 8. Écrivant les formes possibles relatives aux deux modules 18 et 10,

---

[1] Voir plus haut.

et ne conservant que celles qui sont communes aux deux suites, on verra que $h$ ne peut être que de l'une des formes $90+24, 28, 64, 78$.

Remplaçant successivement $h$ par $90k+24, 28, 64, 78$, dans l'expression sous le radical; les suppositions $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ fourniront — en calculant à l'aide des différences premières et secondes — vingt-huit nombres dont aucun n'est un carré : ainsi, jusqu'à $h=90.6+78=618$, il n'y a aucune valeur de $h$ propre à conduire à la connaissance d'un facteur de $n$.

La valeur de $t$ correspondant à $h=168$ est inférieure à 46 et diminue quand $h$ augmente; d'autre part, les nombres premiers de la forme $62+1$ et plus petits que $62.16+1$ sont 311, 373, 683, dont il y a lieu d'éliminer les deux derniers, qui ne sont pas de la forme $8\pm1$; il reste donc seulement à essayer le nombre 311, auquel correspond la valeur 5. Or dans ce cas, la formule

$$(\delta)\qquad h=\frac{558658-t(37-t)}{62t+1}$$

donne $h=\dfrac{558498}{511}$, valeur non entière : le nombre proposé est donc premier.

Autrement. Remplaçons dans $(\delta)$, $t$ successivement par $90k+24$, $28, 64, 78$, ce qui donne

$$\begin{aligned}(5580t+90)k &= 558634-t(1525-t)\\ &= 558630-t(1773-t)\\ &= 558594-t(4005-t)\\ &= 558580-t(4873-t)\;.\end{aligned}$$

Comme $t(a-t)$ augmente, quand $t$ varie de 0 à $\frac{a}{2}$, et que d'autre part, dans les seconds nombres des quatre égalités qui précèdent, les nombres 1525, 1773, 4005 et 4873 sont supérieurs à la limite de $t$ déterminée par la relation $62t+1<\sqrt{n}$, limite qu'on trouve être égale à $\dfrac{\sqrt{n}-1}{62}=748$, on voit que $k$ diminue quand $t$ augmente; donc, comme pour $t=60$, $k<2$, et que pour $t=80$, $k<1$, il est inutile d'essayer des valeurs de $k$ supérieures à 80. Faisant $k=1$ et $=2$, dans ces mêmes égalités, on n'aboutit à aucun résultat utile. On essaiera donc les valeurs de $t$ inférieures à 60, mais seulement celles qui, mises dans la formule $62t+1$, donnent des nombres premiers de l'une des deux formes $8\pm1$. Le calcul est, comme on le voit, très réduit; d'autres remarques de Landry permettraient de le réduire encore,

mais ce qui précède suffit pour faire sentir l'importance des idées nouvelles qu'il a introduites dans la théorie de la factorisation.

Genocchi (*Anali di Matematica*, 1868), dans un mémoire sur certaines formes de nombres premiers, s'appuie sur les propositions suivantes.

Posons $(a + \sqrt{b})^n = A_n + B_n \sqrt{b}$, on aura, d'après Euler, $(a - \sqrt{b})^n = A_n - B_n \sqrt{n}$, d'où

$$(\alpha) \quad 2A_n = (a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n, \quad 2\sqrt{b}B_n = (a + \sqrt{b})^n - (a - \sqrt{b})^n.$$

*Si* n *est multiple de* k, $B_n$ *sera multiple de* $B_k$ [1]. On a aussi : $B_{2n} = 2A_n B_n$.

*Soit* p *un diviseur premier de* $B_n$, *et* k, *la plus petite valeur de* x *qui rende* $B_x$ *divisible par* p ; k *divise* n [2].

*Si* $B_f \equiv B_g \equiv 0$, f *et* g *sont multiples de* k, *ainsi que leur p.g.c.d.*

*Si* p *est premier*, $A_p \equiv a$ *et* $B_p \equiv \left(\frac{b}{p}\right)$, ce symbole désignant le *caractère quadratique* de *b*.

*On a :* $B_{p \pm 1} \equiv 0$, *selon que* b *est résidu ou non-résidu* [3].

*On a :* $A_{kp} \equiv A_k$ *et* $B_{kp} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) B_k$.

Ed. Lucas a exposé, de 1875 à 1878, une méthode de vérification des nombres premiers aussi originale que féconde en théorèmes particuliers simples ; elle s'applique surtout quand on connaît la composition d'un des deux nombres voisins du nombre considéré. On peut la présenter ainsi :

---

[1] Car les termes du quotient algébrique de ces deux nombres peuvent s'écrire deux à deux, ainsi :

$$(a + \sqrt{b})^f (a - \sqrt{b})^{f+h} + (a + \sqrt{b})^{f+h} (a - \sqrt{b})^f = 2(a^2 - b)^f A_h,$$

ce qui montre que le quotient est un nombre rationnel et même entier.

[2] Supposons $n = kq + r$, on aura :

$$B_n \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad B_k \equiv 0 \qquad \text{d'ou} \qquad B_{kq} \equiv 0.$$

Or si dans l'identité

$$(\alpha^r - \beta^r)\alpha^{kq} + (\alpha^{kq} + \beta^{kq})\beta^r = \alpha^{r+kq} - \beta^{r+kq},$$

on fait $\alpha = a + \sqrt{b}$ et $\beta = a - \sqrt{b}$, il viendra :

$$(a^2 - b)^{kq} B_r = (a - \sqrt{b})^{kq} B_n - (a - \sqrt{b})^n B_{kq}.$$

Le premier membre étant entier, on a $B_r \equiv 0$. Par suite $k$ ne serait pas la plus petite valeur de $x$ qui rende $B_x \equiv 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

[3] Cette proposition est de Lagrange. On la démontre, ainsi que la précédente, en développant les relations $(\alpha)$ à l'aide de la formule du binôme.

1. Lemme. *Selon que* a *est résidu ou non-résidu de* p, p *divise* $a^m \mp 1$[1].

2. *Tout diviseur de* $2^{4h} + 1$ *est de la forme* $16h + 1$. (Voir *Ens. math.*, 1907, p. 446.)

3. P *et* Q *représentant des entiers positifs ou négatifs premiers entre eux, si on pose :*

$$a + b = P\ , \quad ab = Q\ , \quad a - b = \delta = \sqrt{\Delta}\ ,$$
$$\delta u_k = a^k - b^k\ , \quad v_k = a^k + b^k\ ,$$

$u_k$ *et* $v_k$ *sont des nombres entiers, qu'on peut calculer de proche en proche, par exemple à l'aide des formules de récurrence suivantes :*

$$(1) \quad \begin{cases} u_1 = 1\ , \quad u_2 = P\ , \quad u_{k+1} = Pu_k - Qu_{k-1}\ , \\ v_1 = P\ , \quad v_2 = P^2 - 2Q\ , \quad v_{k+1} = Pv_k - Qv_{k-1}\ . \end{cases}$$

4. $u_{kn}$ *est algébriquement, et à fortiori arithmétiquement, divisible par* $u_n$, d'après la définition de $\delta u_n$.

Cor. *Si* n *est le p.g.c.d. de* f, g, h, ... $u_n$ *est le p.g.c.d. des termes* $u_f$, $u_g$, $u_h$, ...

5. *Soit* $f > g$ ; *tout diviseur de* $u_f$ *et de* $u_g$ *divise* $u_{f-g}$[2].

6. *Les termes de la série des* u *comprennent tous les facteurs premiers contenus dans celle des* v. En effet, on a visiblement

$$(2) \qquad u_{2k} = u_k v_k\ .$$

Cette formule et la suivante

$$(3) \qquad v_{2k} = v_k^2 - 2Q^k\ ,$$

permettent de calculer rapidement les termes de la série $u_1$, $u_2$, $u_4$, $u_8$, $u_{16}$, ... dont il sera fait grand usage plus loin.

---

[1] Par exemple 2 est résidu des nombres premiers $8 \pm 1$ et non résidu des nombres premiers $8 \pm 3$. Donc si $k$ est plus grand que 2, et si le nombre $p = 2^k \pm 1$ est premier, il divise $2^m - 1$ ; si $p = 2^k \pm 3$ est premier, il divise $2^m + 1$. La lettre $m$ est mise pour $\frac{p-1}{2}$.

Ainsi $2^4 + 1 = 17$ est un nombre premier $8 + 1$, donc 17 divise $2^8 - 1$. De même, $2^6 - 3 = 61$ est un nombre premier $8 - 3$ : donc 61 divise $2^{30} + 1$, ce qu'on vérifie ainsi :

$$2^6 \equiv 3, \quad 2^{12} \equiv 9, \quad 2^{24} \equiv 81 \equiv 20, \quad 2^{30} \equiv 2^6 . 2^{24} \equiv 60 \qquad (\text{mod. } 61).$$

[2] Cela résulte de l'identité suivante

$$(a^g + b^g)(a^{f-g} - b^{f-g}) + (a^g - b^g)(a^{f-g} + b^{f-g}) = 2(a^f - a^g)\ .$$

**7.** *Les nombres* $u_k$ *et* $v_k$ *n'ont d'autres facteurs communs que ceux de* Q, car on a :

$$(4) \qquad v_k^2 - \Delta u_k^2 = 4Q^k ,$$

ce qui prouve en outre que $u_{2k+1}$ divise $x^2 - Qy^2$.

**8.** $u_k$ *et* $v_k$ *sont premiers entre eux.* Autrement, comme $P^k - v_k$ est divisible par Q, tout diviseur de $v_k$ et de Q diviserait P, qui est, par hypothèse, premier avec Q.

**9.** *Soit* $Q = 2q^2$ : à cause de (3), $v_{4k+2}$ *peut, dans ce cas, se décomposer en deux facteurs assignables :* c'est une généralisation de l'identité d'Aurifeuille.

**10.** *Il en est de même pour* $v_{4k}$ *si* $\Delta = -f^2$, *ou si* $Q\Delta = -2f^2$ *pour* $v_{4k+2}$.

**11.** De même $v_{2k}$ divise $x^2 + \Delta y^2$ *et* $v_{2k+1}$ *divise* $x^2 + Q\Delta y^2$ : d'où les formules linéaires de $v_k$.

Ed. Lucas considère particulièrement les quatre cas suivants :

$P = 3$, $Q = 2$, $a = 2$, $b = 1$, $\Delta = 1$, d'où les *séries de Fermat* $u_k = 2^k - 1$, $v_k = 2^k + 1$.

$P = 1$, $Q = -1$, $2a = 1 + \sqrt{5}$, $2b = 1 - \sqrt{5}$, $\Delta = 5$, d'où la *série de Fibonacci* 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$.

$P = 2$, $Q = -1$, $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$, $\Delta = 8$, d'où la série 1, 2, 5, 12, 29, 70, 167, ... $u_{k+1} = 2u_k + u_{k-1}$, qu'il nomme très improprement *série de Pell*, car d'une part Pell ne s'en est pas occupé, et d'autre part elle était connue bien avant lui. (Voir, par exemple, Théon de Smyrne.)

$P = 4$, $Q = 1$, $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$, $\Delta = 12$, d'où la série 2, 6, 14, 34, 82, 198, ... $v_{k+1} = 2v_k + v_{k-1}$, qu'on pourrait appeler *série d'Ed. Lucas*.

Ainsi, d'après **11**, les termes $u_{2k+1}$ des suites de Fibonacci et de Théon, et les termes $v_{2k}$ de celle de Fermat n'ont que des diviseurs premiers de la forme $4 + 1$ ; ceux des termes $u_{2k+1}$, de la suite de Fermat, et $v_{2k+1}$ de celle de Théon sont de la forme $8 \pm 1$ ; etc.

**12.** D'après le théorème de Fermat, *si* a *et* b *sont entiers, c'est-à-dire si* $\Delta$ *est un carré,* $u_{n-1}$ *est divisible par* n *quand* n *est premier et s'il ne divise ni* a *ni* b. Donc *si* $u_n$ *est divisible par* p, n *est égal à* $p - 1$ *ou à un diviseur de* $p - 1$. Réciproquement *les nombres premiers qui divisent* $u_n$, *sans diviser aucun des termes précédents, sont de la forme* $nx + 1$.

De même *si* $v_n$ *est le premier terme divisible par* p, p *est de la forme* $2nx + 1$.

13. *Si* a *et* b *sont irrationnels et réels,* $\mathrm{u}_{\mathrm{p}\pm1}$ *est divisible par* p *selon que* $\Delta$ *est un non-résidu ou un résidu*[1].

Donc *si* $\mathrm{u}_\mathrm{n}$ *est divisible par* p, n *est divisible par* p + 1 *ou par* p — 1 *suivant les cas.*

14. *Le nombre* n *est premier si* $\mathrm{u}_{\mathrm{n}\pm1}$ *est divisible par ce nombre, sans qu'aucun des termes dont le rang est un diviseur de* n ± 1, *soit divisible par* n. Supposons $n$ égal au produit des deux nombres premiers $p$ et $q$; $p$ divise $u_k$ et $q$ divise $u_l$, $k$ et $l$ désignant respectivement des multiples quelconques de $p \pm 1$ et de $q \pm 1$. Donc $n$ divise $u_{(p\pm1)(q\pm1)}$. Or il divise $u_{pq\pm1}$ d'après l'énoncé; donc, en appelant $f$ le plus grand des deux nombres $(p \pm 1)(q \pm 1)$, $pq \pm 1$ et $g$ le plus petit, $n$ divise $u_{f-g}$: or $f - g < n$ conclusion contradictoire avec l'hypothèse; $n$ est donc premier.

Cor. 1. *Nombres de Mersenne.* Soit $p = 2^{4h+1} - 1$; les diviseurs de $p + 1$ sont les puissances de 2, de la première à la $(4h + 1)^{\text{ème}}$. Mais $p = (2^{4h+1} + 1) - 2 = \mathbf{3} + 1$. Or p *est en même temps* $\mathbf{4} - 1$, de même que 3; donc on peut écrire

$$\left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

et 3 est non-résidu de $p$ de même, en général, que $3x^2$.

Prenons la série d'Ed. Lucas, qui fournit $\Delta = 3.2^2$; on aura

$$v_{2k} = v_k^2 - 2 \ ,$$

et la série se calculera ainsi :

$$\begin{array}{ll} u_1 = 1 & v_1 = 4 \\ u_2 = 4u_1 & v_2 = 14 \\ u_4 = 14u_2 & v_4 = 194 \\ u_8 = 194u_4 & v_8 = 37634 \ . \end{array}$$

---

[1] Posons $m = \frac{p-1}{2}$, on aura :

$$2^p u_{p+1} = C_{p+1,1} P^p + C_{p+1,3} P^{p-2}\Delta + C_{p+1,5} P^{p-4}\Delta^2 + \ldots + C_{p+1,p} P\Delta^m$$
$$\equiv (p+1)(P^p + P\Delta^m) \equiv P^p + P\Delta^m \equiv P + P\Delta^m \ .$$
$$2^{p-1} u_p \equiv C_{p,1} P^{p-1} + C_{p,3} P^{p-3}\Delta + C_{p,5} P^{p-5}\Delta^2 + \ldots + \Delta^m$$
$$\equiv \Delta^m \ .$$

Ainsi, si $\Delta$ est non-résidu, $u_p \equiv -1$ et $u_{p+1} \equiv 0$. Comme on a :

$$Qu_{p-1} = Pu_p - u_{p+1}$$

on peut dire que si $\Delta$ est résidu, $u_p \equiv 1$ et $u_{p-1} \equiv 0$.

La première partie de ce théorème est de Lagrange, la seconde de Genocchi.

Considérons, par exemple, la série de Théon. Comme $\Delta = 8$, on peut dire que $\Delta$ est résidu ou non-résidu selon que $p$ est de l'une des formes $8 \pm 1$ ou de l'une des formes $8 \pm 3$; donc dans les mêmes cas $p$ divise $u_{p-1}$ ou $u_{p+1}$.

Comme $\Delta$ est un non résidu, $u_{p+1}$ est divisible par $p$. De là, cette règle : *calculer la suite de nombres* 1, 4, 14, 194, 37634, ... *dont chacun est égal au carré du précédent diminué de* 2 ; *le nombre* n *est premier si le* (4h + 1)$^{\text{ème}}$ *terme de cette suite est le premier qui soit divisible par* $\mathrm{n} = 2^{4\mathrm{h}+1} - 1$.

Au lieu de cette suite, on peut, puisque $n$ est impair, employer la suivante 1, 2, 7, 97, 18817, ... dont chaque terme est égal au double du carré du précédent diminué de 1[1].

II. *Nombres de Fermat.* Soit $p = 2^h + 1$, $h$ désignant une puissance de 2. Si $h$ est $> 2$, $p$ est de la forme $8 + 1$ et 2 est résidu. Prenons la série de Théon ; $\Delta = 8$ est résidu de $p$, et la série est

$$\begin{array}{ll} u_1 = 1 & v_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 & v_2 = 6 \\ u_4 = 6u_2 & v_4 = 34 \\ u_8 = 34u_4 & v_8 = 1154 \end{array}.$$

On a ainsi cette règle : *le nombre* n *est premier si le* h$^{\text{ème}}$ *terme de la série* 1, 3, 17, 577, ... *dont chacun est égal au double du carré du précédent* — 1 *est le premier qui soit divisible par* n [2].

III. *Réciproque du théorème de Fermat*[3]. *Si* $\mathrm{a^x} - 1$ *est divisible par* n *pour* $\mathrm{x} = \mathrm{n} - 1$ *et non pour* $\mathrm{x} < \mathrm{n} - 1$, n *est premier.*

Soit $a = 3$, $n = 2^{16} + 1$ ; les diviseurs de $n - 1$ sont 1, 2, 4, 8, 16, ... et chaque reste s'obtient en divisant par $n$ le carré du précédent, ce qui donne 3, 9, 81, 6561, — 11088, ... 1. Il n'y a aucun reste égal à 1 avant le dernier terme de cette suite : le nombre $2^{16} + 1$ est donc premier.

Comme le remarque Ed. Lucas, cette méthode se distingue des autres en ce qu'elle ne demande pas la construction préalable d'une table de nombres premiers, et qu'au lieu d'effectuer des divisions par des nombres différents, on divise, par un nombre fixe, différents nombres se déduisant les uns des autres par une loi très simple.

---

1 Par exemple, soit $h = 1$, $n = 31$ ; on aura :

$$1 \equiv 1,\ 2 \equiv 2,\ 7 \equiv 7,\ 97 \equiv 4,\ 2.4^2 - 1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 31)$$

donc 31 est premier.

2 Ainsi soit $h = 3$, $n = 257$ ; on aura :

$$1 \equiv 1,\ 3 \equiv 3,\ 17 \equiv 17,\ 577 \equiv 63,\ 2.63^2 - 1 \equiv 227 \equiv -30,\ 2.30^2 - 1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 257)$$

on a ainsi $u_{32} \equiv 0$ : la question reste indécise.

3 Trouvée presque en même temps par Proth (*C. R.*, t. 57).

**15.** Pour $n$ impair, on a :

$$\delta^{n-1} u_k^n = u_{nk} + Q^k C_{n,1} u_{(n-2)k} + C_{n,2} Q^{2k} u_{(n-4)k} + \dots$$
$$+ \dots + C_{n, \frac{n-1}{2}} Q^{\frac{n-1}{2}k} u_k .$$

Comme $u_{fg}$ est divisible par $u_g$ et que $C_{p,g} \equiv 0$, on voit, en remplaçant $n$ par le nombre premier $p$, que *si* $u_k$ *est divisible par* $p^l$, $u_{pk}$ *est divisible par* $p^{l+1}$ *et non par une puissance supérieure.*

**16.** La série de Fibonacci étant celle dont les termes croissent le moins rapidement, Ed. Lucas l'a étudiée d'une façon particulière. Voici en résumé son étude.

*Si* $p = \mathbf{5} \pm 1$, *le terme* $u_{p-1}$ *de la série de Fibonacci est* $\equiv 0$, *et si* $p = \mathbf{5} \pm 2$, *on a :* $u_{p+1} \equiv 0$. En effet :

1° Soit $p = \mathbf{5} \pm 1$, on a : $p^2 = \mathbf{5} + 1$ ou $p^{\frac{5-1}{2}} \equiv 1 \pmod 5$ ou bien $\left(\frac{p}{5}\right) = 1$, d'où $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$, ou encore $5^m - 1 \equiv 0$. Or on a :

$$2^{p-2} u_{p-1} = C_{p-1,1} + 5C_{p-1,3} + \dots + 5^{m-1}$$
$$\equiv -(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{m-1})$$

puisque $C_{p-1,k} + C_{p-1,k-1} = C_{p,k} \equiv 0$, d'où $C_{p-1,k} \equiv - C_{p-1,k-1} \equiv C_{p-1,k-2} \equiv \dots \equiv C_{p-1,1} \equiv -1$. On peut donc écrire

$$2^{p-2} u_{p-1} \equiv 1 - 5^m \equiv 0 .$$

2° Soit $p = \mathbf{5} \pm 2$ ; on a : $p^2 = \mathbf{5} - 1$ ou $\left(\frac{p}{5}\right) = -1$ d'où $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$. Ainsi $p$ divise $5^m + 1$. Or on a :

$$2^p u_{p+1} = C_{p+1,1} + 5C_{p+1,3} + \dots + 5^m \equiv 1 + 5^m \equiv 0 .$$

Cor. 1. *Tout nombre premier* $p = \mathbf{5} \pm 1$ *divise et divise seulement les termes* $u_{kx}$, $k$ *désignant un certain diviseur de* $p - 1$. *Tout nombre premier* $p = \mathbf{5} \pm 2$ *divise et divise seulement les termes* $u_{kx}$, $k$ *désignant un certain diviseur de* $p + 1$. Par exemple, $u_{29} = 514229$ n'est divisible — puisque 29 est premier — par aucun des facteurs premiers contenus dans les termes précédents, et tous ses diviseurs sont de la forme $\mathbf{29} \pm 1$ ; d'ailleurs 29 étant un nombre impair, ces mêmes diviseurs sont $\mathbf{4} + 1$ et par suite il faut les chercher dans les deux formules $\mathbf{116} + 1, 57$ ; on arrive ainsi à conclure que ce terme est un nombre premier.

Réciproquement, *si* n *divise* $u_{n \mp 1}$ *sans qu'on ait* $u_k$ *divisible par* n *pour aucune valeur de* k *diviseur de* $n \mp 1$, n *est un nombre premier, qui est de la forme* $\mathbf{5} \pm 1$ *ou de la forme* $\mathbf{5} \pm 2$, *suivant le cas.*

II. La série $u_2, u_4, u_8, \ldots$ sert comme au n° **14**, dans la vérification des nombres premiers de Mersenne. Soit $n = 127$ ; on a :

$$\left.\begin{array}{l} v_2 \equiv 3\,,\ v_4 \equiv 3^2 - 2 \equiv 7\,,\ v_8 \equiv 7^2 - 2 \equiv 47\,,\ v_{16} \equiv 47^2 - 2 \equiv 48\,, \\ v_{32} \equiv 48^2 - 2 \equiv 16\,,\ v_{64} \equiv 16^2 - 2 \equiv 0\,. \end{array}\right\} \pmod{127}$$

Donc le nombre 127 est premier.

De même on trouve, suivant le module $2^{31} - 1$,

$$v_2 \equiv 3\,,\quad v_4 \equiv 7\,,\quad v_8 \equiv 47\,,\quad v_{16} \equiv 2207\,, \ldots$$

le reste zéro arrive à la trentième opération et pas avant : $2^{31} - 1$ est donc premier.

Soit $n = 2^{127} - 1$. Ce nombre est terminé par 7 : s'il est premier, il doit diviser $u_{n+1}$ et un de ses facteurs doit diviser $u_k$, $k$ désignant un facteur de $n + 1$, c'est-à-dire un nombre de la forme $2^x$. Ce facteur serait un nombre premier $2^f \pm 1$ diviseur de $n$, ce qui est impossible puisque 127 est premier. Ed. Lucas a vérifié que $n$ ne divise $u_{2h}$ que pour $h = 127$ : donc, s'il ne s'est pas trompé dans ses calculs, $n$ est premier.

**17.** On terminera par ces deux théorèmes analogues à ceux d'Ed. Lucas.

1° h *désignant une puissance de* 2, *pour que le nombre* $n = 2^h + 1$ *soit premier, il faut et il suffit que* $5^{\frac{n-1}{2}} + 1$ *soit divisible par* n.

En effet, pour $h > 2$, on a $n = \mathbf{5} = 2$ [1], d'où $n^{\frac{5-1}{2}} = \mathbf{5} - 1$ ; donc $\left(\frac{n}{5}\right) = -1$, et, si $n$ est premier, $\left(\frac{5}{n}\right) = -1$, c'est-à-dire que $n$ divise $5^{\frac{n-1}{2}} + 1$.

Cette condition est suffisante : admettons en effet que $n$ n'est pas premier et que $p$ est un de ses diviseurs premiers ; on aura

$$(\alpha) \qquad 5^{\frac{n-1}{2}} + 1 \equiv 0 \qquad \text{d'où} \qquad 5^{n-1} \equiv 1\ ;$$

or $5^{p-1} \equiv 1$. Le p. g. c. d. de $n - 1$ et de $p - 1$ est une puis-

[1] En effet si on remplace la puissance $h$ par la suivante, $n$ devient $(n-1)^2 + 1$ ; ce qui fait voir que si $n = \mathbf{5} + 2$, il en est de même de la nouvelle valeur de $n$. Or pour $h = 4$, $n = 17 = \mathbf{5} + 2$. Il en est donc de même en général.

sance $k$ de 2, donc $5^k \equiv 1$ [1], et comme $\frac{n-1}{2}$ est un multiple de $k$, on peut écrire $5^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1$, ce qui est en contradiction avec ($\alpha$). Le p. g. c. d. est donc $n$, et $n$ est premier.

De là cette règle plus précise que celle d'Ed. Lucas : pour vérifier la *nature du nombre* n, *on formera la suite* 5, $5^2$, $5^4$, $5^8$, $5^{16}$, ... *dont chacun est le carré du précédent, en négligeant à mesure, les multiples de* n : *si le* $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ème}}$ *terme divisé par* n *donne le reste* $-1$, n *est premier*[2]. (Pépin, *C. R.*, t. 85.)

2° *Pour que le nombre* $n = 2^h + 1$ *où* h *désigne une puissance de* 2, *soit premier, il faut et il suffit qu'il divise* $3^{2^{h-1}} + 1$ (Proth). Démonstration de M. Hurwitz. Supposons $n$ un nombre premier $p$; comme $p = 4 + 1$, on a :

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1\ ^{3};$$

3 est donc non-résidu[4] et $p$ divise $3^{2^{h-1}} + 1$.

Supposons maintenant que $3^{2^{h-1}} + 1$ soit divisible par le nombre $n$; on aura $3^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \pmod n$; donc $n-1$ est le plus petit exposant $f$ pour lequel on ait $3^f \equiv 1 \pmod n$. Donc, d'après le théorème d'Euler, $n-1$ divise $\varphi(n)$, ce qui ne peut avoir lieu que si $\varphi(n) = n-1$, c'est-à-dire si $n$ est premier.

Landry a fait connaître sa méthode définitive dans le vol. de l'*A. F.* de 1880. Elle est très élémentaire, très générale et a été le point de départ de tout ce qui a été fait depuis sur ce sujet.

Un nombre premier avec 6 est de l'une des formes $6 \pm 1$ et on peut le supposer pouvoir se décomposer ainsi :

$$(6x \pm 1)(6y \pm 1) \qquad \text{ou} \qquad (6x \pm 1)(6y \mp 1) .$$

---

[1] En effet, soit $A^{fd} \equiv A^{gd} \equiv 1$, et soit $d$ le p. g. c. d. de $fd$ et de $gd$; $f$ et $g$ sont premiers entre eux ; on peut donc écrire $fx - gy = 1$, d'où, en posant $A^d \equiv \alpha$,

$$\alpha^{fx} \equiv \alpha^f \equiv 1 \equiv \alpha^g \equiv \alpha^{gy} \equiv \alpha^{1+fx} ;$$

donc $A^d \equiv \alpha \equiv 1$.

[2] Ainsi soit $h = 8$, $n = 257$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} 5 \equiv 5,\ 5^2 \equiv 25,\ 25^2 \equiv 111,\ 111^2 \equiv -15,\ 15^2 \equiv -32,\ 32^2 \equiv -4 \\ 4^2 \equiv 16,\ 16^2 \equiv -1 \end{array}\right\} \pmod{257}$$

Donc 257 est premier.

[3] $2^{2f} + 1 = 2(2^{2f-1} + 1) - 1 = 3 - 1$.

[4] Tchebichef avait fait voir ainsi auparavant que, plus généralement, 3 est non-résidu de $p = 2^x + 1$.

Soit, par exemple,

$$n = 6a + 1 \quad \text{et} \quad a = 6q + r \; ;$$

posons

$$(\alpha) \qquad n = (6x + 1)(6y + 1) \qquad (x > y)$$

il viendra

$$(\beta) \qquad 6xy + x + y = a$$

$$(\gamma) \qquad x + y = 6z + r \qquad (\delta) \qquad xy = q - z$$

d'où, en éliminant $x$,

$$(\varepsilon) \qquad z = \frac{q - y(r - y)}{6y + 1} \; .$$

Quand $z$ augmente, le plus petit $y$ des deux nombres $x$ et $y$ diminue et le plus grand augmente[1]. La valeur supérieure de $y$ étant $\frac{\sqrt{n} - 1}{6}$, cette valeur, mise dans ($\varepsilon$), donnera une limite supérieure de $z$. On essaie les valeurs entières de $z$ jusqu'à cette limite ; le nombre des essais est trente-six fois moindre que celui qu'exigerait la méthode classique, puisque $n > 36q$. On réduit encore ce nombre par différentes considérations sur les formes linéaires de $x$, $y$, $z$, $r$ par rapport à différents nombres premiers.

Cette méthode a été grandement perfectionnée par MM. Barbette et Gérardin, comme on le verra plus loin.

Le P. Pépin (*Mem. acad. nuovi lincei*, 1880) a voulu faire profiter la méthode d'Euler des perfectionnements que Gauss a apportés à la théorie des formes ; mais la moindre simplicité théorique et pratique qui en résulte rend ses procédés peu avantageux.

Il a aussi utilisé la théorie des racines primitives, pour le cas de $n = a^k - 1$ : considérons le nombre premier $p$ et soit $a^k \equiv \alpha$ ; si $g$ est une racine primitive de $p$, on peut toujours poser $g^A \equiv \alpha$ et A est donné par le *Canon mathematicus* de Jacobi. Si $p - 1$ est un multiple de $k$, on peut ainsi écrire

$$g^{\left(\frac{p-1}{k}\right)A} - a \equiv 0$$

[1] A mesure que $z$ augmente, $xy$ diminue d'après ($\delta$) et $x + y$ augmente, d'après ($\gamma$). Si $x'$ et $y'$ sont les nouvelles valeurs de $x$ et de $y$ correspondant à une valeur plus grande de $z$, on aura

$$(\zeta) \qquad xy > x'y' \qquad (\eta) \qquad x + y < x' + y' \; .$$

Elevant au carré ($\eta$) et ajoutant à l'inégalité $-4xy < -4x'y'$, il vient cette autre relation $x - y < x' - y'$, laquelle ajoutée à ($\eta$), donne $x' > x$, et, en comparant avec ($\zeta$), $xyx' > x'y'x$, d'où $y > y'$.

et cette congruence indique par conséquent que $n$ est divisible par $p$.

Il a montré comment on peut resserrer les limites des essais en mettant $n$ sous la forme $xy$, $x > y$, et cherchant les valeurs de $y$ inférieures à différentes limites $l$, $l'$, ... ce qui renferme les valeurs $x + y$ entre les limites $2\sqrt{n}$ et $l + \frac{n}{l}$.

Lawrence (*Mes. of math.*, 1894, *Quart. J.*, 1896, et *Proceed.*, 1897), a donné, pour préciser les régions où peuvent se trouver des facteurs du nombre $n$, une méthode d'exclusion aussi simple qu'ingénieuse, et consistant dans l'examen des hypothèses faites sur la valeur de la somme des deux facteurs supposés de $n$ ou d'un multiple de $n$. On peut l'exposer ainsi.

*Posons* $\mathrm{n} = \mathrm{xy}$, $2\mathrm{X} = \mathrm{x} + \mathrm{y}$, $\mathrm{x} > \mathrm{y}$. *Si on a :* $\mathrm{X} > \mathrm{a} > \sqrt{\mathrm{n}}$, *on a également cette autre relation*

$$x > a + \sqrt{a^2 - n} > \sqrt{n} > a - \sqrt{a^2 - n} > y \text{ [1]} .$$

Cor. I. *Si aucune valeur de* X *n'est possible entre* a *et* $\sqrt{\mathrm{n}}$, *il n'y a aucun facteur de* n *entre* $\sqrt{\mathrm{n}}$ *et* $\mathrm{a} - \sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{n}}$.[2]

II. *Posons* $\mathrm{kn} = \mathrm{x'y'}$ *et* $2\mathrm{X'} = \mathrm{x'} + \mathrm{y'}$ ; *si aucune valeur de* X' *n'est possible entre* b *et* $\sqrt{\mathrm{kn}}$, *il n'y a aucun facteur de* kn *entre* $\mathrm{b} + \sqrt{\mathrm{b}^2 - \mathrm{kn}}$ *et* $\mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{b}^2 - \mathrm{kn}}$, *et par conséquent aucun facteur de* n *entre*

$$\frac{\mathrm{b} + \sqrt{\mathrm{b}^2 - \mathrm{kn}}}{\mathrm{k}} \quad et \quad \frac{\mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{b}^2 - \mathrm{kn}}}{\mathrm{k}} .$$

Par exemple, si $n$ est $\mathbf{9} + 4$, $x$ et $y$ sont, l'un d'une des formes $\mathbf{9} + 1, 2, 5, 7$ et l'autre $\mathbf{9} + 4, 2, 8, 7$, d'où $2\mathrm{X} = \mathbf{9} + 5, 4, 13, 14$ ou $\mathbf{9} + 14, 4, 4, 14$ et $\mathrm{X} = \mathbf{9} + 2, 7$. Agissant de même avec d'autres modules, on connaîtra de nouvelles conditions que doit

[1] Cette relation est une conséquence de ce que : en premier lieu, on peut écrire

$$\sqrt{xy} \pm \sqrt{a^2 - xy} \gtrless a ,$$

comme on s'en assurera en élevant les deux membres au carré; en second lieu, on a

$$x > \mathrm{X} > a > \sqrt{n} > y ;$$

et enfin, que de l'inégalité $x + y > 2\mathrm{X}$, on tire, en multipliant par $x$, puis par $y$, et ajoutant $a^2$ aux deux membres de chacune des deux inégalités ainsi produites, les deux suivantes

$$(x - a)^2 > a^2 - xy , \qquad (a - y)^2 > a^2 - xy .$$

[2] Ce corollaire peut s'énoncer ainsi : *posons* $\mathrm{x} - \mathrm{y} = 2\mathrm{Y}$ ; *si, jusqu'à la limite* $\mathrm{X} = \mathrm{a} > \sqrt{\mathrm{n}}$, *l'équation* $\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 = \mathrm{n}$ *ne peut avoir lieu, on a* $\mathrm{y} < \mathrm{a} - \sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{n}}$. Par exemple, soit $n = 118007$ ; on peut rechercher directement ainsi la limite de X : on a $344^2 - n = 329$ et $2.344 + 1 = 689$ ; ajoutons successivement à 329 les termes de la progression 689, 691, 693, ... on obtiendra les valeurs des termes de la suite $344^2 - n$, $345^2 - n$, $346^2 - n$, ... $380^2 - n$, dont aucun n'est un carré. On peut écrire par conséquent $a = 380$, d'où $\mathrm{X} > 380$ et $y < 380 - \sqrt{380^2 - n} = 218$ ; on essaiera donc la division de $n$ par les nombres premiers 213, 211, 219, ... dont le troisième réussit.

On a ainsi un perfectionnement notable de la méthode de Fermat.

remplir le nombre X, lesquelles serviront à déterminer, peu à peu, la limite $a$ de ses valeurs possibles [1].

On comprend dès lors la construction et l'usage du tableau suivant, qu'on pourrait étendre autant qu'on voudrait.

| Formes de $n$. | Formes de X. | Formes de $n$. | Formes de X. |
|---|---|---|---|
| **3** + 1 | **3** + 1, 2 | **13** + 1 | **13** + 0, 1, 2, 6, 7, 11, 12 |
| 2 | **3** | 2 | 1, 4, 5, 8, 9, 12 |
| **4** + 1 | **2** + 1 | 3 | 0, 2, 4, 5, 8, 9, 11 |
| 3 | **2** | 4 | 0, 1, 2, 4, 9, 11, 12 |
| **5** + 1 | **5** + 0, 1, 4 | 5 | 1, 2, 3, 10, 11, 12 |
| 2 | 1, 4 | 6 | 3, 4, 6, 7, 9, 10 |
| 3 | 2, 3 | 7 | 2, 4, 6. 7, 9, 11 |
| 4 | 0, 1, 3 | 8 | 2, 3, 5, 8, 10, 11 |
| **7** + 1 | **7** + 1, 3, 4, 6 | 9 | 0, 3, 5, 6, 7, 8, 10 |
| 2 | 2, 3, 4, 5 | 10 | 0, 1, 3, 6, 7, 10, 12 |
| 3 | 0, 2, 5 | 11 | 1, 5, 6, 7, 8, 12 |
| 4 | 1, 2, 5, 6 | 12 | 0, 3, 4, 5, 8, 9, 10 |
| 5 | 0, 3, 4 | **8** + 3 | **4** + 2 |
| 6 | 0, 1, 6, | 7 | **4** |
| **11** + 1 | **11** + 1, 2, 4, 7, 9, 10 | **9** + 1 | **9** + 1, 8 |
| 2 | 0, 4, 5, 6, 7 | 4 | 2, 7 |
| 3 | 1, 2, 5, 6, 9, 10 | 7 | 4, 5 |
| 4 | 2, 3, 4, 7, 8, 9 | **12** + 5 | **6** + 3 |
| 5 | 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 7 | 4 |
| 6 | 0, 2, 3, 8, 9 | 11 | 0 |
| 7 | 0, 1, 4, 7, 10 | **15** + 2 | **15** + 6, 9 |
| 8 | 0, 1, 3, 8, 10 | 8 | 3, 12 |
| 9 | 1, 3, 5, 6, 8, 10 | 11 | 0, 6, 9 |
| 10 | 0, 2, 5, 6, 9 | 14 | 0, 3, 12 |

[1] Soit le nombre déjà plusieurs fois traité $n = 4171$, qui est des formes $\mathbf{3} + 1$, $\mathbf{5} + 1$ et $\mathbf{7} + 6$ : X doit être de l'une des formes $\mathbf{3} + 1, 2$, de l'une de celles-ci $\mathbf{5} + 0, 1, 4$ et de l'une de celles-ci $\mathbf{7} + 0, 1, 6$. Le plus petit nombre à la fois de ces formes et supérieur à $\sqrt{n}$ est 70, ce qui donne la limite $70 - \sqrt{70^2 - n} = 43$. Essayant la division de $n$ pour les nombres premiers 43, 41, 37, ... elle réussit avec le premier de ces nombres.

Soit $n = 4177 = \mathbf{3} + 1 = \mathbf{4} + 1 = \mathbf{5} + 2 = \mathbf{7} + 5$. Le plus petit nombre $> \sqrt{n}$ et appartenant à chacun des groupes de formes $\mathbf{3} + 1, 2$; $\mathbf{2} + 1$; $\mathbf{5} + 1, 4$; $\mathbf{7} + 0, 3, 4$; est 91. Ainsi il n'y a aucun facteur de $n$ entre $\sqrt{n}$ et $91 - \sqrt{91^2 - n}$, ou entre 64 et 20. De même $11n$ est des formes $\mathbf{3}+2$, $\mathbf{4}+3$, $\mathbf{5}+2$, $\mathbf{7}+4$; donc X′ est **3**, **2**, de l'une des formes $\mathbf{5}+1, 4$ et de l'une des suivantes $\mathbf{7} + 1, 2, 5, 6$. Le plus petit nombre $> \sqrt{11n}$ des formes possibles pour X′ est 246 : il n'y a pas par conséquent de facteurs de $n$ entre les deux nombres

$$\frac{\sqrt{11n} \pm \sqrt{246^2 - 11n}}{11}$$

ou entre 30 et 9. Il reste donc les seuls nombres 7, 5 et 3 à essayer.

Voici un autre procédé assez pratique. Si $n = \mathbf{24} + 23$, on a $X = \mathbf{12}$. Si $n$ n'est pas de cette forme, on la multipliera par 23, 19, 17, 13, 11, 7 ou 5, suivant qu'il sera de l'une ou de l'autre des formes $\mathbf{24} + 1, 5, 7, 11, 13, 17$ ou 19, et on agira de même sur le produit, ce qui exclura pour X tous les nombres non multiples de 12. D'autres modules 5, 7, ... donneront de nouvelles exclusions.

Dans certains cas, on connaît une forme linéaire des facteurs, ce qui peut donner des moyens d'exclusion plus rapides. Ainsi, si on sait que $x$ et $y$ sont tous les deux $\equiv \alpha \pmod{h}$, en posant $x - y = 2Y$, il viendra

$$2X \equiv 2\alpha \quad \text{d'où} \quad X \equiv \alpha \quad \text{et} \quad Y \equiv 0 \quad \pmod{h}$$

par suite, comme $X^2 - Y^2 = n$, $X^2 \equiv n \pmod{h^2}$.

Soit $n = 2^{2k+1} + 1$; $n$ est de la forme $2u^2 + v^2$, et ses diviseurs sont donc de la forme $\mathbf{8} + 1$, ou de la forme $\mathbf{8} + 3$. Les deux facteurs $x$ et $y$ sont tous deux $\mathbf{8} + 1$ ou tous deux $\mathbf{8} + 3$; de là, la relation

$$X^2 = \mathbf{64} + n = \mathbf{64} + 1$$

si $k > 2$, et par suite

$$X = \mathbf{32} \pm 1\ [1].$$

Soit $n = 2^{2k+1} - 1$; $n$ est de la forme $2u^2 - v^2$ et n'a par suite que des diviseurs de la forme $\mathbf{8} \pm 1$: les diviseurs $x$ et $y$ sont donc l'un $8\xi + 1$ et l'autre $8\eta - 1$, d'où

$$n + 1 = 64\xi\eta + 8(\xi - \eta);$$

$\xi + \eta$ est de la parité de $\xi - \eta$ et par suite de celle de $\dfrac{n+1}{8}$; donc $2X = x + y = 8(\xi + \eta)$ est de la forme $n + 1 + \mathbf{16} = \mathbf{16}$ et $X = \mathbf{8}$.

Ainsi les diviseurs de $n = 2^{71} - 1$ étant de la forme $\mathbf{71} + 1$, on a $2X = \mathbf{71} + 2$ et $X = \mathbf{71} + 1$. En outre, on a :

$$\left.\begin{aligned} X^2 &\equiv n = 1 + 4.71\ [2] \\ X &\equiv \pm 1 + 2.71 \end{aligned}\right\} \pmod{71^2}$$

Il faut prendre $+1$, d'après ce qui précède, c'est-à-dire que $X$ est $\equiv 143 \pmod{5041}$.

De plus, comme $X$ est divisible par 8 et que $n$ est des deux formes $\mathbf{9} + 4$ et $\mathbf{5} + 2$, $X$ est également des deux formes $\mathbf{9} \pm 2$ et $\mathbf{5} \pm 1$.

Lawrence a en outre proposé la solution mécanique suivante : on représentera, à une même échelle, les valeurs de $X$ sur des

---

[1] Si le nombre $H = ah^2 + 2bch + c^2$ est un carré parfait, avec $b$ et $c < h$, la racine $\sqrt{H}$ est de la forme $zh^2 \pm bh + c$. Posons, en effet,

$$(\alpha) \qquad H = (zh^2 + sh + t)^2$$

$s$ et $t$ étant supposés $< h$, ce qui est toujours possible. On verra, en développant, que $c^2 - t^2$ doit être multiple de $h$, ce qui, à cause de $c$ et $t < h$, demande qu'on ait $t = \pm c$.

Introduisant cette valeur de $t$ dans $(\alpha)$ et simplifiant, il s'ensuivra que $bc - tn$ doit être divisible par $h$, ce qui conduit a la relation $s = \pm b$.

En particulier, si $ah + b^2$ est un carré parfait, avec $b < h$, sa racine est de la forme $zh \pm b$.

[2] $2^{16} = 3.13 + 71^2$, d'où $2^{35} \equiv 72 \pmod{71^2}$, $2^{70} \equiv 1 + 2.71$ (id.), $2^{71} - 1 \equiv 1 + 4.71$ (id.).

bandes de papier quadrillé faites une fois pour toutes; soit deux bandes pour le module 3, quatre pour le module 5, dix pour le module 11, etc. On indiquera, par exemple, pour $X = 9 + 4$, les longueurs 0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, ... Pour l'application, on n'aura qu'à aligner convenablement côte à côte les bandes correspondant aux diverses expressions demandées pour X, et à noter la première division se trouvant à la fois dans toutes les bandes; le nombre ainsi déterminé donnera aisément la limite cherchée $a$.

MM. Kraïtchik et Gérardin ont réalisé et montré comme elle est pratique. (Voir *S. Œ.*, 1912, p. 62, ainsi que le compte rendu du Congrès de l'A. F. à Nîmes.)

Ce qu'on vient de dire de l'important travail de Lawrence n'en contient que le principe théorique. Pour les détails et les applications pratiques, voir les recueils cités ou la traduction française publiée en 1910, dans le *S. Œ.* de M. Gérardin.

M. Barbette (*M.*, 1899) met le nombre à factoriser sous la forme $100a + 10b + c$. Pour trouver les facteurs de forme $10x \pm 1$, il pose

$$100x^2 \pm 4(5b + c)x + (b^2 - 4ac) = y^2 ,$$

et pour trouver ceux de la forme $10x \pm 3$,

$$100x^2 \mp 4(5b - 4c)x + (b^2 + c^2 + 2bc + 36ac) = y^2 .$$

La question est ramenée à résoudre des équations de la forme $A^2x^2 + Bx + C = y^2$. Cette équation se résout, soit par la méthode de Gauss donnée plus haut, soit par tâtonnements, en éliminant en bloc les formes linéaires de $x$ qui donnent, au premier membre, des valeurs pouvant se mettre sous l'une des formes inapplicables à un carré, $3 + 2$; $8 - 1, \pm 2, \pm 3$; $5 \pm 2$; $7 + 3, 5, 6$; etc.; ce qui se trouve aisément, en faisant successivement $x = 3 + 0, 1, 2$; $5 + 0, 1, 2, 3, 4$; etc.

M. Gérardin (*S. Œ.*, 1906) a d'abord proposé d'écrire, suivant que $n$ est $10 + 1, 3, 7, 9$[1],

$$n = (10x \pm 1)(10y \pm 1) \quad \text{ou} \quad (10x + 3)(10y - 3)$$

$$n = (10x \pm 1)(10y \pm 3)$$

$$n = (10x \pm 1)(10y \mp 3)$$

$$n = (10x + 1)(10y - 1) \quad \text{ou} \quad (10x \pm 3)(10y \pm 3)$$

---

[1] On pourrait considérer les formes $12 \pm 1, \pm 5$, également au nombre de quatre et qui réduiraient encore le nombre des diviseurs à essayer.

soit $n = 100a + 10b + 1 = (10x + 1)(10y + 1)$, ce qui donne

$$10xy + x + y = 10a + b$$

$$x + y = b + 10z \ , \qquad xy = a - z$$

$$(\alpha) \qquad x^2 - (b + 10z)x + a - z = 0 \ .$$

Le minimum de $z$ et, en même temps, celui de $x + y$, sont déterminés par la relation connue $x + y > 2\sqrt{xy}$, dont le second membre est sensiblement égal à $2\sqrt{a}$ et qu'on représentera ainsi $10\alpha + \beta$. On posera donc :

$$b + 10z = 10\alpha + \beta \ .$$

Le minimum de $z$ est donc égal à $\alpha$ puisque $b$ et $\beta$ sont des nombres $< 10$.

D'après cela, on résoudra l'équation $(\alpha)$ et on agira de même sur les formes $(10x - 1)(10y - 1)$ et $(10x + 3)(10y - 3)$.

Pour des nombres très grands, on décomposerait ainsi le nombre donné :

$$n = 120^2a + 120b + c = (120x + f)(120y + g) \ ,$$

$c$ désignant l'un des trente-deux nombres inférieurs à 120 et premiers avec lui ; $f$ et $g$ deux nombres dont le produit est $\equiv c$ (mod 120)[1]. On trouvera la liste des nombres $c$, $f$, $g$ dans le t. III de *S. Œ.*

Ainsi, par exemple, pour le nombre $n = 289524791$, on posera :

$$\begin{aligned} n = 20105 . 120^2 + 106 . 120 + 71 &= (120x + 7)(120y + 113) \\ &= (120x + 11)(120y + 61) \\ &= (120x + 13)(120y + 107) \end{aligned}$$

ce qui amènera autant d'équations de la forme $A^2x^2 + Bx + C = y^2$ à résoudre. L'examen des formes linéaires des coefficients amènera d'ailleurs de nombreuses exclusions dans ces équations. On réduira également le nombre des essais en cherchant, par divers moyens, les limites supérieures ou inférieures de $x$, soit fixes,

---

[1] En général, posons

$$\begin{aligned} n = (ax + \xi)(ay + \eta) &= a^2xy + a(\xi y + \eta x) + \xi\eta \\ &= a^2A + aB + C \ . \end{aligned}$$

$a$, B, C sont donnés. Le nombre C est congru à un des $\varphi(a)$ nombres inférieurs à $a$ et premiers avec lui. Faisons $\xi\eta \equiv n - C$ (mod a), prenons pour $\xi$ un quelconque $f$ de ces mêmes nombres ; $\eta$ en sera un autre $g$, et on pourra poser :

$$aA + B \equiv axy + fy + gx \ , \quad fy + gx \equiv B \qquad \text{d'où} \qquad x \text{ et } y \ .$$

On aura à résoudre $\varphi(a)$ équations de ce genre.

soit obtenues en resserrant de plus en plus l'intervalle à examiner. Ainsi, soit à déterminer les valeurs de $x$ supérieures à B et à C; on a, comme on peut le vérifier aisément,

$$\frac{B+1}{2A} > y - Ax > \frac{B}{2A+1} .$$

Or $y$ est de la forme $Ax + D$, D étant $< x$. On a donc de la sorte circonscrit une région dans laquelle doit se trouver D; de là $x$, en égalant $A^2x^2 + Bx + C$ au carré de $Ax + D$.

On trouvera du reste dans ce recueil de nombreux et intéressants exemples de cette méthode, ainsi que des aperçus de toutes sortes sur la conduite des calculs auxquels conduit le difficile problème qui fait l'objet de la présente étude, laquelle a été entreprise comme une application de la théorie élémentaire des nombres, et comme suite aux articles de l'*Ens. math.* sur le même sujet publiés en 1907 (p. 24, 286 et 417), en 1909 (p. 329 et 430), en 1910 (p. 457) et 1911 (p. 187).

A. Aubry (Dijon).

---

# SUR QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LE JEU DE TRENTE ET QUARANTE

Les problèmes fondamentaux concernant le jeu de trente et quarante ont été traités pour la première fois, à ma connaissance du moins, par Poisson en 1820, dans un beau mémoire inséré dans le t. 16 des *Annales math. de Gergonne.* Quarante-sept ans plus tard le géomètre allemand Œttinger retrouvait en les complétant en plusieurs points la plupart des résultats donnés par Poisson; mais son travail, inséré dans le t. 67 du *Journal de Crelle* et cité par H. Laurent dans son traité du *Calcul des Probabilités,* semble avoir passé inaperçu.

Bien que les déductions de Poisson et d'Œttinger présentent des lacunes, je n'aurais pas cru utile de revenir sur ce sujet, si Bertrand, en traitant dans son Calcul des Probabilités l'un des problèmes déjà résolus dans les mémoires cités, n'était arrivé à des résultats ne concordant pas entièrement avec ceux d'Œttinger et de Poisson; le désaccord n'est pas grand, il est vrai, mais il existe, et cela suffirait pour justifier une étude nouvelle.

Il était facile de refaire les calculs, dans le cas particulièrement simple envisagé par Bertrand. Je dirai tout de suite qu'un certain

nombre de résultats donnés par Bertrand contiennent des décimales inexactes ; la même remarque s'applique au n° 69 des *Leçons élémentaires sur le Calcul des Probabilités,* de M. R. de Montessus, mais je dois ajouter que ces erreurs, peu importantes du reste, ne sont que des erreurs de calcul.

Pour simplifier le problème, Bertrand a introduit une hypothèse qui modifie les conditions du jeu. Bien plus compliquée est l'étude des problèmes réels ; il n'est pas facile de se rendre compte du degré d'approximation fourni par les procédés de calcul de Poisson et d'Œttinger. Je montrerai comment on pourrait compléter l'analyse d'Œttinger. Quant à celle de Poisson, elle exigerait des développements trop longs pour trouver place dans cette communication.

1. Le jeu de trente et quarante se joue avec six jeux de 52 cartes (et non avec 8, comme le dit par erreur Bertrand). Le banquier abat une, deux, trois... cartes jusqu'à ce que la somme des points ait dépassé trente (les figures valant dix). Cette première rangée est suivie par une seconde. Le joueur parie pour l'une des rangées et gagne si le nombre des points de sa rangée est plus petit que celui de l'autre. Si les deux rangées ont 31 points chacune, le banquier a droit à la moitié des mises. Tel est le seul avantage du banquier. Pour le calculer, il suffit donc d'évaluer la probabilité d'abattre deux rangées de 31 points chacune et d'en prendre la moitié.

D'où le problème fondamental suivant : Quelle est la probabilité d'abattre une rangée de $i$ points ?

Désignons cette probabilité par $p_i$. Il est utile de réunir les rangées en groupes que j'appellerai familles. Je dirai que deux rangées appartiennent à une même famille, si elles se composent de cartes de même valeur.

Désignons par $n_i$ le nombre des familles de $i$ points. J'ai calculé $n_i$ pour tous les $i$ ne dépassant pas 31. Comme le calcul de $n_i$ revient à la solution d'un problème de la partition des nombres, j'aurais pu me servir des formules de Sylvester et de Cayley ou du calcul des résidus, mais j'ai préféré calculer les $n_i$ de proche en proche. En particulier j'ai trouvé qu'il existe 4231 familles de rangées ayant chacune 31 points.

Pour résoudre le problème fondamental, il suffirait de calculer la somme des $n_i$ probabilités partielles relatives à chacune des $n_i$ familles de $i$ points ; mais ce moyen direct serait évidemment trop long.

Dans le jeu de trente et quarante les cartes ne sont pas remises dans le jeu ; la probabilité $p_i$ dépend donc du nombre et de la valeur des cartes sorties.

Mais considérons le cas hypothétique où les cartes sorties seraient remises dans le jeu et soit $P_i$ la probabilité d'abattre une

rangée de $i$ points dans cette hypothèse. Bertrand s'est borné à ce cas limite déjà envisagé par Poisson et Œttinger, mais, comme je l'ai déjà dit, la plupart des valeurs des $P_i$ calculées par lui contiennent des décimales inexactes. En particulier $P_{31} = 0,148061$ (plus exact. 0,14806086) et non 0,148218 ; par conséquent l'avantage du banquier dans cette hypothèse serait $\frac{1}{2}$ . 0,0219220 et non $\frac{1}{2}$ . 0,0219686. Poisson a trouvé pour valeur approchée de $P_{31}$, 0,148062 et Œttinger 0,14806092. Je compte publier prochainement le tableau complet des valeurs des $P_i$.

2. C'est dans l'étude du problème réel que la notion de famille m'a été particulièrement utile. Pour évaluer la probabilité $p_i$ il suffit de calculer le coefficient de $t^i$ dans le développement de

$$(1 + ut)^{x_1}(1 + ut^2)^{x_2} \dots (1 + ut^{10})^{x_{10}},$$

$x_1, x_2, \dots x_{10}$ désignant le nombre des as, des deux, etc., au moment où l'on abat la rangée. Ce coefficient est un polynôme de la forme $a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_k u^k$. Posons $s = x_1 + x_2 + \dots + x_{10}$ et soit $b_m$ le coefficient binômial $\binom{s}{m}$ ; la probabilité d'abattre une rangée de $m$ cartes et de $i$ points est égale à $\frac{a_m}{b_m}$, d'où $p_i = \sum_{m=1}^{k} \frac{a_m}{b_m}$. Mais est-il nécessaire de calculer toutes ces fractions ?

Œttinger néglige celles dont l'indice est supérieur à une certaine limite. J'ai cherché à me rendre compte du degré d'approximation qu'on obtient de cette manière. Quelle est la borne supérieure de l'erreur possible ?

Je ferai remarquer que $\frac{a_m}{b_m}$ est une probabilité totale, somme de probabilités partielles relatives aux différentes familles de $m$ cartes et de $i$ points ; or il est facile de calculer la borne supérieure $\varepsilon_m$ de ces probabilités partielles ; en la multipliant par le nombre des familles de $m$ cartes on aura une borne pour $\frac{a_m}{b_m}$, on en déduira l'erreur possible affectant le résultat final. J'ai réussi ainsi à justifier le procédé d'Œttinger, mais je n'ai pas eu le temps de vérifier ses calculs. On rencontre dans les mémoires d'Œttinger et de Poisson d'autres points obscurs qu'il serait utile de mettre en lumière. Je compte le faire prochainement.

31 août 1912. D. Mirimanoff (Genève).

---

# APPLICATION D'UNE TRANSFORMATION DE M. BROCARD A LA CONSTRUCTION DE CERTAINES COURBES TRANSCENDANTES

Pour peu que l'on s'occupe de la théorie et de l'histoire des courbes particulières, des courbes transcendantes notamment, on ne peut manquer d'être frappé par la multitude des travaux les concernant, et par l'absence de tout lien entre ces divers travaux. C'est qu' « une grande application et l'étude opiniâtre d'une » courbe peuvent y faire voir des propriétés singulières : l'inven- » teur en est redevable à son génie et souvent à la fortune[1] » plutôt qu'à des recherches systématiques. Ayant été amené à constater combien cette théorie des courbes transcendantes particulières a besoin d'idées générales, j'ai fait, sous l'influence de la lecture du magistral ouvrage de M. Gino Loria sur les courbes planes, quelques remarques que je crois utiles de faire connaître : c'est à cet ordre d'idées que se rattache le présent article.

1. — En ce qui concerne les courbes algébriques, les notions de degré, classe, genre... la notion de construction géométrique et celle de transformations rationnelles, ponctuelles ou tangentielles, permettent d'établir des coordinations et des classifications simples. Il n'en est pas de même pour les courbes transcendantes. A la suite des recherches de M. Gino Loria sur les *courbes panalgébriques*, j'ai montré dans un article *Sur la classification et la construction des courbes transcendantes* (*Enseignement mathématique*, 1913), qu'il y a le plus grand intérêt à introduire la notion du nombre $\omega$ qui représente l'ordre de l'équation différentielle rationnelle la plus simple satisfaite par la courbe transcendante envisagée. Plus profondément encore, il y a lieu d'étudier les courbes du point de vue de leurs constructions : *Une courbe transcendante particulière* (C) *étant supposée donnée, et même matériellement réalisée, quelles sont les courbes transcendantes qui en dérivent par des constructions élémentaires ?* En se posant et en résolvant une telle question, on constitue des familles nettement distinctes entre elles de courbes transcendantes ; la plus

[1] G. Cramer. *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Geneve, 1750, page VI de la préface.

grande connexion existe entre les diverses courbes particulières d'une même famille ; toutes les courbes ont nécessairement le même ordre $\omega$ ; l'une d'elles, quelconque d'ailleurs, étant supposée matériellement réalisée, la construction de toute autre en résulte ; réciproquement, pour que l'une de ces courbes puisse être construite élémentairement, il est absolument nécessaire de se donner matériellement l'une d'elles.

2. — Parmi les courbes transcendantes, les spirales et les quadratrices occupent une place particulièrement importante, ce qui résulte principalement de leur grand intérêt historique. Les plus antiques courbes transcendantes planes connues sont, en effet, la quadratrice de Dinostrate et la spirale d'Archimède.

Supposons matériellement réalisée la *spirale d'Archimède*. L'inversion permet de lui rattacher la *spirale hyperbolique ;* des transformations rationnelles simples, opérant sur le seul rayon recteur, permettent de faire dériver les *spirales de Fermat* et autres *spirales d'ordre supérieur* de la spirale d'Archimède. La *développante de cercle* et la *spirale tractrice compliquée de Côtes* appartiennent elles aussi à cette même famille, puisque la première de ces courbes est l'antipodaire de la spirale d'Archimède (Clairault) ou la polaire réciproque par rapport à un cercle de la spirale hyperbolique (Monge), tandis que la seconde est l'inverse de la développante du cercle ou l'antipodaire de la spirale hyperbolique (Côtes et Neuberg : G. Loria, *Spezielle Kurven* II, p. 202). Je vais maintenant, et c'est le principal objet du présent article, établir qu'à cette même famille de courbes panalgébriques se rattachent la *quadratrice de Dinostrate* et la *cochléoïde* de Falkenburg.

On sait que M. Brocard [1] a imaginé une transformation géométrique simple pour faire dériver le trifolium oblique du cercle ; cette construction géométrique se définit ainsi : étant donné un point M, quelconque sur la courbe primitive (C), on lui fait correspondre l'un des deux points $P_1$, $P_2$ d'intersection de la parallèle à l'axe $Ox$ menée par M et de la circonférence de centre M qui passe par l'origine O ; en d'autres termes, on prend sur la parallèle à $Ox$ menée par M deux points $P_1$ $P_2$ tels que :

$$MP_1 = MP_2 = OM .$$

Cette transformation aurait pu d'ailleurs être découverte en cherchant à déduire d'une parabole de foyer O sa directrice : si la courbe à transformer (C) est, en effet, une parabole de foyer O et d'axe $Ox$, l'une des courbes transformées $(C_1)$ est la directrice

---

[1] H. Brocard : *Le trifolium.* Journal de mathématiques spéciales. 1891.
G. Loria : *Spezielle Kurven,* I. p. 168.
H. Bouasse et E. Turrière : *Exercices et compléments de mathématiques générales.* Paris, Delagrave, éditeur, 1912, §§ 404-406.

tandis que la seconde $(C_2)$ est une seconde parabole. A une droite (C) correspond une hyperbole équilatère ; à une ellipse de foyer O correspondent deux ellipses.....

Cette définition étant rappelée, supposons que la courbe primitive (C) soit une spirale hyperbolique ; il lui correspond deux courbes $(C_1)$ et $(C_2)$ qui sont deux *cochléoïdes généralisées :* je désigne sous cette dénomination (*G. Teixeira*, Traité des courbes spéciales, II, p. 386) les courbes d'équation polaire :

$$r = a \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\theta - \theta_1} ;$$

en particulier, pour un choix convenable de l'axe O$x$, on peut ainsi construire la *cochléoïde* de Falkenburg d'équation polaire :

$$r = \frac{\sin \theta}{\theta} .$$

et la *syncochléoïde* [Hofbauer, Intermédiaire des mathématiciens, 1905, p. 158], courbe dont l'équation polaire est :

$$r = \frac{\cos \theta}{\theta} .$$

Par inversion opérant sur ces cochléoïdes, on construit la *quadratrice de Dinostrate* et les courbes plus générales étudiées par Chasles.

3. — La même transformation de M. Brocard appliquée à la *spirale logarithmique*, rattache à cette spirale une courbe d'équation polaire

$$r = a \,.\, \cos \theta \,.\, e^{m\theta} ,$$

qui jouit de la propriété importante d'être la podaire de la *logarithmoïde* de M. E. Köstlin. Cette courbe curieuse, découverte en 1907 par cet auteur, à propos de ses intéressantes recherches sur les *Arcuides* (Gino Loria, Spezielle Kurven II, p. 240), a été considérée de nouveau par M. Köstlin lui-même [1] comme étant l'enveloppe d'un rayon vecteur invariablement lié à une spirale logarithmique qui roule sans glissement sur une droite. L'intérêt que présentent d'une part les Arcuides et d'autre part l'importance cinématique du roulement de la spirale logarithmique sur une droite (description d'une ligne droite par roulement sur une base rectiligne) placent la logarithmoïde parmi les courbes transcendantes remarquables. Elle se rattache donc, du point de vue de sa

[1] Ueber eine transzendente Kurve von der die Zykloïde ein Grenzfall ist (*Mathematische-Naturwissenschaften Mitteilungen*, *Würtemberg*, [2], XI, 1909 (pp. 55-64 et 66-78).

construction géométrique, à la spirale logarithmique (de même que la *spirale de Poinsot* et autres courbes remarquables), puisqu'elle est la podaire négative d'une transformée de la spirale logarithmique.

4. — Dans un article sur les *courbes transcendantes et interscendantes (Enseignement mathématique,* mai 1912, pp. 209-214), j'ai montré que, dans bien des cas, il est possible de considérer une courbe transcendante particulière comme étant la limite d'une famille dépendant d'un paramètre de courbes algébriques ou interscendantes : la spirale logarithmique est, par exemple, une limite de spirales sinusoïdes. J'ai même spécifié que la spirale hyperbolique est la limite d'une famille d'épis interscendants[1]:

$$r = \frac{m}{\sin m\theta} .$$

En appliquant à un *épi* de M. Aubry, d'équation polaire

$$r = \frac{a}{\sin m\theta} ,$$

la transformation de M. Brocard, on est conduit à une courbe algébrique, ou interscendante suivant les valeurs de $m$, d'équation polaire

$$r = \frac{2a \cos \theta}{\sin 2m\theta} ;$$

en appliquant, en second lieu, à cette courbe la *transformation en éventail* de M. Haton de la Goupillière[2], transformation qui consiste à conserver le rayon vecteur et à multiplier les azimuts par un facteur constant, on rattache donc, par une double transformation géométrique, une certaine famille de courbes d'équation polaire

$$r = a \cdot \frac{\sin n\theta}{\sin p\theta}$$

aux épis de M. Aubry. C'est là une famille de courbes, généralisant les rosaces et les épis, appelées *courbes d'intersection de deux mouvements de rotation*, algébriques, panalgébriques ou d'ordre

[1] A ce sujet, je signale que l'abbé Aoust, dans son *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873), p. 143, cite une courbe particulière

$$r \times \sin \frac{\theta}{\sqrt{3}} = \text{const} ,$$

à laquelle il est conduit dans la résolution d'un certain problème : c'est là un épi particulier et cet épi est interscendant.

[2] Note sur le procédé le plus général de transformation des engrenages de roulement cylindriques ou coniques, *Annales des Mines*, [6], v. p. 333.

$\omega = 2$ suivant les cas. Ainsi que je l'avais déjà indiqué dans mon article antérieurement cité (p. 213), elles permettent de définir comme courbes limites la cochléoïde et la quadratrice de Dinostrate [1].

D'une manière analogue, puisque la logarithmoïde de M. E. KÖSTLIN peut être rattachée par une transformation géométrique à la spirale logarithmique, il est donc possible de former une famille de courbes algébriques ou interscendantes admettant la logarithmoïde pour courbe limite : il suffit d'appliquer à la famille de spirales sinusoïdes, considérée pour définir la spirale logarithmique, la transformation géométrique qui fait dériver de cette dernière courbe celle de M. KÖSTLIN.

J'aurai prochainement l'occasion de rattacher la construction de la cycloïde ordinaire à celle de la spirale d'Archimède. La transformation de M. BROCARD appliquée en effet à la spirale d'Archimède définit une nouvelle courbe transcendante dont la cycloïde est une courbe antipodaire.

Emile TURRIÈRE (Poitiers).

---

[1] La bibliographie de ces courbes ne se trouvant pas indiquée dans les ouvrages sur les courbes spéciales, je note ci-dessous les principaux mémoires où elles sont citées ou étudiées.

ROGET (Philos. Transactions, 1825, p. 131). — LE FRANÇOIS (Correspondance mathématique et physique de Quételet, 1829, t. V, p. 120 et p. 379. — G. V. D. MENSBRUGGE (Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers de l'Académie royale de Belgique, t. XVI, 1863). - CH. LABOULAYE : Traité de Cinématique, 1878, p. 418 et p. 947. — J. PLATEAU (Correspondance mathématique et physique de Quételet : 1828, t. IV, p. 393 et 1829, t. VI, p. 121. — Annales de chimie et de physique de Paris, 1831, t. XLVIII, p. 281. — Bulletin de l'Académie royale de Belgique : 1836, t. III, p. 7 et 1849, t. XVI, p. 1). — D. GAUTIER (Mesure des angles. Hyperboles étoilées et développantes, Paris, 1911). Les *Hyperboles étoilées* de cet auteur sont précisément identiques aux courbes précédentes et son *hyperbole développante* n'est autre que la courbe trascendante qui est la limite d'une famille d'hyperboles etoilées : la quadratrice de Dinostrate. J'ai déjà signalé ce fait (*Enseignement mathématique* 1912, p. 213).

# UN THÉORÈME SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Soient K une hyperbole équilatère et un triangle inscrit ABC. Soit O un point quelconque de la courbe, menons OA, OB, OC et abaissons d'un point quelconque S de l'hyperbole les perpendiculaires sur les droites OA, OB, OC; ces perpendiculaires couperont les côtés BC, AC, BA du triangle ABC en trois points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, situés en ligne droite.

Le théorème résulte du théorème général que nous avons publié dans ce journal (n° 3, 10e année, mai 1908), et dont voici l'énoncé :

Soient une conique K et un triangle inscrit A, B, C. Soit M, une droite quelconque prise dans le plan de la conique ; déterminons sur cette droite deux divisions homographiques telles que les points d'intersection de la droite avec la conique en soient les points doubles. Nous prendrons pour les points de la première division les intersections $c$, $a$, $b$, de la droite M avec les côtés AB, BC, CA du triangle ; $a_1$, $b_1$, $c_1$ sont les points correspondants de l'autre division. Soit D un point quelconque de la conique : *Les droites* $Da_1$, $Db_1$, $Dc_1$ *couperont les côtés* BC, CA, AB *du triangle en trois points* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *situés sur la même droite.*

Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Soient S le centre de deux faisceaux S $(a, b, c...)$ et S$(a_1\, b_1\, c_1...)$, en involution, et $n$ et $n_1$ deux rayons correspondants perpendiculaires. Si dans l'un de ces faisceaux, soit S $(a, b, c,...)$ nous faisons correspondre aux rayons $a, b, c,...$ les rayons $a_2, b_2, c_2, ...$, qui sont perpendiculaires aux rayons $a_1, b_1, c_1, ...$, nous obtenons un nouveau faisceau S $(a_2, b_2, c_2, ...)$, et les faisceaux S $(a, b, c, ...)$ et S$(a_2, b_2, c_2, ...)$ sont homographiques et les rayons doubles de ces faisceaux sont les rayons $n$ et $n_1$.

La démonstration du théorème de l'hyperbole est facile.

Dans le quadrilatère OABC, les rayons OA et BC, OB et AC, OC et AB forment sur la droite de fuite une involution et les rayons perpendiculaires, qui correspondent l'un à l'autre, en cette involution déterminent les directions asymptotiques de l'hyperbole équilatère passant par les points O, A, B, C.

Si nous menons par le point O les rayons $OA_1$, $OB_1$, $OC_1$ parallèles aux droites BC, AC, BA et les rayons $OA_2$, $OB_2$, $OC_2$ perpen-

diculaires à OA, OB, OC, il résulte du lemme cité que les rayons doubles de deux faisceaux homographiques O ($A_2$, $B_2$, $C_2$, ...) et O ($A_1$, $B_1$, $C_1$, ...) déterminent les directions asymptotiques de l'hyperbole. Ces faisceaux déterminent aussi sur la droite de fuite deux divisions homographiques et les points doubles de ces divisions sont les points d'intersection de la droite de fuite avec l'hyperbole ; nous pouvons donc appliquer le théorème général cité et on obtient le théorème proposé.

*Problème.* Le théorème permet de résoudre le problème suivant : Soient ABC un triangle et un point O ; trouver les points tels que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les droites OA, OB, OC rencontrent les côtés BC, AC, BA en points situés sur la droite. Le lieu de ces points est l'hyperbole équilatère passant par les points A, B, C, O.

Cas particulier. — Nous savons que l'hyperbole équilatère, passant par les sommets d'un triangle ABC, passe aussi par le point d'intersection des hauteurs de ce triangle ; cette remarque fournit le théorème suivant :

Soient un triangle ABC et un point O. Joignons OA, OB, OC et menons par le point S, qui est l'intersection des hauteurs du triangle, les perpendiculaires aux droites OA, OB, OC. Ces perpendiculaires couperont les côtés BC, CA, BA en trois points situés en ligne droite.

Ant. PLESKOT (Pilsen, Bohême).

---

# MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

## Sur les rayons de courbure principaux en un point d'une quadrique.

*A propos d'une Note de* M. TURRIÈRE.

Cette Note m'a été inspirée par la lecture d'un très intéressant article de M. TURRIÈRE (*Enseignement mathématique* du 15 mars 1911) et par la correspondance que j'ai eue avec M. Turrière à cette occasion.

M. Turrière rappelait un théorème de Steiner qui peut s'énoncer ainsi : *Soit* C *le centre de courbure d'une conique pour un point* M, *soit* M' *le conjugué de* M *sur le cercle* MC *par rapport au cercle orthoptique on a*

$$MM' + MC = 0 . \qquad (I)$$

M. Turrière a établi une relation analogue pour une quadrique en considérant la sphère de Monge de cette quadrique comme la généralisation du cercle orthoptique d'une conique. Or on peut considérer aussi, comme généralisation de ce cercle, la quadrique lieu des points d'où on peut mener à la quadrique donnée 3 tangentes rectangulaires 2 à 2. On obtient ainsi, en considérant les deux quadriques correspondant au cercle orthoptique, deux formules qui donnent des relations généralisant la relation (I).

Si on rapporte une quadrique à un système d'axes formé des directions principales de l'indicatrice en un point M, et par la normale en ce point, l'équation de la quadrique peut s'écrire

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx - 2z = 0 \ . \qquad (Q)$$

Si on désigne par C et C′ les centres de courbure principaux on a facilement

$$\frac{1}{MC} = A \ , \qquad \frac{1}{MC'} = A' \ .$$

L'équation du cône circonscrit à la quadrique (Q), et ayant pour sommet un point (O, O, $h$) de la normale en M, est

$$(A''h^2 - 2h)(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx - 2z) - [h(B'x + By + A''z - 1) - z]^2 = 0 \ .$$

Les coefficients des termes du 2e degré dans cette équation sont respectivement

$$\begin{aligned} A_1 &= (A''h^2 - 2h)A - B'^2h^2 & 2B_1 &= -2Bh \ , \\ A'_1 &= (A''h^2 - 2h)A' - B^2h^2 & 2B'_1 &= -2B'h \ , \\ A''_1 &= -1 \ , & 2B''_1 &= -2BB'h^2 \ . \end{aligned}$$

Pour que le cône puisse être *inscrit* dans un trièdre trirectangle (autrement dit que son sommet soit sur la sphère de Monge), il faut et il suffit que

$$(AA'A'' - AB'^2 - A'B^2)h^2 - 2AA'h - (A + A') = 0 \ .$$

Cette condition s'obtient en écrivant que l'invariant

$$(A'_1A''_1 - B_1^2) + (A''_1A_1 - B'^2_1) + (A_1A'_1 - B''^2_1)$$

est nul, et en supprimant le facteur $A''h^2 - 2h$ qui annule les trois binômes à la fois. Si M′ est le conjugué de M par rapport à la sphère de Monge, on a, en désignant par $h'_1$ et $h'_2$ les racines de

l'équation en $h$,

$$\frac{2}{MM'} = \frac{1}{h'_1} + \frac{1}{h'_2} = -\frac{2AA'}{A + A'} = -\frac{2}{MC + MC'},$$

donc

$$MM' + MC + MC' = 0 . \qquad \text{(II)}$$

Pour que le cône puisse être *circonscrit* à un trièdre trirectangle, il faut et il suffit que

$$A_1 + A'_1 + A''_1 = [(A + A')A'' - B^2 - B'^2]h^2 - 2(A + A')h - 1 = 0 .$$

Soit M″ le point conjugué de M par rapport à la quadrique, lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes sont tangentes à la quadrique (Q) ; on doit avoir, en désignant par $h''_1$ et $h''_2$ les racines de la dernière équation en $h$,

$$\frac{2}{MM''} = \frac{1}{h''_1} + \frac{1}{h''_2} = -2(A + A') = -2\left(\frac{1}{MC} + \frac{1}{MC'}\right).$$

ou

$$\frac{1}{MM''} + \frac{1}{MC} + \frac{1}{MC'} = 0 . \qquad \text{(III)}$$

Les relations (II) et (III) donnent respectivement la relation (I) ; l'une lorsque la quadrique s'aplatissant, un des rayons de courbure devient nul ; l'autre lorsque la quadrique devenant un cylindre, l'un des rayons de courbure devient infini.

Enfin, en rapprochant les relations (II) et (III) on obtient la suivante

$$MM' \times MM'' = MC \times MC'$$

que m'a fait remarquer M. Turrière.

Ch. Bioche (Paris).

# CHRONIQUE

## Commission internationale de l'enseignement mathématique.

*Congrès de Paris.* — La prochaine réunion de la Commission aura lieu à Paris, dans les premiers jours d'avril 1914. Comme pour les réunions précédentes, le Comité central mettra à l'étude une question concernant l'enseignement moyen et une question appartenant à l'enseignement supérieur. L'ordre du jour comprendra notamment :

A, *pour l'enseignement moyen :* les résultats obtenus dans l'introduction des premières notions de Calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des écoles moyennes. Conférences et discussion ;

B, *pour l'enseignement supérieur :* les mathématiques dans l'enseignement technique supérieur. Conférences et discussion.

**Allemagne.** — La Sous-commission allemande vient de publier deux nouveaux fascicules de ses *Abhandlungen*. L'un, le 5me et dernier fascicule du tome I, par J. Schröder, traite du développement actuel de l'enseignement mathématique dans les écoles supérieures de jeune filles en Allemagne et principalement de l'Allemagne du Nord. L'autre, 2me fascicule du tome IV, par K. Ott, concerne les mathématiques appliquées dans les écoles techniques moyennes allemandes.

Band I, Heft 5 — *Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands insbesondere Norddeutschlands*, von Prof. Dr. J. Schröder. Mit einem Schlusswort zu Band I von F. Klein. (XII et 183 p.)

Band IV, Heft 2. — *Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie*, von Dipl.-Ing. K. Ott. (VI et 158 p. ; 4 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.)

La Sous-commission vient en outre de faire paraître un nouveau fascicule de ses *Berichte u. Mitteilungen* (Heft VIII, 58 p.). Il contient un article de M. P. Stæckel sur P. Treutlein et le compte rendu du Congrès de Cambridge, par W. Lietzmann d'après le compte rendu détaillé publié par le Secrétaire-général de la Com-

mission. Un 9$^{me}$ fascicule, actuellement sous presse, traitera des collections de modèles destinés à l'enseignement secondaire supérieur, par H. DRESSLER.

Ces nouveaux mémoires se trouvent dans la *Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht*, année 1913, sous la rubrique « Berichte u. Mitteilungen, veranlasst durch die intern. math. Unterrichtskommission ».

## Le III$^{me}$ Congrès international d'Etudes historiques.

Le III$^{me}$ Congrès international d'Etudes historiques a eu lieu à Londres du 3 au 9 avril 1913. Comme dans les Congrès précédents une Section a été consacrée aux communications sur l'histoire de la médecine et des sciences physico-mathématiques ; voici les titres de celles qui peuvent intéresser nos lecteurs :

W. W. Rouse BALL : Newton's Principia Magic.

G. LORIA : Les gloires mathématiques de la Grande-Bretagne.

Silvanus THOMPSON : Origin and development of the compass card.

H. TURNER : Aristarchus of Samos.

Clifford ALBUTT : Palissy, Bacon and the revival of natural science.

Enfin M. N. BOUBNOV fit une communication à la Section d'Histoire du moyen âge, sur Guillaume de Malmesbury et la légende de Gerbert qui a rapport avec l'importante question de l'invention de nos chiffres.

## Académie royale des Sciences de Bologne. — Concours de 1914.

L'Académie royale des Sciences de Bologne met au concours le sujet suivant : Exposer la théorie des fonctions elliptiques dans son développement historique en tenant compte des différents points de vue sous lesquels cette théorie a été envisagée depuis la fin du XVIII$^{e}$ siècle.

« *Esporre, con metodo storico-critico, lo sviluppo organico della teoria delle funzioni ellittiche ed i vari punti di vista sotto ai quali questa teoria è stata considerata dalla fine del secolo XVIII fino ai nostri giorni. Indicare l'influenza che anno avuto, su altri rami dell' analisi, le vedute presentatesi successivamente nella nominata teoria.* »

Le prix est de 500 L. Les mémoires devront être rédigés en italien et être inédits. Les auteurs ne mettront point leur nom au mémoire, ils indiqueront seulement une devise qu'ils reproduiront sur un pli cacheté renfermant leur nom et leur adresse. Le

prix est indivisible. Les mémoires devront être adressés, avant le 31 décembre 1914, au Secrétaire de la Classe des Sciences physiques de l'Académie royale des Sciences de Bologne, via Zamboni 33.

### Académie royale de Belgique. — Concours de 1914.

La Classe des Sciences met au concours la question suivante : *Apporter une contribution à l'étude des propriétés des fonctions analytiques qui ne prennent pas certaines valeurs dans un domaine donné.* — Prix : 1000 fr. — Délai : 1er août 1914.

Pour les conditions du concours, voir le Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale.

### Prix Lobatschewsky.

La Société physico-mathématique de Kasan vient de décerner pour la sixième fois le Prix Lobatschewsky. Dans une séance tenue le 1er (14) décembre 1912, après une conférence de M. D. N. Seeliger, MM. Killing (Münster) et Mlodzejewski (Moscou) ont rapporté, le premier sur l'ouvrage de M. Coolidge, *The elements of non-euclidean Geometry*, le second sur le volume de M. F. Schur, *Grundlagen der Geometrie*. La Société a décidé d'attribuer le prix à M. Schur (Strasbourg) et d'accorder une mention honorable à M. Coolidge (Cambridge, E.-U.) ; elle a conféré en outre la Médaille d'or Lobatschewsky aux deux rapporteurs.

### Les travaux de la Section de Mathématiques et d'Astronomie de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences[1].

Congrès de Tunis, 22-27 mars 1913.

Le congrès de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences s'est tenu cette année à Tunis, du 22 au 27 mars. La section de Mathématiques, Astronomie, Géodésie, Mécanique, a élu comme président M. Mourgnot, ingénieur, chef du service topographique à Tunis, et comme secrétaire M. A. Gérardin, correspondant du Ministère de l'Instruction publique, à Nancy. Les communications, au nombre de 28, furent réparties sur trois séances.

[1] Ce compte rendu a été rédigé d'après des notes très complètes que nous devons à l'obligeance de M. A. Gérardin (Nancy). Faute de place nous devons nous limiter à un résumé très concis. Pour plus de détails, consulter le Compte rendu annuel de l'Association française, congrès de Tunis. — *(Réd.)*.

I. — M. A. Gérardin, de Nancy, présente une communication sur des *Tables de nombres premiers successifs de huit et neuf chiffres*. Voici le bref résumé de ce travail :

La question des nombres premiers attire les chercheurs depuis l'antiquité, et elle est toujours d'actualité. Notre nouveau procédé est aussi simple que les précédents, mais il n'opère pas par résidus quadratiques. On obtient par simple écriture la suite illimitée des nombres premiers successifs ayant au plus quatorze chiffres. C'est notre limite actuelle comme condition nécessaire et suffisante. Mais, théoriquement, on peut établir des tables plus longues encore, et l'on obtient en même temps, par simple lecture, au moins un facteur des nombres composés intermédiaires ; lorsque la condition nécessaire et suffisante est établie entre deux limites imposées, on a la décomposition *complète* de tous les nombres composés, et le procédé ne peut être entaché d'aucune erreur.

Les tables de nombres premiers successifs, à partir de l'unité, qui sont actuellement *imprimées*, ne vont que jusqu'à 10,017,000 ; ce sont celles de Lehmer. Les tables *manuscrites* de M. Ern. Lebon, offertes par l'auteur à l'Institut, permettent la recherche des nombres inférieurs à cent millions, mais il faut faire certains calculs pour chaque nombre, et le temps employé à établir une liste complète serait encore excessif, ce qui n'enlève d'ailleurs aucun mérite à ce fort beau travail.

Malgré les immenses calculs de nos devanciers, sans oublier Külik, nous pouvons dire que le nombre des nombres premiers connus ne dépasse pas 500,000, et c'est dans cette petite liste que l'on s'efforce de trouver des lois générales. Il faut remarquer que ces petits nombres doivent contenir beaucoup d'exceptions aux lois supposées, et c'est seulement lorsqu'on aura quelques millions de nombres premiers successifs, que l'on pourra faire des essais sérieux, sans être enlisé d'avance dans des calculs inextricables.

Nous présentons une méthode absolument simple et générale qui nous permet, pour nous limiter, de donner très rapidement la liste complète et définitive de *tous* les nombres premiers supérieurs à dix millions ; et si les mathématiciens intéressés à la question veulent bien souscrire à cette publication [1], je vais éditer successivement les nombres premiers de chaque million, à partir du onzième, jusqu'à une certaine limite à fixer ultérieurement.

J'ai montré à nos collègues le moyen d'obtenir, à simple lecture, des nombres premiers de huit chiffres, et par exemple les douze nouveaux nombres premiers compris entre 11,000,001 et 11,000,249 qui sont : 11,000,000 + $a$, avec $a$ égal à 27, 53, 57, 81, 83, 89, 111, 113, 149, 159, 179, 189 ; le temps employé à étudier ces douze nombres par les méthodes classiques peut être évalué à huit heures, tandis que la méthode actuelle donne la solution à simple lecture, une fois le travail préliminaire du million imposé établi sans grande peine, comme on va le voir.

Ceci nous donne, en passant, une liste minima de 61 nombres consécutifs composés à partir de 11,000,190.

Pour ne pas abuser de la patience du lecteur, nous dirons seulement quelques mots de la méthode employée. Pour établir des tables de nombres successifs premiers et composés, nous employons des bandes périodiques contenant une case initiale colorée, et le reste d'une teinte uniforme ; pour

[1] Envoyer adhésion à M. A. Gérardin, 32, quai Claude-le-Lorrain, Nancy.

étudier des nombres de formes spéciales, nous aurons des bandes périodiques avec $p$ cases colorées par période, et il nous suffira de connaître la place initiale de la première pour avoir tous les nombres du million considéré multiples du module étudié.

J'ai établi, pour les tables complètes inférieures à un milliard par exemple, une liste que j'appelle *table fondamentale du million*, et que je compte publier prochainement. Elle se compose simplement de $2p$ nombres, condition nécessaire et suffisante pour la limite considérée. La première colonne donne le module premier étudié ; la deuxième donnera la case colorée initiale.

Par exemple, cette table fournit 471 pour le module premier 34,499 ; pour trouver le plus petit nombre impair du cent vingtième million divisible par ce module, c'est-à-dire représentée par la case colorée de notre bande périodique, il suffit de multiplier 471 par 119, et le résultat cherché est 119,056,049.

J'ai présenté des exemples de tables pour des nombres des formes $x^4 + 1$, $x^4 - 2$, $x^4 - 8$, $100\,x + 1$, $22\,x + 1$, etc. ... , obtenues d'une façon semblable, très rapidement, et avec un nombre de bandes bien inférieur à la théorie classique.

J'étudie un modèle de machine automatique peu encombrant (ressorts, index, roues dentées) donnant la liste indéfinie des nombres premiers. Ce n'est plus qu'une simple question de mécanique et de frais d'établissement.

2. — Présentation par M. A. Gérardin, du *jeu mathématique* « *Je sais Tout* » dont l'auteur est inconnu. Ce jeu sert à deviner un nombre quelconque inférieur à 100.

3. — Présentation par M. A. Gérardin d'un *calendrier découvert par M. Harold Tarry*. Il se compose de deux tableaux de conversion des années chrétiennes en années musulmanes, et réciproquement.

4. — Notice de M. Ernest Lebon extraite de la collection « Savants du Jour ». Le président présente la Notice sur Armand Gautier, dont M. Ernest Lebon vient d'enrichir sa Collection bien connue des *Savants du Jour*.

5. — M. Mourgnot, président de la section, attire l'attention sur une communication de M. G. Darboux, Secrétaire perpétuel, qui a présenté à l'Académie des Sciences le 10 mars 1913 une « *Notice* » *sur la vie et l'œuvre de Henri Poincaré*.

Ce travail, dû à M. Ernest Lebon et inséré dans la 2e édition des *Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques*, est divisé en deux parties. La première, relative à la vie du grand disparu, est surtout un portrait intellectuel et moral. L'auteur y fait ressortir les idées et les sentiments qui ont imprimé à la vie de Henri Poincaré, vie « aussi simple que belle et noblement remplie », ce caractère si séduisant d'harmonie, de grandeur morale et de haute poésie. Dans la seconde partie, M. Ernest Lebon a eu pour but de montrer les progrès que Henri Poincaré fit faire à la Science, et aussi de faire sentir quelles qualités exceptionnelles il fallait que ce grand mathématicien possédât pour édifier l'œuvre difficile et puissante qui lui assure l'immortalité.

M. Gaston Darboux a terminé en faisant remarquer que cette Notice

devra être consultée par les personnes qui, dans l'avenir, se proposeront d'écrire une Etude sur Henri Poincaré.

6. — M. Ch. Halphen, de Paris, présente ensuite une intéressante note

*Sur un problème d'énumération.* — Etant donnés *n* points dans l'espace, on considère tous les plans déterminés par trois quelconques de ces points ; quel est le nombre de leurs droites d'intersection ?

J'ai déjà résolu ce petit problème ; j'y reviens par une autre méthode qui m'a été suggérée par M. Andoyer, la méthode de récurrence. On trouve très aisément le résultat principal, à savoir que le nombre des droites d'intersection des plans deux à deux, ne passant par aucun des points donnés, est $10C_n^6$.

La recherche du nombre des points communs à ces plans trois à trois, question un peu moins facile que je m'étais également posée, paraît au contraire moins simple en appliquant la méthode de récurrence.

7. — M. G. Tarry, du Havre, envoie un intéressant travail sur les *égalités à* n *degrés*.

8. — M. Mourgnot, président de la Section, parle ensuite de l'organisation des *travaux cadastraux en Tunisie*.

9. — M. Cuénod, élève au lycée de Tunis, présente une note sur un *moyen pratique pour trouver rapidement le jour de la semaine correspondant à une date donnée,* grâce à une combinaison nouvelle des calendriers de Moret et d'Inaudi.

10. — M. Durel, de Tunis, adresse des théorèmes sur quelques *propriétés nouvelles du quadrilatère inscriptible* et M. Balitrand m'a remis presque immédiatement les démonstrations complètes.

11. — M. Em. Belot envoie une *critique de l'hypothèse de G. Darwin sur l'origine de la Lune.*

G. Darwin a cru pouvoir en s'appuyant sur l'hypothèse très hasardée de l'action prépondérante des marées internes, soumettre à l'analyse la question de savoir comment la Lune aurait pu être produite par une excroissance de la Terre éjectée par elle.

Des astronomes américains Stockwele, Moulton, T. Sée, ont déjà soulevé de graves objections contre cette théorie ; on peut en présenter d'autres tirées de la comparaison de la Terre avec ses voisines Mars et Vénus. La cosmogonie tourbillonnaire, en expliquant dans le détail le mode de formation de la Lune, réfute complètement la théorie de Darwin qui a omis de considérer le cas où primitivement la Terre aurait eu plusieurs satellites dont les actions de marées se seraient en grande partie détruites mutuellement.

12. — M. E. N. Barisien envoie un *nouveau critérium pour reconnaître si un nombre est premier.*

13 et 14. — Le même auteur adresse deux autres intéressantes communications : a) *sur deux ellipses dérivées du cercle de Joachimsthal.* — b) *Extension du limaçon de Pascal.*

15. — M. R. Risser, chef du service de l'actuariat au Ministère du Travail, envoie une *Application de l'équation de Volterra à divers problèmes d'assurance sur la vie.* Le problème des tables par âge à l'entrée, qui attire depuis un certain nombre d'années l'attention des actuaires, peut être traité analytiquement, car il se rattache directement à la résolution de l'équation de première espèce de Volterra ; il en est de même du problème des tables par âges à l'entrée dans l'assurance invalidité.

16. — M. Gardès présente une note relative aux calculs nécessaires pour trouver la concordance des dates du calendrier julien ou grégorien avec celles du calendrier musulman.

17 et 18. — M. Balitrand, de Tunis, expose deux intéressantes Notes sur la *construction du centre de courbure de l'ellipse et de la développée de l'ellipse,* et sur *un théorème sur la développée de l'ellipse.*

19. — M. le C^dt^ Litre, de Toulouse, envoie une communication sur le *Pendule de Foucault, les amplitudes.*

20. — M. J. Richard, de Châteauroux, envoie une note sur l'*enseignement des mathématiques.*

Pour bien enseigner une branche quelconque des connaissances humaines, il faut d'abord faire voir clairement aux élèves le but à atteindre. D'autre part, il y a dans toute branche de l'activité humaine une sorte de mécanisme à saisir, *une technique.* Tant que l'élève n'a pas saisi ce mécanisme, il apprend d'une façon passive, à l'aide de la seule mémoire.

Pour l'enseignement des mathématiques, en particulier, on examine d'abord quel est le but, ou mieux quels sont les buts à atteindre, en donnant plusieurs exemples. On montre d'autre part la technique, c'est-à-dire le mécanisme dans ses diverses branches des mathématiques. On insiste surtout sur la géométrie.

Le mémoire se termine par les moyens de rendre l'enseignement attrayant.

21. — M. Kesselmeyer, de Bowdon, Angleterre, envoie un mémoire *sur un système de mesure* unissant le temps et l'espace.

22. — M. Risser adresse une nouvelle communication intitulée: *Etablissement d'une table provisoire de mortalité* des ouvriers mineurs dans les mines de combustibles minéraux et dans les autres mines.

23. — M. A. Aubry, de Dijon, le toujours dévoué chercheur, que nous sommes heureux de remercier ici de sa communication si intéressante, avait envoyé une notice sur l'arithméticien Frenicle.

« Persuadé que l'avenir d'une science est intéressé à un haut degré par la connaissance de sa philosophie et de son histoire, il m'a paru que ce serait faire œuvre utile de donner un aperçu, sinon des origines de la théorie moderne des nombres, tout au moins des travaux d'un de ses promoteurs les plus directs : je veux parler de Frenicle.

« On pourrait taxer cette entreprise de témérité, s'il s'agissait d'autre chose que d'une analyse des quelques travaux laissés par ce trop peu connu

arithméticien, accompagnée des rapprochements avec ceux de Fermat que suggère la lecture de la correspondance de ces deux savants. Aussi mes commentaires sont-ils assez sobres et plutôt des explications.

« Il était cependant tentant d'essayer de combler quelques-unes des nombreuses lacunes des documents venus jusqu'à nous ; je n'ai peut-être pas résisté à cette tentation au degré qu'il eût fallu : le lecteur jugera si les quelques conjectures que je me suis permises sont justifiées. »

24. — M. Farid Boulad, du Caire, envoie une communication sur la Nomographie.

25, 26 et 27. — M. Welsch adresse à nouveau trois mémoires qui n'ont pu trouver place dans les comptes rendus de l'an dernier.

28. — M. Montangerand, de Toulouse, adresse de même un intéressant travail d'astronomie.

Signalons en outre l'étude présentée à une autre section par M. Jules Henriet, ingénieur à Marseille, sur *un projet de transformation du calendrier usuel en un calendrier rationnel, perpétuel et universel.*

Le prochain congrès se tiendra au *Havre*, en août 1914 : le président de la section sera M. Rebière, professeur agrégé au Lycée, et le secrétaire, M. A. Gérardin, de Nancy.

## Société mathématique suisse ; réunion de Neuchâtel.

La Société mathématique suisse a tenu sa réunion d'hiver à Neuchâtel, le dimanche 9 mars 1913, sous la présidence de M. Fehr, professeur à l'Université de Genève. La séance a eu lieu à l'Auditoire de Physique de l'Université.

M. Ch. Jaccottet (Lausanne) a fait une conférence très documentée *sur l'existence des potentiels et de leurs dérivées*, en examinant la question dans son développement historique. La théorie des potentiels peut être subdivisée en deux parties se rattachant, l'une à la théorie des intégrales définies, l'autre à la théorie des équations partielles. Le conférencier s'est placé au premier point de vue. Il a passé en revue les principaux problèmes qui se présentent dans cette théorie et a donné un aperçu de l'état actuel de leur solution. L'*Enseignement mathématique* publiera cette conférence dans l'un de ses prochains numéros.

La Société a ensuite consacré un premier débat à l'*enseignement mathématique dans les universités suisses* d'après les propositions de la Sous-commission suisse de l'enseignement mathématique. La question a été introduite par M. Fehr, rapporteur. La Sous-commission suisse estime qu'il est désirable que l'enseignement mathématique à l'université soit développé de manière à ce qu'il réponde aux besoins modernes de la science et de l'enseignement. Il doit non seulement initier les étudiants à l'état actuel des ma-

thématiques pures et appliquées, mais il doit aussi, mieux que par le passé, contribuer à la préparation scientifique et méthodique des professeurs de l'enseignement moyen. En outre, l'université doit aussi fournir un cours de mathématiques générales destiné à cette catégorie toujours plus nombreuse d'étudiants ayant besoin du minimum de connaissances des éléments de mathématiques supérieures en vue de l'étude de la chimie et des sciences naturelles. Mais ce triple but ne peut être atteint qu'en augmentant le nombre des cours et par suite le nombre des professeurs, et en créant des séminaires qui soient organisés les uns, en vue du travail purement scientifique, les autres en vue de l'examen méthodique et pédagogique des différentes branches des mathématiques.

Faute de temps la Société a dû se limiter à une première discussion sur l'ensemble des propositions en se réservant de revenir sur certains points dans une réunion ultérieure. Par un vote pris à l'unanimité elle a exprimé sa reconnaissance à la Sous-commission suisse pour l'ensemble de ses travaux sur l'enseignement mathématique en Suisse et pour ses efforts en vue de compléter l'organisation des études mathématiques dans les universités.

Dans le courant de l'après-midi les mathématiciens ont visité l'Observatoire cantonal sous la direction de M. Arndt, directeur. A la suite du legs important fait par l'ancien directeur M. Hirsch, décédé en 1901, l'Observatoire de Neuchâtel est doté des installations les plus modernes.

## Université d'Edimbourg. — Laboratoire mathématique.

Le Conseil de l'Université d'Edimbourg a décidé de créer un laboratoire destiné à la fois aux travaux pratiques concernant les calculs numériques, graphiques et mécaniques qui interviennent dans les mathématiques appliquées et aux travaux de recherches en corrélation avec la section mathématique.

Ce laboratoire s'ouvrira en octobre de l'année courante (1913) sous la direction du professeur E. T. Whittaker et des « lecturers » de la section mathématique. Le plan ci-dessous permet de se rendre compte de la nature de cet enseignement.

*Course of Practical Work in the Mathematical Laboratory.*

Differences and interpolation : computations with tables of logarithms, log sines, natural sines, products, quarter-squares, etc. : numerical solution of trigonometric problems.

Controls for checking accuracy of computations : design of computing-forms.

Method of least squares : numerical solutions of systems of linear equations : numerical evaluation of determinants.

Curve-fitting. Calculation of correlation-coefficients.

Analysis of a function into sine and cosine terms (practical Fourier analysis).

Analysis for the discovery of periodic constituents in a function (periodogram analysis). Practical spherical harmonic analysis. Other methods of analysis of functions empirically given.

Construction of curves and surfaces: linkages: roulettes. Projections: photogrammetry: map-making. Graphic solution of numerical equations: graphic and mechanical solution of problems in spherical trigonometry: nomography. Applications of triangle of vectors.

Use of instruments employed in calculation, especially slide rules, arithmometers, planimeters, integraphs, and harmonic analysers.

Numerical evaluation of definite integrals.

Numerical solution of differential equations.

Numerical evaluation of roots, etc., of transcendental functions.

Calculations[1] performed with elliptic functions: arcs on spheroids, etc.

Formation[1] and use of tables of Legendre's and Bessel's functions, the Gamma function, Error-function, and other transcendental functions.

Construction[1] of tables of new functions, and functions not previously tabulated, including automorphic functions, and the parabolic-cylinder and elliptic-cylinder functions.

Il sera accordé toutes facilités pour les recherches originales dans cet ordre d'idées. A ce sujet on peut attirer l'attention sur les tables de E. Sang, déposées à Edimbourg et comprenant 47 volumes.

Les personnes (autres que les étudiants actuels d'Edimbourg) désirant suivre ce laboratoire ou faire des recherches originales s'y rapportant sont priées de s'annoncer, le plus tôt possible, au Prof. Whittaker, 35 George Square, Edimbourg.

Un enseignement pratique, tel que celui qui est projeté à Edimbourg, est appelé à jouer un rôle utile dans l'enseignement supérieur, à l'Université comme dans les Ecoles polytechniques. Il répond à un véritable besoin, comme cela ressort de l'intéressante discussion qui a eu lieu à Cambridge dans l'une des séances organisées par la Commission internationale de l'enseignement mathématique[2]. L'enseignement supérieur doit tenir compte, plus qu'il ne l'a fait par le passé, des besoins des mathématiques appliquées; il doit fournir aux étudiants l'occasion de s'initier aux méthodes pratiques de la science du calcul, par les procédés numériques, graphiques ou mécaniques.

A côté de leur utilité pratique les laboratoires de mathématiques permettront en même temps de maintenir le contact entre les mathématiques pures et les sciences appliquées.

H. F.

---

[1] Sufficient theoretical explanation will be given to render this part of the course intelligible to those who have not previously studied the functions of higher analysis.

[2] Séance du 26 août 1912. — Voir la conférence de M. C. Runge, professeur de mathématiques appliquées à l'Université de Gœttingue, *The mathematical Training of the Physicist in the University;* discussion. — *L'Ens. math.* du 15 nov. 1912, pp. 495-507.

## L'Enseignement des Mathématiques dans les Lycées modernes en Italie.

On vient d'instituer en Italie, à côté de l'école classique (latin-grec) un *lycée moderne* (latin-langues modernes) où l'enseignement scientifique est plus développé. Monsieur le Ministre de l'Instruction a chargé M. Castelnuovo, président de la Société Mathésis, de rédiger, d'accord avec le bureau du Ministère, les programmes des mathématiques pour les deux dernières classes de ce lycée qui sont fréquentées par des élèves âgés de 16-18 ans. Dans la rédaction de ces programmes M. Castelnuovo a dû tenir compte naturellement des traditions de l'enseignement italien, conformes aux Eléments d'Euclide, et des tendances de la plupart des professeurs favorables à la méthode exclusivement déductive.

C'est donc avec prudence qu'il a introduit dans ces programmes les idées modernes de l'enseignement mathématique moyen, en attendant que l'expérience laisse voir l'opportunité de faire une part plus large à ces idées. Les programmes proposés par M. Castelnuovo représentent cependant une innovation vis-à-vis des programmes adoptés jusqu'ici en Italie. C'est pourquoi nous pensons qu'il convient d'en donner un aperçu à nos lecteurs [1].

Le programme de l'avant-dernière classe du lycée (4 h. de math., élèves de 16-17 ans) commence par la mesure approchée des grandeurs; la comparaison entre ces mesures et les mesures théoriques conduisent à la question des incommensurables et des nombres irrationnels. On introduit ensuite les notions des coordonnées cartésiennes, de représentation graphique et de fonction; celle-ci déduite d'abord des sciences d'observation est précisée plus tard par l'expression mathématique dans les cas les plus simples. Les notions de limite et de dérivée, avec leurs principales interprétations mathématiques et physiques, sont placées à la fin du programme de ce cours.

Le programme de la dernière classe du lycée (3 h. de math.) comprend la théorie des logarithmes, la trigonométrie plane avec ses applications élémentaires, la mesure approchée des surfaces planes par la division en petits carrés ou rectangles, à laquelle se rattache la notion d'intégrale définie, et l'évaluation des surfaces et des volumes des solides les plus simples.

Les programmes sont suivis de *considérations générales*, dont nous extrayons ici quelques passages :

« Les exigences de la vie moderne et une vision plus large de la science dans son ensemble obligent à resserrer les liens qui unis-

[1] On trouvera les programmes dans le *Bollettino della Mathesis* de décembre 1912.

sent les mathématiques aux sciences expérimentales et d'observation. Il faut qu'au sortir du lycée l'élève soit persuadé qu'entre ces sciences et les mathématiques il existe un lien intime, que l'expérience et le raisonnement sont tous deux nécessaires, bien que pas toujours dans la même mesure, à l'enrichissement de n'importe quel domaine de la science. Il faut qu'il sache que les différentes sciences se sont toujours prêtées un secours réciproque et que la renaissance des mathématiques au XVII$^{me}$ siècle est liée à l'essor des sciences expérimentales.

« Le maître saisira les occasions offertes par notre programme pour faire remarquer aux élèves que quelques conceptions fondamentales des mathématiques modernes (celle de *fonction* en particulier) suggérées par les sciences d'observation, puis précisées par le mathématicien, ont à leur tour rendu des services à ces sciences expérimentales.

« Le maître devra éviter deux dangers : celui de tomber dans un empirisme grossier, et celui de satisfaire les caprices d'un sens critique exagéré. La méthode empirique laissant ignorer les liens qui unissent les faits observés et les théories qui s'y rapportent, enlèverait aux mathématiques leur valeur éducative et diminuerait l'attrait qu'elles doivent exercer sur les élèves chez lesquels les facultés logiques prédominent. Un enseignement où s'introduiraient toutes les subtilités de la critique moderne ne serait accessible qu'à fort peu d'élèves et leur donnerait une idée unilatérale de la science.

« La *juste mesure* voilà la qualité qu'il faut avant tout recommander, dans l'application de ce programme, aux maîtres qui en seront chargés. Ils devront s'assurer constamment par des interrogations et des exercices en classe et à la maison, qu'ils sont suivis par la majorité des élèves, et adapter leur enseignement à l'intelligence moyenne de la classe. »

## Une nouvelle revue : « Isis ».

Sous le titre *Isis, revue consacrée à l'histoire de la science*, M. George Sarton, à Wondelgem-lez-Gand, publiera une revue dans laquelle il se propose de réunir et de soumettre à la critique les études relatives à l'histoire de la science. Il s'agit d'une revue de synthèse historique, mais ce sera aussi une revue critique. Il n'est pas besoin d'ajouter que cette publication présente un caractère tout à fait international, et à ce titre nous lui souhaitons la bienvenue au nombre des périodiques consacrés à la philosophie et à l'histoire des sciences.

M. Sarton espère que ce nouveau journal rendra possible l'élaboration d'un manuel d'histoire de la science vraiment complet

et synthétique et favorisera la création de manuels scientifiques, où les matières seraient exposées, autant que possible, dans l'ordre historique. Au point de vue philosophique, c'est l'effort tendant à refaire l'œuvre de Comte sur des bases scientifiques et historiques plus profondes et plus solides.

La tâche entreprise par la revue « Isis » est très grande et elle est de nature à intéresser les savants et les philosophes. Il faut espérer que M. Sarton trouvera le concours de bonnes volontés pour une collaboration active.

Le premier numéro contient les articles suivants : George Sarton : L'histoire de la science. — Ic. Guareschi (Torino) : Nota sulla storia del movimento browniano. — G. Milhaud (Paris) : Note sur les origines de la science. — Em. Radl (Prag) : Paracelsus. Eine Skizze seines Lebens. — Puis viennent des notes de chronique, des analyses bibliographiques et une bibliographie analytique des publications relatives à l'histoire de la science.

H. F.

## Tricentenaire des logarithmes.

J. Bürgi et J. Neper.

Chacun sait que le calcul logarithmique a été inventé, à peu près en même temps, par deux voies différentes, il y a trois siècles, par le mathématicien suisse Joost Bürgi et le géomètre écossais Jean Neper.

Né en 1550 à Merchiston, près d'Edimbourg, Jean Neper (ou mieux Napier), décéda dans cette ville en 1617. Il publia ses tables en 1614, chez Hart, à Edimbourg, sous le titre *Descriptio mirifico logarithmorum canonis* (86 p. de texte et 90 p. de tables). La Société royale d'Edimbourg se propose précisément de célébrer, l'an prochain, le tricentenaire de la publication des premières tables de logarithmes. Nous ne doutons pas qu'à cette occasion elle ne rende également hommage à la mémoire de Burgi.

D'origine suisse Joost Bürgi était né à Lichtensteig, St-Gall (Suisse) et mourut à Prague en 1632 (ou 1633). Il resta d'abord comme astronome et mathématicien au service du Landgrave de Hesse à Cassel, puis il passa une partie de sa vie à Prague où il entra en relation suivie avec Képler. Calculateur habile, il avait imaginé un système de tables et, selon le témoignage de Képler et de Bramer, s'en était servi longtemps avant l'apparition des tables de Neper. La base de ses logarithmes est $e$, tandis que celle de Neper est $1 : e$. Ce ne fut qu'en 1620 que Bürgi publia ses tables à Prague sous le nom de *Progress Tabulen*.

Nous empruntons ces Notes à l'ouvrage magistral de M. Cantor,

*Geschichte der Mathematik* (t. II, ch. 74 : Rechnen. Logarithmen) auquel nous renvoyons le lecteur pour plus de développements[1].

H. F.

## Bibliothèque mathématique internationale.

A l'occasion du Congrès international des Mathématiciens, tenu à Cambridge en août 1912, un certain nombre de mathématiciens appartenant aux principaux pays, ont examiné la création d'une bibliothèque mathématique internationale. Ils se proposent d'élaborer un projet complet qui sera soumis au prochain Congrès (1916). L'organisation projetée comprendrait, non pas une bibliothèque isolée, mais un grand nombre de groupements de livres et de manuscrits sur divers points du globe, dans tous les pays où sont cultivées les Sciences mathématiques. Les correspondances qui s'établiraient entre les sections de la bibliothèque internationale permettraient de faire profiter des avantages de cette institution les mathématiciens de tous les pays.

Il est certain qu'une organisation de ce genre rendrait de grands services, notamment à tous ceux qui sont éloignés des grands centres. Les mathématiciens qui sont disposés à appuyer ce projet sont priés de se mettre en relation avec M. A. Gérardix, quai Claude Le Lorrain, Nancy.

## P. H. Schoute.

La Hollande vient de perdre l'un de ses meilleurs géomètres, M. P. H. Schoute, professeur à l'Université de Groningue. Né à Wormerveer le 21 janvier 1846, Pieter Hendrik Schoute est décédé à Groningue le 18 avril 1913. Après avoir suivi les cours de l'Ecole polytechnique de Delft où il prit le diplôme d'ingénieur, et de l'Université de Leyde, où il obtint le grade de docteur ès sciences mathématiques, il débuta dans l'enseignement, en 1871, en qualité de professeur à l'Ecole réale supérieure d'abord à Nijmegen, puis à La Haye. Depuis 1881 il enseigna les mathématiques à l'Université de Groningue. Ses travaux se rattachent plus particulièrement au domaine de la géométrie synthétique. On lui doit un important traité de Géométrie à $n$ dimensions[2].

Schoute laissera un vide sensible non seulement en Hollande, mais dans le monde des mathématiques de tous les pays. Depuis quinze ans il faisait partie du Comité de Patronage de l'*Ensei-*

[1] Voir aussi Joh. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung*, B. II, 1903.
[2] Mehrdimensionale Geometrie, 2 volumes, J. G. Gœschen, Leipzig, 1902-05.

*gnement mathématique;* il était membre de la *Commission permanente internationale du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques,* et l'un des rédacteurs de la *Revue semestrielle des publications mathématiques,* ainsi que du *Nieuw Archief voor Wiskunde.*

H. FEHR.

## Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

**Allemagne.** — M. F. HAUSDORFF, professeur à l'Université de Bonn, a été nommé professeur de Mathématiques à l'Université de Greifswald. Il sera remplacé à Bonn par M. I. SCHUR (Berlin).

M. H. JUNG, de Hambourg, a été nommé professeur de Mathématiques à l'Université de Kiel.

M. MOHRMANN (Carlsruhe) est nommé professeur à l'Ecole supérieure des mines de Clausthal.

*Privat-docent.* — M. E. JACOBSTHAL a été admis en qualité de privat-docent de Mathématiques à l'Ecole technique supérieure de Berlin.

**Autriche.** — M. H. TIETZE, professeur extraordinaire à l'Ecole polytechnique de Brünn est nommé professeur ordinaire.

M. W. BLASCHKE, privat-docent à l'Université de Greifswald, est nommé professeur extraordinaire à l'Ecole polytechnique allemande de Prague.

*Privat-docent.* — M. A. ROSENBLATT a été admis en qualité de privat-docent de Mathématiques à l'Université de Cracovie.

**France.** — *Académie des Sciences.* — Le prix biennal *Petit d'Ormoy* (10,000 fr.) est décerné à M. Claude GUICHARD, Professeur de Mathématiques générales à la Faculté des Sciences de Paris.

M. BOULVIN, professeur de construction de machines à la Faculté des Sciences de Gand, est élu membre correspondant dans la section de mécanique, en remplacement de AMSLER.

*Faculté des Sciences de Paris.* — M. le Professeur MITTAG-LEFFLER, de l'Université de Stockholm, a commencé le 22 avril une série de conférences intitulée : Exposé des principes de la théorie des fonctions analytiques suivant les idées de Weierstrass.

— M. E. PICARD, membre de l'Institut, a été élu membre correspondant de l'Académie de Hongrie à Budapest.

— M. H.-A. DESLANDRES a obtenu la médaille d'or de la Société royale d'Astronomie de Londres.

**Italie.** — M. U. CISOTTI, privat-docent de Mécanique rationnelle à l'Université de Padoue, a été nommé professeur extraordinaire de Physique mathématique à l'Université de Pavie.

---

# NOTES ET DOCUMENTS

## Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

*Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.*

(12e article)

## ALLEMAGNE

### Enseignement commercial.

*Rechnen und Mathematik im Unterricht der kaufmännischen Lehranstalten,*[1] von Dr B. Penndorf. — Les mathématiques telles qu'elles sont actuellement données dans l'enseignement commercial allemand forment l'objet de sept chapitres d'inégale importance. Après avoir montré, dans le 1er chapitre, le but de l'enseignement des mathématiques, l'auteur passe rapidement en revue les subdivisions de l'enseignement commercial. De ces subdivisions dépendent, tout naturellement, les autres chapitres de l'ouvrage à l'exception des trois derniers qui sont consacrés : le premier, à l'enseignement commercial destiné au sexe féminin ; le deuxième, aux écoles privées et, le troisième, aux manuels d'enseignement et à la littérature relative au commerce.

Le reste de l'ouvrage traite spécialement de l'enseignement commercial mis à la disposition du sexe masculin. Pour acquérir des connaissances théoriques en matière de commerce, le futur négociant allemand a à sa disposition :

1° les écoles complémentaires (die kaufmännischen Lehrlingsschulen) caractérisées par le fait qu'elles enseignent la théorie pendant la durée de l'apprentissage ;

2° les écoles donnant la culture générale et spéciale avant l'apprentissage (die kaufmännichen Vorbereitungsschulen).

Ces dernières se subdivisent, à leur tour, en écoles préparatoires (Handelsvorschulen) ; en cours supérieurs de commerce (Höhere Handelskurse) ; en écoles réales de commerce (Handelsrealschulen) ; en écoles de hautes études commerciales ou universités commerciales (Handelshochschulen).

Pour chacune de ces subdivisions, M. Penndorf donne, tout d'abord, un

---

[1] 1 vol. in-8° de 100 pages, Abhandl. über den mathem. Unterricht in Deutschland. B. IV. Heft. 6 ; 3 Mk. : B. G. Teubner, Leipzig.

rapide aperçu historique ; puis, au moyen de tableaux et de statistiques, il met en évidence les rapports qui existent soit entre les diverses branches appartenant aux mathématiques elles-mêmes, soit entre le groupe des mathématiques et les autres groupes de l'enseignement commercial ; enfin, il fait une mention détaillée du programme enseigné dans chaque catégorie d'écoles.

Il faut féliciter M. Penndorf d'avoir complété ce programme par le texte des épreuves exigées des élèves à leur entrée et à leur sortie de l'école ; à elles seules ces épreuves indiquent à peu près le résultat de l'enseignement des mathématiques. Pour les écoles complémentaires les épreuves de sortie ne sont pas données ; il faut le regretter car elles auraient permis d'utiles comparaisons entre pays ayant institué les cours complémentaires.

Les 26 Etats composant l'empire allemand, les différentes législations en usage dans ces Etats, la manière de comprendre l'enseignement commercial sont des facteurs qui ne permettent pas de caractériser, en quelques lignes, l'enseignement des mathématiques. Comme dans d'autres pays, en Suisse en particulier, les programmes les plus homogènes appartiennent aux écoles complémentaires ; ceux des écoles secondaires de commerce le sont déjà moins et enfin dans les écoles de hautes études commerciales on en est à la période des essais et des transformations. La logique des choses le veut ainsi, d'ailleurs.

La lecture de ce fascicule fait ressortir l'importance et la valeur de l'enseignement commercial en Allemagne ; elle permet aussi d'apprécier grandement le travail clair et concis de M. Penndorf.

L. Morf (Lausanne).

# ILES BRITANNIQUES

## N° 19. — L'enseignement moyen en Ecosse.

*Mathematics in Scotch Schools,*[1] by George A. Gibson. — En Ecosse on distingue :

L'Ecole primaire *(Primary School)*, fournissant une éducation entièrement basée sur l'étude de l'anglais. Les élèves ont généralement moins de 14 ans.

L'Ecole intermédiaire *(Intermediate School)*, comprenant au moins trois ans d'études (langues, mathématiques, sciences).

L'Ecole secondaire *(Secondary School)*, où les élèves reçoivent une instruction plus avancée pendant une période d'au moins cinq ans.

La « Primary School » comprend 3 divisions : *a)* l' « Infant Division » (enfants au-dessous de 7 ans), *b)* la « Junior Division » (enfants de 7 à 10 ans), *c)* la « Senior Division » (enfants de 10 à 12 ans). A la fin de cette troisième période, les élèves ont atteint le « Qualifying Stage » (degré de capacité). A partir de cette époque, les programmes divergent et les élèves ont choix entre le « Supplementary Course », l' « Intermediate Course » et le « Secondary Course ». Les « Supplementary Courses » sont destinés aux élèves qui quittent l'école à l'âge de 14 ans et forment les degrés supérieurs

[1] 1 fasc. de 49 p.; 3 d.; Wymann and Sons, Londres.

de l'Ecole primaire. Les « Intermediate et Secondary Courses » se font aux « Intermediate et Secondary Schools ».

Les examens les plus importants sont ceux qui conduisent au « Leaving Certificate » délivré par le « Scotch Education Department » ; le rapport en expose les règlements.

L'auteur examine l'enseignement mathématique dans ces trois groupes d'établissements. Nous nous bornerons ici aux *écoles secondaires.*

Les plans d'études de la « Secondary School » tiennent compte des « Intermediate and Leaving Certificates » délivrés par le « Scotch Education Department ». L' « Intermediate Certificate » est un diplôme attestant la bonne éducation générale des élèves quittant l'école à 15 ou 16 ans ou leur permettant l'admission aux « Post-intermediate Courses », d'un genre plus spécialisé, qu'ils suivent jusqu'à l'âge de 17 ou 18 ans et qui conduisent au « Leaving Certificate ».

Il en résulte qu'à la « Secondary School », les mathématiques, la science expérimentale et le dessin sont enseignés, durant les 3 premières années, comme faisant partie de l'éducation générale. Pendant les 2 années suivantes, l'un des deux sujets, mathématiques ou science expérimentale, doit constituer l'une des branches principales et l'on voit fréquemment figurer ces deux branches au programme de l'élève.

On trouvera dans le rapport le règlement des examens pour l'obtention du « Leaving Certificate », règlement qui sert de base à l'enseignement mathématique des « Secondary Schools ». Il existe 2 degrés d'examens, le degré inférieur (arithmétique, algèbre, géométrie) et le degré supérieur (algèbre, géométrie, trigonométrie). Les candidats peuvent aussi, dans certaines conditions, passer des examens sur des sujets spéciaux (éléments de dynamique, les sections coniques au point de vue géométrique, géométrie analytique, dynamique plus avancée). Citons enfin les examens sur la tenue de livre et l'arithmétique commerciale.

A titre d'exemples, l'auteur nous décrit ensuite trois types d'écoles fournissant l'enseignement secondaire, une « Public Higher Grade School » (5 ans d'études), une « Secondary School » préparant les élèves au « Leaving Certificate » (7 ans d'études), et une « Science School » (6 années), dont l'enseignement est du type commercial, industriel et professionnel.

Les élèves qui désirent poursuivre leurs études à l'université doivent passer un « Preliminary Examination ». Les connaissances exigées, en ce qui concerne les mathématiques, dépendent de la faculté dans laquelle l'élève se propose d'entrer. La possession du « Leaving Certificate » degré supérieur dispense de ce « Preliminary Examination. »

Signalons encore les examens pour l'obtention de bourses universitaires. Dans la plupart des cas, les mathématiques ne forment qu'un des sujets d'examen ; pour certaines bourses, cependant, les élèves ne sont examinés que sur cette branche.

En terminant, l'auteur insiste sur l'importance qu'ont prise les mathématiques comme élément d'éducation générale.

On trouvera en appendice les questions proposées à divers examens en 1911 (« Leaving Certificate, Preliminary Examination, Bursary Examination »).

## N° 20. — Le calcul différentiel et intégral dans l'enseignement moyen.

*The Calculus as a School Subject,*[1] by Mr. C. S. Jackson, Instructor in Mathematics at the Royal Military Academy Woolwich. — En Angleterre, les élèves qui étudient le calcul infinitésimal peuvent être répartis en 3 catégories : A. Ceux qui continuent plus tard les mathématiques à l'université (17 à 19 ans). — B. Les élèves de 12 à 14 ans qui n'abordent que les éléments du sujet. — C. Enfin les élèves de 16 à 18 ans qui font leurs classes de mathématiques et pour qui le calcul infinitésimal constitue une branche ordinaire.

Le rapport concerne plus spécialement cette dernière catégorie et ne parle que très brièvement des deux premières.

A. Relativement à cette catégorie on peut signaler les réformes suivantes accomplies durant ces dernières années : 1. On attache plus d'importance à la rigueur des démonstrations. 2. On s'arrête moins longtemps sur les courbes planes de degré supérieur et l'on introduit quelques applications plus directes à la mécanique. 3. L'étude plus avancée du calcul différentiel est remplacée par les procédés plus simples du calcul intégral et de ses applications. 4. Pour ne pas rester dans les généralités théoriques, on exige des applications numériques.

B. On sait qu'à diverses occasions le professeur Perry a vivement recommandé l'introduction du calcul infinitésimal dans les plans d'études de tout jeunes élèves (12 à 14 ans). Un mouvement semble s'opérer dans cette direction, cependant, jusqu'à présent, les tentatives faites d'aborder ce sujet avant l'âge de 16 ans ont été assez rares. Suivant l'opinion de la majorité des maîtres et d'après les expériences faites à cet égard, un élève ordinaire ne paraît pas capable de saisir la portée du calcul infinitésimal avant l'âge de 15 ans.

C. De nombreuses tentatives ont été faites d'introduire le calcul infinitésimal comme branche ordinaire dans les classes supérieures des écoles. On peut signaler diverses raisons motivant cette introduction. Tout d'abord l'importance du sujet au point de vue de l'histoire de la pensée humaine et la beauté de ses principes. Puis son utilité dans divers domaines (biologie, psychologie expérimentale, statistique, physique, chimie, électricité, botanique, art militaire). Enfin il sera possible d'épargner un temps considérable dans l'étude des autres branches de mathématiques du programme scolaire. Ainsi, l'étude du calcul infinitésimal nécessite de nombreuses applications algébriques et trigonométriques, on pourra donc alléger quelque peu le travail préliminaire d'algèbre. En géométrie analytique, on pourra établir l'équation de la tangente aux coniques par une seule méthode générale, sans passer par tous les cas particuliers comme on est obligé de le faire lorsqu'on utilise les méthodes algébriques. En mécanique, les notions de vitesse et d'accélération ne peuvent être présentées d'une façon claire qu'en faisant appel à la méthode infinitésimale.

Diverses questions surgissent relativement à l'introduction du calcul différentiel et intégral à l'école : Comment faut-il disposer du programme scolaire pour constituer une préparation suffisante en ce qui concerne ce

[1] 18 p.; Price $1\frac{1}{2}$ d.; Wymann & Sons, Londres.

calcul ? Quelles parties du plan d'étude traditionnel peut-on supprimer sans inconvénient ? Quels sont les sujets dont l'étude doit se faire avant celle du calcul infinitésimal et quels sont ceux qu'il est préférable de traiter après ? Ces questions sont très discutées actuellement et les avis sont assez partagés. L'auteur signale également un certain nombre de points touchant à l'enseignement même du calcul infinitésimal et relativement auxquels diverses opinions ont été émises (la rigueur des démonstrations, les logarithmes népériens, les représentations graphiques et la question des notations).

En résumé, l'enseignement du calcul différentiel et intégral à des élèves de 16 à 18 ans s'est fait jusqu'à présent à titre d'essai. L'introduction de cette étude, en y comprenant de nombreuses applications simples, s'est trouvée avantageuse lorsqu'elle s'adressait à des jeunes gens d'intelligence supérieure à la moyenne. Il faut être moins affirmatif en ce qui concerne l'enseignement du même sujet à de bons élèves de 13 ou 14 ans ou à tous les élèves de 16 ans. Ces nouvelles notions doivent être précédées d'un travail préliminaire dont il ne faut cependant pas exagérer la portée. Il faut illustrer cet enseignement de nombreuses applications à des problèmes de mesure et de mécanique ; les applications géométriques ne devraient occuper qu'une place relativement restreinte. La mesure des volumes est utile comme introduction à l'intégration. Les notions telles que fonction, limite, coefficient différentiel, intégrale, doivent être introduites tout d'abord à l'aide d'exemples concrets, mais il ne faut pas craindre de les appeler ensuite par leur nom. Un certain degré de rigueur dans les définitions et les démonstrations est essentiel ; car les élèves se rendent facilement compte du défaut de telle ou telle définition ou démonstration, sans qu'il leur soit peut-être possible de le préciser, et cela pourrait leur être une cause de découragement. Les diverses conventions doivent être suffisamment expliquées. Il serait désirable que le maître eût quelques connaissances historiques du sujet : il serait peut-être utile également de donner aux élèves quelques aperçus historiques, ce qui rehausserait la valeur du sujet en tant que partie de l'éducation générale.

En appendice, on trouvera quelques questions d'examens pour les « Junior Appointments » dans le « Civil Service ».

J.-P. Dumur (Genève).

---

# BIBLIOGRAPHIE

Gerrit Bakker. — **La couche capillaire des corps purs.** — 2 vol. in-8° (Collection Scientia). 2 fr. le volume ; Gauthier-Villars, Paris.

M. G. Bakker (de La Haye) est un physicien bien connu en France pour ses études de la couche capillaire toutes publiées dans le *Journal de Physique*. Les deux petits volumes d'aujourd'hui résument ses précédents travaux avec de nombreux compléments qui font de l'ensemble un ouvrage homo-

gène. Cet ouvrage a peut-être déjà été jugé comme un peu compact, ce qui tient au grand nombre de faits et d'expériences qui sont décrits et calculés. Mais il est cependant bien simple d'apercevoir les idées directrices de l'auteur. Il se tient presque continuellement dans ce qu'on pourrait appeler la géométrie des courbes isothermes, géométrie dont le plus zélé créateur fut sans doute Van der Waals. Ainsi, pour les systèmes liquide-vapeur, on a, à température constante, des courbes élégantes qui indiquent comment sont liés le volume et la pression dans les phases en présence. M. Bakker discute d'abord soigneusement, sur ces courbes, les points où la densité est égale à celle de la couche capillaire (ou en relation simple avec la densité ou l'épaisseur de ladite couche). Mais on sait que certaines parties de ces courbes n'ont qu'une existence théorique correspondant à des équilibres instables qu'aucune expérience ne semble réaliser. Il y a là une difficulté que reconnaissait James Thomson en cherchant une explication (qu'il était cependant loin de pouvoir vérifier) dans la mince couche de passage qui sépare le liquide de la vapeur. C'est ici qu'ont porté les efforts personnels de M. Bakker. La partie irréalisable de l'isotherme théorique se met à jouer un rôle très réel dans l'étude des conditions d'existence de la couche capillaire. C'est pour l'ouvrage une idée très grande et très claire. D'ailleurs on en trouve d'autres qui relèvent du même esprit. Ainsi quand les isothermes changent, les points remarquables dont je parlais tout à l'heure ont des lieux également remarquables.

Au point de vue analytique bien des calculs intéresseront les mathématiciens. Ainsi l'énergie dans la couche capillaire se représente naturellement par des intégrales de surface et comme cette énergie est en relation, de manières diverses, avec celles du liquide et de la vapeur pour lesquelles il faut écrire des intégrales de volume, les relations entre ces différentes intégrales rappellent bien des égalités se rencontrant en d'autres branches de la Physique, notamment dans les théories maxwelliennes de l'électricité. Ajoutons aussi que le physicien néerlandais a su, avec ses méthodes, retrouver les théories déjà connues, telle celle de l'ébullition, en les mettant sous des formes originales. Il y a là de précieuses vérifications.

Bref, le nouvel effort, semblant d'abord très spécial, que vient de donner M. Bakker après une longue suite de travaux, est de nature à avancer et à éclairer bien des points encore obscurs de la physique et de la physico-chimie.

A. Buhl (Toulouse).

Ed. Barbette. — **Les carrés magiques du $m^e$ ordre.** — 1 vol. in-8°, autographié, 244 p.; 7 fr. 50; chez l'auteur, 18, rue Darchis, Liége.

Rangeons en carrés $n^2$ jetons portant chacun une des $n$ premières lettres et un des $n$ premiers entiers, de manière que chaque rangée et chaque colonne présente toutes les $n$ lettres et les $n$ nombres : nous aurons ce qu'on appelle un *carré d'Euler de module* n, et l'autre un *carré symbolique*. M. Barbette construit ainsi des carrés de modules 4, 8, 16 et 32, ainsi que ceux des modules 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Sa méthode a moins de portée que celle d'Euler, mais elle est plus simple, quoique présentée d'une manière un peu embarrassée.

Il aborde ensuite la théorie beaucoup plus difficile des carrés de modules de forme $4x + 2$ mais avec moins de succès, et la démonstration qu'il donne de l'impossibilité du célèbre problème des trente-six officiers ne semble pas

absolument convaincante et il serait à désirer que l'auteur la développât dans un article à part.

Si on attribue aux lettres des valeurs 0, $n$, $2n$, $3n$, ... $(n-1)n$, et qu'on fasse la somme des nombres correspondant à chaque jeton, on aura un *carré magique*. Parmi les dispositions des carrés symboliques à choisir pour la construction pratique des carrés magiques, M. Barbette choisit celle des Indiens.

Il donne ensuite des *carrés magiques composés* des modules 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25 ; puis il traite des *carrés magiques à enceintes*, des *carrés panmagiques*, des *carrés hypermagiques* et des *carrés bimagiques*, c'est-à-dire ceux qui restent magiques quand on élève tous leurs termes au carré.

Notons çà et là quelques problèmes intéressants.

*Trouver le nombre des permutations symétriques d'un arrangement.*

*Déterminer les groupes de* n *nombres inférieurs à* $n^2$ *et ayant pour somme* $\frac{n(n^2+1)}{2}$. Il donne une méthode permettant d'arriver de proche en proche à la solution. Pour $n=3$, 4, 5, on a respectivement 8, 86 et 1394 solutions.

*La somme des puissances* $(n^2)^{\text{èmes}}$ *des* $n-1$ *premiers entiers est comprise entre* $n^{2n-2}$ *et* $n^{2n}$.

*Aucun carré magique des modules* 3, 4, 5 *et* 6 *ne peut être bimagique.*

*Etude des produits terme à terme de deux carrés magiques de mêmes modules :* d'où un moyen d'obtenir une foule d'identités du second degré.

*Si un carré est magique aux* n *premiers degrés, il conserve ses propriétés quand on ajoute à chaque terme un même nombre.* Ce théorème donné par Ed. Lucas pour $n=2$, l'a été généralement par M. G. Tarry, qui en a tiré de nombreuses conséquences.

En somme, travail considérable pouvant servir d'un excellent guide dans cette théorie encore peu connue ; beaucoup d'exemples intéressants ; beaucoup d'aperçus et de résultats nouveaux. Il semble toutefois que l'auteur eut dû traiter moins à fond certaines parties accessoires : les ouvrages de vulgarisation — tels que celui-ci — devraient s'astreindre à ne parler que de choses simples, générales et immédiatement fécondes.

A. Aubry (Dijon).

H. Bouasse et E. Turrière. — **Exercices et Compléments de Mathématiques générales.** — 1 vol. gr. in-8° de 500 pages et 374 fig. ; 18 fr. ; Ch. Delagrave, Paris.

Le gigantesque cycle de connaissances embrassé par M. Bouasse n'aurait pas été complet sans ce nouveau volume qui, après les six volumes de Physique et les Traités de Mécanique et de Mathématiques générales, est bien le neuvième tome d'une immense encyclopédie. Inutile de revenir sur ces productions précédentes qui ont décelé en leur auteur un esprit pédagogique de première force se superposant au physicien déjà bien connu sur le terrain de la science pure. Insistons plutôt sur la collaboration de M. Emile Turrière, connu aussi des lecteurs de l'*Enseignement mathématique* puisqu'il a publié et publie encore ici-même des recherches géométriques aussi profondes qu'élégantes.

De cette heureuse réunion naît un ouvrage frappant par ses qualités originales. Le plus extraordinaire est que toutes les choses connues et anciennes que l'on y retrouve semblent comme rajeunies pour la jeunesse à

laquelle le livre s'adresse. Ce sont d'abord des constructions de courbes dont je ne me lasse point d'admirer les dessins. Elles sont prises parmi celles rassemblées par des géomètres tels que MM. Brocard, Loria, Wieleitner. Teixeira, etc., du moins sous les aspects où on peut immédiatement les saisir, les tracer par les procédés géométriques ou cinématiques les plus simples, les faire vivre et leur attribuer les plus harmonieuses propriétés. Ce sont aussi les courbes physiques telles les isothermes de Van der Waals dont une droite partage l'aire en déterminant sur la courbe les points qui correspondent à la vaporisation et à la liquéfaction d'un système liquide-vapeur, telles celles de Perot et Fabry qui correspondent à la distribution de la lumière dans les franges résultant des phénomènes d'interférence, telles les filets fluides des liquides en mouvement permanent autour d'obstacles donnés, etc., etc. Au point de vue purement géométrique, il y a des réciprocités merveilleuses auxquelles cependant on ne songe pas d'ordinaire. Ainsi, en coordonnées cartésiennes, il est immédiat et élémentaire d'associer toujours les courbes exponentielle et logarithmique. Mais on n'associe pas toujours, en coordonnées polaires, la spirale logarithmique $r = e^{\theta}$ et la spirale exponentielle $r = \log \theta$, courbe très élégante ici tracée. Une autre idée, que j'ai été amené à beaucoup apprécier personnellement mais qui n'est pas encore suffisamment classique, consiste à rectifier les courbes dont l'arc dépend d'une intégrale elliptique de seconde espèce en donnant simplement les demi-axes $a$ et $b$ de l'ellipse dont le périmètre (ou une partie simple du périmètre) est égal à tel ou tel arc de la courbe envisagée. Si je ne me trompe *toutes* les courbes de cette nature ont été déterminées par Serret et l'on connaît vulgairement les sinussoïdes et toute la famille épi ou hypocycloïdale. Mais on connaît moins de jolies spirales ou rosaces qui, rectifiées ainsi, n'apprennent peut-être pas la théorie des fonctions elliptiques mais montrent tout de même qu'il n'y a pas rien que des fonctions à propriétés mystérieuses et difformes au delà de celles qui s'expriment élémentairement.

Souvent les auteurs ont une idée qui stupéfie parce qu'elle intéresse avec rien. Ainsi l'aviateur qui fait de parfaits virages, dans un vent uniforme, décrit une cycloïde par rapport au sol. Ce n'est pas difficile à démontrer. Mais c'est captivant pour l'étudiant qui attend peut-être avec impatience la fin d'un cours pour aller voir voler un pilote plus ou moins célèbre.

Dans l'espace où les surfaces ou courbes gauches intéressantes forment un monde beaucoup plus clairsemé que celui des courbes planes, nous trouvons quelques problèmes empruntés à l'Astronomie et l'ouvrage se termine par les calculs approchés, les permutations et arrangements opérés sur objets tangibles (piles de bouteilles et de boulets) et conduisant au Calcul des probabilités où le Calcul intégral reparaît très habilement avec la loi de Gauss. Signalons un dernier Chapitre sur le Calcul vectoriel considéré comme plus curieux que pratique mais qui sert tout au moins à présenter quelques synthèses avantageuses.

Je n'ai signalé ainsi que quelques idées semblant peut-être prises au hasard. Mais comment faire autrement sans tout citer ? Il y a naturellement une préface où M. Bouasse (probablement sans la collaboration de M. Turrière) égratigne légèrement ses collègues ! Mais c'est alerte et spirituel. Qui se plaindra de trouver une leçon un peu sincère, mais faite cependant avec belle humeur, à côté de tant et tant d'intérêt ?

A. Buhl (Toulouse).

Fr. Caldarera. — **Trattato dei Determinanti.** — 1 vol. gr. in-8°, 255 p.; 7 livres; Stabilimento Tipografico Vizzi, Palerme.

Ce nouvel ouvrage de M. Caldarera se présente sous la forme modeste d'un cours didactique, alors qu'il contient suffisamment de matières pour constituer un véritable traité, qui ne tardera pas à prendre place parmi les ouvrages classiques sur les déterminants. Comme les volumes précédents il se distingue par la clarté de l'exposition qui caractérise les travaux de l'auteur.

M. Caldarera commence la théorie de la manière classique, par la résolution d'un système d'équations linéaires avec un nombre égal d'inconnues. Il considère ensuite les déterminants pour eux-mêmes et présente, par une méthode nouvelle, les théorèmes fondamentaux concernant les déterminants.

Dans le 3me chapitre (Nos 41 et 42), l'auteur établit la règle de multiplication de deux déterminants en faisant intervenir deux systèmes d'équations linéaires, ce qui rend la démonstration très simple et évidente. Il ne supprime cependant pas la marche élémentaire ordinairement suivie dans les cours (N° 51 du 3me chapitre).

Il étudie ensuite les propriétés des déterminants en général, leurs mineurs, des déterminants multiples naissant de matrices rectangulaires et de la caractéristique de ces dernières.

Dans le 5me chapitre l'auteur s'occupe des déterminants de formes particulières : Déterminants réciproques, symétriques, hémisymétriques, pseudo-symétriques ; déterminants avec les éléments principaux binômes, ayant un terme commun ; déterminants de Vandermonde généralisé ; circulant ; déterminant de Hankel.

Le 6me chapitre traite des dérivées et des différentielles des déterminants, et le 7me des déterminants fonctionnels, Jacobiens, Hessiens.

Dans le chapitre suivant on trouve un exposé synthétique de la théorie très moderne des déterminants d'ordre infini.

Après avoir épuisé toute la partie théorique dans les huit premiers chapitres, l'auteur consacre trois chapitres aux principales applications des déterminants à l'analyse algébrique et à la géométrie du plan et de l'espace. Pour ces dernières applications il emploie les systèmes de coordonnées triangulaires et tétraédriques dont il fait une exposition à la fois simple et claire. Parmi les autres applications, signalons celle des moments d'un système quelconque de forces appliquées à un point, dans le plan et dans l'espace, qui est développé par une méthode purement géométrique. Mentionnons aussi la remarquable formule qui exprime l'angle de torsion des courbes gauches.

En résumé, l'auteur a su réunir dans ce volume les propriétés essentielles de la théorie des déterminants, et malgré les nombreuses publications dans ce domaine, il a su en faire une œuvre originale qui est digne de l'attention des mathématiciens. Giov. Russo (Catanzaro).

Th. Caronnet. — **Cours de Trigonométrie,** à l'usage des Candidats au Baccalauréat, à l'École de Saint-Cyr et à l'Institut agronomique. — 1 vol. in-8° de IV-217 p. et 111 figures. Prix : 4 fr. 50. Gauthier-Villars, Paris.

Ce nouveau Cours élémentaire est remarquablement ordonné. L'application judicieuse des équipollences rend uniformes toutes les applications du théorème des projections. Les fonctions circulaires sont définies sur le

cercle trigonométrique ; c'est la vieille méthode, toujours bonne cependant ne serait-ce que pour le tracé immédiat des courbes représentant les dites fonctions. Celles-ci sont immédiatement suivies d'une sobre étude des fonctions inverses. Les équations trigonométriques sont heureusement groupées et résolues par un petit nombre de méthodes ; les inéquations ont une place importante. Après les résolutions de triangles nous trouvons des exemples numériques très bien disposés au point de vue typographique, les applications usuelles relatives aux problèmes sur le terrain et même un complément qui nous donne la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

De nombreux problèmes à résoudre s'ajoutent à ceux qui sont résolus dans le texte. A. Buhl (Toulouse).

G. Demartres. — **Cours de géométrie infinitésimale,** avec une préface de P. Appell. — 1 vol. gr. in-8° de X-418 pages et 111 figures ; 17 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Il est bien difficile d'analyser l'ouvrage de M. Demartres mieux que M. Appell. Peut-être est-il préférable de reproduire ici quelques lignes de la préface où l'éminent doyen de la Faculté des Sciences de Paris montre toute sa sympathie pour le bel exemple de décentralisation que donne l'excellent professeur de Lille.

« Ce Livre plus élémentaire que celui de M. Darboux, peut être considéré comme une sorte d'introduction aux hautes recherches que M. Darboux a exposées successivement dans son Cours et qu'il a résumées dans son beau Traité.

Depuis la création des certificats d'études supérieures, l'accroissement des programmes d'analyse a donné lieu à une extension notable des applications géométriques ; mais l'ordre où, dans les Traités d'Analyse, ces notions sont présentées est, non leur ordre logique et nécessaire tel qu'il résulte des définitions géométriques, mais l'ordre des théories analytiques auxquelles elles servent d'application ; c'est ainsi, pour ne prendre qu'un exemple, que la définition des lignes géodésiques, qui devrait logiquement être donnée dès le début de la théorie des surfaces, est rejetée le plus souvent au Chapitre où l'on traite du calcul des variations.

M. Demartres a cherché à combler ces lacunes, à remédier à ces imperfections en rédigeant, dans leur ordre logique, les développements des questions qui forment le fond essentiel du certificat de Géométrie supérieure. Il a réussi, tout en conservant à ce *cours* une forme relativement élémentaire, à le conduire assez loin pour que ses lecteurs puissent ensuite aborder l'étude des Mémoires originaux et des Traités d'ordre plus élevé comme celui de M. Darboux.

La première Partie, qui précède le cours proprement dit, comprend sept Chapitres ou les différentes questions du programme sont traitées géométriquement et sans recourir à l'analyse dans leurs parties essentielles ; on pourra, sans inconvénient, la laisser de côté dans une première lecture, la théorie générale ayant été reprise, à partir de son début, dans les Chapitres suivants ; elle pourra surtout servir à comparer dans certains cas les deux solutions fournies par l'Analyse et par la Géométrie, comparaison qui ne pourra être qu'intéressante et utile. Le Volume se termine par un choix d'exercices nombreux, classés en quatre séries correspondant aux quatre Sections de l'Ouvrage.

En résumé, le Livre de M. Demartres comble d'une façon très heureuse une lacune dans notre Enseignement supérieur ; il rendra de grands services à tous ceux qui sont attirés par la variété et l'élégance de la Géométrie supérieure, à tous ceux qui, par profession, doivent les connaître : mathématiciens et chercheurs de vocation, professeurs de l'Enseignement supérieur ou de l'Enseignement secondaire, candidats à l'Agrégation, candidats aux Certificats de Géométrie supérieure et de Mathématiques pures, ou au Diplôme d'études supérieures ; il fera honneur à la Science française. »

Qu'il me soit permis d'ajouter, après ces lignes, qu'ayant à mon tour parcouru l'ouvrage j'ai été frappé de la simplicité et de l'élégance des démonstrations. Le grand ouvrage de M. Darboux repose surtout sur la méthode du trièdre mobile, méthode merveilleuse, il faut en convenir. Mais si l'on traite ainsi, par exemple, les questions de courbure et de torsion géodésique, on peut redemander, pour certaines recherches, des solutions aussi élémentaires que possible par rapport au trièdre fixe $Oxyz$. On trouvera cela dans l'ouvrage de M. Demartres. J'observe de même que l'auteur n'est jamais embarrassé par des questions de signes : ceux-ci sont choisis, et bien choisis, une fois pour toutes. Pas de formules encombrantes et c'est avec de la belle géométrie cinématique que nous revenons vers les travaux de M. Darboux.

Grâce à ce livre, bien des chercheurs s'initieront sans peine à la haute géométrie et y trouveront l'objet de réflexions fécondes.

A. Buhl (Toulouse).

Paul Dienes. — **Leçons sur les singularités des fonctions analytiques**, professées à l'Université de Budapest. — 1 vol. in-8° de VIII-172 p. et 19 fig. ; 5 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

Voici un petit livre si clairement écrit que les idées fondamentales s'en peuvent dégager en quelques lignes. Il s'agit d'atteindre les singularités des fonctions analytiques en partant des représentations régulières de ces fonctions.

Dans cet ordre d'idées la voie a été incontestablement ouverte par M. Jacques Hadamard qui a résumé ses recherches (ainsi que beaucoup d'autres) dans son admirable petit volume de la collection *Scientia* intitulé *La série de Taylor et son prolongement analytique.*

On part de la série de Taylor lorsqu'elle converge le plus régulièrement du monde dans son cercle de convergence et l'on essaye de s'approcher de la circonférence limitrophe pour reconnaître l'existence du ou des points singuliers qui déterminent son rayon. Ces points trouvés on étudie la série dans leur voisinage.

Or les travaux de MM. Borel et Mittag-Leffler augmentent de beaucoup la portée de cette première idée. On prendra pour la fonction analytique des expressions telles, par exemple, que des séries de polynômes, expressions d'abord uniquement construites pour représenter la fonction en ses points non singuliers mais dans des domaines plus étendus que le cercle taylorien. Et on essayera ensuite, avec ces expressions, d'approcher des singularités.

Les instruments employés ici, à côté du développement taylorien sont, tout naturellement, les séries de polynômes, formées par M. Borel par la méthode de moyenne aujourd'hui bien connue, puis les séries de polynômes plus générales imaginées par M. Mittag-Leffler.

M. Dienes a suivi, dans sa rédaction, des idées tellement personnelles qu'il semble avoir un peu oublié quelques travaux parallèles. Mais quel est le géomètre qui peut aujourd'hui tout connaître, même dans la branche qu'il travaille particulièrement? Ceci n'est donc pas une critique. Peut-être même est-ce l'unicité du point de vue qui assure, dans cet ouvrage, la clarté dont je parlais au début.

Et si beaucoup d'artistes attribuent leurs inspirations à des influences féminines, n'oublions pas la délicatesse du géomètre qui, dans sa préface, rend hommage à la collaboration de Mme Valérie Dienes.

A. Buhl (Toulouse).

E. Fabry. — **Problèmes d'Analyse mathématique.** — 1 vol. gr. in-8° de 460 p.; 12 fr.; A. Hermann, Paris.

M. E. Fabry qui, entre autres ouvrages, a déjà publié un Traité de mathématiques générales et un Recueil de problèmes s'y rapportant, nous donne maintenant des problèmes qui sont manifestement destinés aux candidats au certificat de Calcul différentiel et intégral. Tous ces problèmes ont été proposés aux examens; ils nous en reviennent avec des références exactes de date et de lieu. C'est dire que les élèves auront d'excellents matériaux pour leur travail de préparation.

Voici un premier chapitre sur les quadratures suivi immédiatement d'un second sur leurs applications géométriques (aires planes ou gauches, volumes). Je remarque certaines questions de cubature où les volumes sont limités par des surfaces se coupant de manière particulièrement ingénieuse. Viennent ensuite les intégrales curvilignes soit dans le domaine réel, soit au point de vue de Cauchy. Les développements de Mac-Laurin s'y rencontrent sur de très simples exemples.

Les équations différentielles, d'abord traitées sur quelques types abstraits, résultent bientôt de l'élégante détermination de nombreuses courbes devant présenter quelque propriété exacte par les nombreux segments rectilignes (tangente, normale, sous-tangente, sous-normale, etc.) qu'on peut associer à l'un de leurs points. Puis nous sommes tout naturellement conduits aux problèmes de la théorie des surfaces qui exigent aussi l'intégration d'équations différentielles : détermination de géodésiques, d'asymptotiques, de lignes de courbure. Ici beaucoup d'élégance géométrique quant aux lignes de courbure planes ou circulaires.

Un chapitre spécial est consacré aux surfaces réglées en y comprenant toutefois les développables. Il n'est point naturel, à coup sûr, de noyer dans les autres surfaces celles formées d'éléments aussi remarquables que la droite.

Pour les équations aux dérivées partielles même marche que pour les équations différentielles ordinaires. Types abstraits puis détermination de nombreuses surfaces. A côté des équations linéaires, il faut en signaler de tout à fait quelconques en $x$, $y$, $z$, $p$, $q$. Quelques exercices sur les fonctions elliptiques terminent ce cycle que beaucoup de jeunes travailleurs devront parcourir pour le plus grand succès de leurs examens.

A. Buhl (Toulouse).

Auguste Guillemin. — **Tables de logarithmes à trois quatrades.** — 1 vol. gr. in-8° de XXIV-130 p.; 6 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Bien qu'un jugement sur ces nouvelles tables ne puisse probablement

être donné en toute connaissance de cause que par le praticien qui les utilisera, il faut reconnaître qu'elles sont bâties sur une idée extrêmement ingénieuse qui séduit tout de suite le théoricien. Soit

$$\log \pi = 0{,}4971 \quad 4987 \quad 2694$$

où les groupes de quatre chiffres (ou quatrades) de la mantisse sont en évidence. On peut dire

$$Q_1 = 0{,}4971 \quad 0000 \quad 0000 \quad \text{est log d'un nombre } N$$
$$Q_2 = 0{,}0000 \quad 4987 \quad 0000 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 1 + \alpha ,$$
$$Q_3 = 0{,}0000 \quad 0000 \quad 2694 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 1 + \beta ,$$

$\alpha$ et $\beta$ étant très petits puisque $Q_2$ et $Q_3$ sont très voisins de zéro. Donc le logarithme de $\pi$ est

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = \log [N(1+\alpha)(1+\beta)] \equiv \log (N + N\alpha + N\beta) .$$

Par suite, si $\pi$ est mis sous la forme $N(1 + \alpha + \beta)$, nous pouvons trouver son logarithme comme somme de ceux qui, dans une table, correspondraient à la connaissance des quantités $N$, $\alpha$, $\beta$. Or ce sont précisément de telles tables que construit le Dr Guillemin. On conçoit qu'elles puissent donner des résultats très précis sous un petit volume puisqu'elles reviennent à manier des nombres pouvant avoir jusqu'à 12 décimales au moyen de fragments qui n'ont que quatre chiffres. L'auteur paraît avoir trouvé des encouragements, ne serait-ce que près de l'Association française pour l'avancement des Sciences.

D'ailleurs, bien des gens ont senti que le système logarithmique ordinaire, avec ses approximations par parties proportionnelles, n'était peut-être pas le comble de la perfection. Il y a certainement de la marge pour mieux faire, ce qui, dans ce livre, est tenté avec beaucoup d'élégance. Les tables proprement dites y sont matériellement exécutées avec un talent typographique de tout premier ordre. A. Buhl (Toulouse).

W. I. King. — **The Elements of Statistical Method.** — 1 vol. in-8° relié, 250 p.; 1 Doll. 50; The Macmillan Company, New-York et Londres.

Depuis une cinquantaine d'années les méthodes statistiques ont pénétré dans les domaines les plus divers. Elles jouent aujourd'hui un rôle important dans les sciences d'observation et dans les sciences économiques et sociales. Elles forment un instrument précieux pour l'économiste et le publiciste, mais encore faut-il savoir s'en servir. Le présent volume a précisément pour but d'exposer les méthodes, d'ailleurs très simples, sur lesquelles on base la statistique scientifique. L'auteur s'adresse à des lecteurs n'ayant pas de connaissances spéciales en mathématiques. Il les initie aux problèmes de la statistique scientifique, à la construction et à l'emploi de tables numériques et de graphiques, à l'établissement des moyennes et aux méthodes de Pearson.

P. Langevin et de Broglie. — **La théorie du rayonnement et les Quanta.** 1 vol. in-8° de 462 pages, 15 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Dans les *Dernières pensées* d'Henri Poincaré on trouve une allusion à un Congrès scientifique tenu à Bruxelles, où l'on se préoccupait d'une Méca-

nique tellement nouvelle que l'ancienne n'était plus celle de Newton mais celle de Lorentz !

Le présent volume est un compte rendu des travaux de ce congrès qui eut lieu, en effet, à Bruxelles, sous les auspices de M. E. Solvay, du 30 octobre au 3 novembre 1911. Nous trouvons là les mémoires les plus stupéfiants dus à MM. H.-A. Lorentz, J.-H. Jeans, E. Warburg, H. Rubens, Max Planck, M. Knudsen, J. Perrin, W. Nernst, Kamerling Onnes, A. Sommerfeld, P. Langevin, A. Einstein.

D'autre part, les plus hautes personnalités scientifiques, parmi lesquelles je relève encore avec tristesse le nom d'Henri Poincaré, s'étaient jointes aux précédentes. Leurs observations figurent en détail dans ce livre à côté des mémoires précédents suivis généralement d'importantes discussions.

Le point capital de ces travaux commence à se vulgariser; l'énergie, notamment dans les phénomènes de rayonnement, n'apparaîtrait plus comme pouvant toujours varier de manière continue. Des sauts brusques seraient possibles, indispensables même ; elle varierait par *Quanta !* Les équations des phénomènes cesseraient d'être canoniques et on ne pourrait même tenter de les corriger en leur laissant cependant leur forme différentielle. Il faudrait recourir à des équations fonctionnelles !

Il ne m'est pas possible de discuter ici en détail chacun des mémoires dus aux savants précédents. Celui qui a été placé en premier lieu et dont l'auteur est M. Lorentz pose admirablement la question. Pourquoi un morceau de fer, par exemple, absorbe-t-il toujours de l'énergie et ne peut-il en émettre sous forme de lumière qu'au delà d'une certaine température ? Ce sont les hypothèses de discontinuité de Max Planck qui semblent jusqu'ici donner la réponse la plus satisfaisante. Qu'il me soit permis de relever, en particulier, le travail *Sur les preuves de la réalité moléculaire*, de M. J. Perrin, travail particulièrement saillant, comme semblant d'abord ne pas s'inspirer exactement des questions qui précèdent. Son auteur part de ses recherches sur le mouvement brownien et les quantités élémentaires d'électricité. C'est avec ces points de départ qu'il arrive finalement à la théorie du corps noir et à celle de l'énergie rayonnée par quanta.

A. Buhl (Toulouse).

Ern. Lebon. — **Armand Gautier.** Biographie, Bibliographie analytique des écrits. — 1 vol. in-8° de VIII-96 p., papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure, 15 novembre 1912 ; Prix : 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

En présentant à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 25 novembre 1912, la Notice sur Armand Gautier, dont M. Ernest Lebon vient d'enrichir sa Collection bien connue des *Savants du Jour*, M. Gaston Darboux, Secrétaire perpétuel, s'est exprimé en ces termes :

« J'ai déjà eu l'honneur de présenter à l'Académie différentes Notices qui font partie de la belle Collection des *Savants du Jour* et que M. Ernest Lebon a consacrées à quelques-uns de nos confrères. Tout récemment, quelques jours avant la mort à jamais regrettable d'Henri Poincaré, j'étais heureux de signaler la seconde édition de la Notice si complète, si documentée, consacrée à notre illustre confrère. Encouragé par un succès bien mérité, M. Lebon a voulu élargir le cadre de ses études et la Notice que j'ai aujourd'hui la bonne fortune de présenter à l'Académie relate la vie et les travaux de notre illustre confrère, Armand Gautier, qui nous appartient depuis 1889,

qui a été le président de l'Académie en 1911 et qui demeure aujourd'hui le doyen, aimé et honoré de tous, de notre Section de chimie. Notre confrère a beaucoup travaillé et beaucoup écrit. Le nombre, relevé par M. Ernest Lebon, de ses écrits de toute nature dépasse 600. Il laissera une trace ineffaçable dans l'étude de plusieurs des chapitres les plus importants de la chimie et de la philosophie naturelle. Dans ces matières, si nouvelles pour lui, M. Lebon a apporté les mêmes qualités, les mêmes soins que dans les Notices précédentes. »

Cette Notice porte à six le nombre des volumes de la collection des *Savants du Jour*. Les cinq premiers sont consacrés à Henri Poincaré, Gaston Darboux, Emile Picard, Paul Appell, Gabriel Lippmann.

M. Linnich. — **Lehr- und Uebungsbuch der Mathematik** (*Collection* Schwab-Lesser). B. *Ausgabe für höhere Mädchenschulen*. I et II. 2 vol. in-8°, 149 et 130 p.; 2 M. le vol. — C. *Ausgabe für Lehrerinnenseminare*. I : Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra mit einen Anhang für den Unterricht in der analytischen Geometrie. — 1 vol. in-8°, 177 p.; 2 M. 50. II : Lehr- und Uebungsbuch der Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie. 1 vol. in-8°, 228 p.; 3 M.; G. Freytag, Leipzig, et F. Tempsky, Vienne.

A côté des manuels bien connus destinés aux établissements de garçons, la *Collection Schwab-Lesser* comprend aussi des petits traités spécialement destinés aux écoles de jeunes filles. Cette nouvelle édition a été revue et complétée par MM. Klatt et Linnich pour les degrés élémentaires (A) et par M. Linnich pour les degrés supérieurs (B) et les écoles normales (C), afin de les adapter aux nouveaux plans d'étude des écoles de jeunes filles (1908). Ils embrassent le champ complet des études mathématiques des classes X à I des écoles de jeunes filles en Allemagne, ainsi que celui des écoles normales.

Les deux volumes B en sont respectivement à la 3me et à la 2me édition ; ils concernent les classes IV à I des écoles supérieures de jeunes filles. La 1re partie, classes IV et III, comporte des éléments d'algèbre y compris les équations du 1er degré avec applications à l'arithmétique et à la géométrie et les théorèmes de géométrie plane les plus susceptibles d'applications simples. Les lieux géométriques sont fréquemment employés. La notion de fonction est introduite, soit en algèbre, soit en géométrie, toutes les fois que cela est possible.

La seconde partie, classes II et I, traite pour l'algèbre, des équations à deux et plusieurs inconnues, des équations du 2me degré, de la représentation graphique avec des applications à l'arithmétique. La géométrie plane et les éléments de stéréométrie font l'objet des deux derniers tiers du volume.

Les deux volumes C « arithmétique et algèbre » et « géométrie, trigonométrie et stéréométrie » sont destinés aux écoles normales pour institutrices et embrassent un champ plus vaste que les précédents. Le premier reprend l'algèbre à partir des théorèmes sur les puissances et radicaux et traite des équations du 2me degré, des progressions arithmétiques et géométriques et de leurs applications, du binôme, des nombres complexes, des équations du 3me degré et de degrés supérieurs. La représentation graphique y est fréquemment employée. Un chapitre est réservé aux dérivées de fonctions rationnelles avec application aux courbes. Une trentaine de pages sont consacrées à des notions élémentaires de géométrie analytique.

La géométrie, la trigonométrie et la stéréométrie font l'objet du 2me volume. Il est conçu suivant les tendances modernes; la notion de fonction, entre autres, tient une place importante. L'auteur insiste sur les sujets donnant lieu à des exemples pratiques applicables dans les écoles, sans cependant se limiter aux théorèmes présentant des propriétés métriques directement utilisables. En géométrie, par exemple, il réserve plusieurs chapitres aux théorèmes relatifs à la division harmonique aux pôles et polaires du cercle et aux transversales. Un aperçu historique termine le volume.

Ces volumes, quoique ne contenant que des notions élémentaires indispensables à une instruction secondaire représentent, sous une forme succincte un cours suivi de mathématiques et seront par là appelés à rendre des services également en dehors des écoles auxquelles il sont spécialement destinés. Renée Masson (Genève).

H. von Mangoldt. — **Einführung in die höhere Mathematik** für Studierende u. zum Selbststudium. Zweiter Band : *Differentialrechnung.* — 1 vol. in-8°, 566 p., 101 fig.; 14 M. 40; S. Hirzel, Leipzig.

En annonçant le premier volume de ce traité d'Eléments de Mathématiques supérieures, nous avons signalé l'esprit dans lequel l'auteur a conçu le plan général de son ouvrage. S'adressant à de futurs physiciens ou ingénieurs, il tient à leur fournir non pas un « abrégé », mais un véritable traité contenant l'ensemble des connaissances mathématiques indispensables à ceux qui auront effectivement à s'en servir comme instrument de travail. Nous signalons donc à nouveau cet ouvrage à tous ceux qui sont chargés de l'enseignement des mathématiques générales dans les universités et les écoles techniques supérieures.

Le second volume est entièrement consacré au Calcul différentiel; il comprend cinq parties : 1. Le calcul différentiel des fonctions d'une variable. — 2. Des séries infinies. — 3. Fonctions de plusieurs variables. — 4. Application du Calcul différentiel et intégral à la Géométrie. — 5. Introduction à l'étude des fonctions de variables complexes; représentation conforme.

L'auteur a eu soin d'accompagner son exposé d'un grand nombre de problèmes et d'exercices numériques.

L. Michaelis. — **Mathematik für Biologen und Chemiker.** — 1 vol. in-8°, 253 p.; relié; 7 M. 80; J. Springer, Leipzig.

Dans un cours de mathématiques destiné spécialement aux étudiants en chimie et en sciences naturelles, le professeur doit nécessairement se borner aux notions essentielles et les faire suivre immédiatement de problèmes se rattachant aux études que poursuit l'étudiant. Le temps généralement accordé à cet enseignement ne permet pas de faire de longs développements et il s'agit de trouver un minimum adapté aux besoins des sciences naturelles.

C'est ce qu'a fait M. L. Michaelis, privat-docent à l'Université de Berlin. Son petit traité débute par un rappel des éléments de mathématiques enseignés dans les gymnases, puis il aborde la notion de fonction qu'il développe en même temps que les éléments de Géométrie analytique. Viennent ensuite le Calcul différentiel et intégral, les séries et les équations différentielles.

Dans ces différents domaines, l'auteur se borne aux notions les plus simples et montre comment elles interviennent dans les problèmes qu'ont à

résoudre les chimistes et les biologues. A ce titre, ce petit manuel mérite d'être signalé tout particulièrement à cette catégorie d'étudiants.

Rev. John J. Milne. — **An Elementary Treatise on Cross-Ratio Geometry.** — 1 vol. in-8° relié, XXIII-288 p. et 129 fig.; University Press, Cambridge.

Depuis Clifford les Anglais désignent le rapport anharmonique sous le nom de *cross-ratio*. L'ouvrage du Rev. John Milne est donc un traité élémentaire de la Geométrie du rapport anharmonique. Il constitue une excellente introduction à la Géométrie projective.

Après avoir établi les propriétés du rapport anharmonique, l'auteur fait une étude approfondie de l'homographie et des propriétés projectives des sections coniques. L'exposé, qui est très clair, est accompagné de nombreux exercices et d'intéressantes notes historiques. A ce titre il forme, non seulement un guide précieux pour les étudiants, mais il sera également consulté avec intérêt par les professeurs.

H. de Morin. — **Les appareils d'intégration.** — 1 vol. in-8° de IV-208 pages et 119 figures ; 5 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Au moment où les préoccupations de calcul mécanique s'introduisent partout, jusque dans les cours de mathématiques générales, cet élégant ouvrage est certainement destiné à recevoir le meilleur accueil Naturellement il vise surtout le problème de l'évaluation des aires et l'auteur a eu le talent de toujours mettre en relation, de manière simple, les appareils d'un aspect souvent délicat et compliqué avec les principes de calcul intégral qui ont permis de les imaginer.

Et si parfois il nous fait admirer des merveilles de mécanisme, combien il nous stupéfie d'autre part avec des appareils, tels que le planimètre de Prytz, *qui n'ont aucun mécanisme*. Cet instrument est une sorte de compas, *d'ouverture constante*, dont l'une des pointes est remplacée par un petit fer de hache dont le tranchant est dans le plan de l'instrument : si, avec la véritable pointe, on décrit un certain contour, le fer de hache, pour peu qu'on l'appuie un peu sur le papier, y trace un sillon dont la rectification est en relation très simple avec la quadrature à effectuer. Evidemment je ne puis décrire aussi simplement les autres appareils mais ceci suffit justement à faire pressentir l'intérêt extrêmement varié qu'on rencontrera dans l'ouvrage de M. de Morin.

Après les planimètres proprement dits il étudie ceux qu'on appelle, peut-être un peu improprement, planimètres sphériques puis les intégromètres permettant d'intégrer $y^n dx$ pour $n = 1, 2, 3, 4$. Viennent ensuite les intégraphes, c'est-à-dire l'étude des cas où l'on peut obtenir non des valeurs numériques représentant des aires mais une construction graphique de ces valeurs. Je signale quelques mots intéressants sur les *dérivateurs*, appareils infiniment plus difficiles à réaliser que les intégrateurs, à un point tel même qu'ils n'ont jamais pu avoir de véritable existence pratique. La raison de la difficulté est celle déjà donnée ici-même, par M. Laisant, dans notre premier volume (1899, p. 241).

Les analyseurs harmoniques terminent cette œuvre d'une érudition facile et cependant très complète qui fait grand honneur à son auteur.

A. Buhl (Toulouse).

O. Perron. — **Die Lehre von den Kettenbrüchen.** — 1 vol. gr. in-8°, XII-520 p. ; 20 M. (relié 22 M.) ; B. G. Teubner, Leipzig.

La littérature mathématique vient de s'enrichir d'un important ouvrage qui comble une lacune que l'on sentait vide. Tous ceux qui se sont occupés de la théorie des fractions continues connaissent les recherches, souvent très longues, auxquelles on avait à s'astreindre pour avoir un aperçu de l'état actuel de cet intéressant domaine. Ils sauront gré à M. O. Perron, professeur à l'Université de Tubingue, d'avoir rédigé un traité sur la théorie des fractions continues. Par ses importants travaux dans cette partie des mathématiques, l'auteur était bien qualifié pour faire un exposé de *l'état actuel de la théorie des fractions continues*.

L'ouvrage est divisé en deux parties. La première comprend l'étude des fractions continues envisagées au point de vue arithmétique. Ce sont les propriétés devenues classiques complétées des recherches plus récentes, notamment de celles de M. Hurwitz et de M. Tietze. La seconde partie donne l'étude analytique des fractions continues dans leurs liens avec la théorie des fonctions, lorsque les éléments de la fraction sont des fonctions d'une variable. A signaler spécialement l'exposé de critères de convergence et de divergence et les chapitres consacrés aux fractions continues de Stieltjes et aux tables de Padé.

E. Picard. — **Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft**, Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. — (Sammlung « Wissenschaft und Hypothese », No XVI.) — I vol. in-8°, IV-292 p. ; 6 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

La plupart de nos lecteurs connaissent le beau livre que M. Emile Picard, membre de l'Institut, publia il y a quelques années dans la *Bibliothèque de philosophie scientifique* sous le titre *La science moderne et son état actuel.* En voici une traduction allemande rédigée et annotée avec beaucoup de soin par M. et Mme Lindemann (Munich), qui ont également publié l'édition allemande de *Science et hypothèse* d'Henri Poincaré.

L'ouvrage de M. Picard a pour but de donner une idée d'ensemble sur l'état des sciences mathématiques, physiques et naturelles dans les premières années du XXe siècle. Envisageant les sciences dans leurs pénétrations et leurs influences réciproques, l'auteur s'efforce d'indiquer les divers points de vue sous lesquels on peut envisager la notion d'explication scientifique, et il insiste sur la valeur et le rôle des théories établies par les savants modernes. Cet ouvrage est donc de nature à intéresser tous ceux qui tiennent à suivre le mouvement scientifique contemporain.

L'auteur examine d'abord les théories mathématiques et leur consacre trois chapitres : I. Sur le développement de l'analyse mathématique et ses rapports avec les autres sciences. — II. Sciences mathématiques et astronomie. — III. Mécanique et énergétique.

Puis viennent les théories qui forment la base de la physique de l'éther (IV), et de la physique de la matière et de la chimie (V). Les sciences naturelles font l'objet des trois chapitres suivants : VI, minéralogie et géologie ; VII, physiologie et chimie biologique ; VIII, botanique et zoologie.

Enfin un dernier chapitre traite des théories modernes en médecine et tout particulièrement des théories microbiennes.

Grâce aux annotations très documentées des traducteurs, l'édition alle-

mande devient indispensable à ceux qui désirent avoir plus de développement sur les théories exposées par M. Picard.

Theodor Schmid. — **Darstellende Geometrie**, Band I (*Sammlung Schubert*, LXV). — 1 vol. in-8°, 279 p. et 170 fig.; relié, 7 M.; G. J. Gœschen, Leipzig.

Le traité de M. Th. Schmid, professeur à l'Ecole technique supérieure de Vienne, a pour but de présenter les notions fondamentales et les applications des principales méthodes de projection de la Géométrie descriptive. Ce premier volume contient, dans une première partie, l'étude de la projection orthogonale sur trois plans rectangulaires d'après Monge. La seconde partie est consacrée à la sphère, au cylindre et au cône. L'auteur ne se borne pas aux notions que l'on donne généralement dans les cours élémentaires, mais il étudie aussi les propriétés qui sont utiles dans les constructions et les applications; on y trouvera, par exemple, les propriétés de la polarité et de l'antipolarité par rapport à un cercle ou une ellipse, la courbure d'une courbe et en particulier de l'ellipse et les triangles sphériques.

La troisième partie traite des courbes planes et des courbes gauches: courbure, inflexion, singularité des courbes planes, développantes, hélice, etc. Puis vient, dans une quatrième partie, l'étude des propriétés essentielles de la perspective axonométrique orthogonale et de ses applications à la représentation des solides géométriques.

H. Weber. — **Lehrbuch der Algebra.** Kleine Ausgabe in einem Bande. — 1 vol. in-8°, X-528 p.; 14 M.; Fr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig.

Le beau traité d'Algèbre supérieure de M. H. Weber est bien connu des mathématiciens. Il en a été publié une 2e édition (3 volumes) il y a quelques années et l'édition française, limitée à la première partie, a obtenu un succès bien légitime. Toutefois l'ouvrage s'adresse plutôt aux professeurs et aux jeunes mathématiciens, qu'aux débutants. C'est à ceux-ci que s'adresse cet abrégé qui forme en réalité un nouveau traité d'Algèbre supérieure et qui leur sera un guide précieux dans une première étude.

L'auteur a réuni dans ce volume les principales notions qui sont à la base de l'Algèbre supérieure dans son développement moderne. Après un premier chapitre consacré aux déterminants et aux substitutions linéaires, il étudie les fonctions entières et les fonctions symétriques. Puis viennent les chapitres consacrés aux éléments de la théorie des équations algébriques. La théorie des groupes prépare ensuite à l'étude de la division du cercle et à la résolution algébrique des équations. Pour terminer, l'auteur donne une introduction à la théorie des corps algébriques à laquelle il a fourni tant de belles contributions.

H. Weber u. J. Wellstein. — **Encyklopädie der Elementar-Mathematik.** — Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. III. *Angewandte Elementar-Mathematik*: 1. Mathematische Physik (2te Auflage); 2, Darstellende Geometrie, graph. Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, polit. Arithmetik u. Astronomie (2te Auflage). — 2 vol. reliés, gr. in-8°, 536 et 671 p.; 12 M. et 14 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Tandis que M. Weber a été amené à condenser son Algèbre, comme on l'a vu d'après le compte rendu ci-dessus, les auteurs du traité publié sous

le titre d'*Encyklopädie der Elementar-Mathematik* ont doublé le tome III consacré aux Mathématiques appliquées en introduisant de nouveaux chapitres ou en développant certains paragraphes.

On sait que les auteurs ont pris le terme de Mathématiques élémentaires dans son sens le plus large ; ils ont réuni dans leur traité tout ce qu'ils estiment devoir être acquis par les candidats à l'enseignement moyen dans une revision approfondie des mathématiques élémentaires. Les tomes I et II sont consacrés l'un à l'Algèbre, l'autre à la Géométrie. Le tome III embrasse les différentes branches des Eléments de mathématiques appliquées.

Cette nouvelle édition comprend deux volumes. Le premier, publié sous la direction de M. Rod.-H. Weber (Rostock), contient la mécanique, l'électricité et le magnétisme, les maxima et minima et leurs applications à la théorie de la capillarité, et les éléments de l'optique géométrique et de la théorie des ondes.

Le 2e volume comprend la Géométrie descriptive et les applications à la Statique graphique, par J. Wellstein ; le Calcul des probabilités et la théorie des erreurs, par J. Weber et J. Bauschinger ; les éléments de la théorie des assurances, par H. Bleicher ; l'Astronomie, par H. Bauschinger.

Tous ces chapitres peuvent être abordés par des lecteurs possédant seulement les mathématiques élémentaires telles qu'elles auront été approfondies dans les deux premiers volumes. Par une étude attentive des notions élémentaires développées dans cet important traité, les futurs professeurs saisiront toute la portée des propriétés qu'ils seront appelés à exposer dans les écoles moyennes. Nous leur recommandons vivement de compléter leurs connaissances dans les parties élémentaires des mathématiques en prenant pour guide l'Encyclopédie de MM. Weber et Wellstein. H. Fehr.

---

# BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

## 1. Publications périodiques :

**Atti della Reale Accademia dei Lincei.** Rendiconti. — Rome.

1er semestre 1912. — Mathématiques : L. Godeaux : Sur les transformations des surfaces algébriques laissant invariant un système continu de courbes. — L. Amoroso : Sopra un'estensione del teorema di Riesz-Fisher. — L. Bianchi : Sul gruppo automorfo delle forme ternarie quadratiche suscettibili di rappresentare lo zero. — (Id.) : Sulle superficie minime cerchiate di Riemann. — (Id.) : Sopra certi sistemi die superficie pseudosferiche collegati ai sistemi di Weingarten. — C. Bompiani : Sopra una trasformazione classica die Sophus Lie. — P. Eisenhart : Sopra le deformazioni continue delle superficie reali applicabili sul paraboloide a parametro puramente immaginario. — F. Enriques : Sopra una involuzione non razionale dello spazio. — (Id.) : Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellitiche.

— G.-C. Evans : Sull'equazione integro-differenziale di tipo parabolico. — G. Fubini : Sulle equazioni integrali di terza specie di Émile Picard. — G. Giorgi : Sulla commutabilità del segno lim col segno integrale, nei campi finiti. — (Id.) : Sulla teoria delle equazioni integrali generalizzate. — G. Lauricella : Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali. — E.-E. Levi : Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni (Gli integrali sotto forma parametrica). — A.-M. Molinari : Sul vantaggio che presenta un'estensione delle funzioni di Green. — L. Orlando : Sull'integrabilità delle funzioni di due variabili. — (Id.) : Sopra un teorema relativo agli insiemi. — (Id.) : Sopra una questione tecnica che si connette cogli integrali di Lebesgue. — M. Pannelli : Sopra alcune questioni riguardanti due fasci di curve dati in una superficie algebrica. — G. Peano : Sulla definizione di probabilità. — G. Ricci : Della trasformazione delle forme differenziali quadratiche. — L. Tonelli : Sugli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni. — R. Torelli : Sulle superficie algebriche contenenti due fasci ellittici di curve. — V. Volterra : Vibrazioni elastiche nel caso dell'eredità.

M. Abraham : Sulla teoria della gravitazione. — (Id.) : Sulla legge elementare della gravitazione. — (Id.) : Sulla conservazione dell'energia e della materia del campo gravitazionale. — U. Cisotti : Sopra l'efflusso a stramazzo. — (Id.) : Sull'intumescenza del pelo libero nei canali a fondo accidentato. — (Id.) : Sulle onde superficiali dovute a particolare conformazione del fondo. — (Id.) : Onde brevi causate da accidentalità periodiche del fondo. — G. Colonnetti : Sul principio di reciprocità. — A. Del Re : Le equazioni generali per la statica e la dinamica dei sistemi materiali an $n$ dimensioni ed a curvatura costante, nell'analisi di Grassmann. — E. Laura : Sopra le vibrazioni normali di un corpo elastico immerso in un fluido. — G. Lauricella : Sulla risoluzione delle equazioni integro differenziali dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per dati spostamenti di superficie. — T. Levi-Civita : Sulle onde di canale. — (Id.) : Sul teorema di Whittaker. — O. Tedone : Sulla deformazione di un cilindro di rotazione.

**Bulletin of the American Mathematical Society.** — New-York.

Vol. XVIII, fasc. 8 à 10. — D. C. Gillespie : Definite Integrals Containing a Parameter. — S. Lefschetz : On the $V_3^3$ with Five Nodes of the Second Species in $S_4$. — J. B. Shaw : What is Mathematics. — G. R. Clements : Implicit Functions Defined by Equations with Vanishing Jacobian. — E. W. Brown : Darwin's Scientific Papers. — E. B. Wilson : Mathematical Economics. — F. N. Cole : The April Meeting of the American Mathematical Society. — W. R. Longley : Proof of a Theorem Due to Picard.

Vol XIX, fasc. 1 et 2. — E. J. Miles : Surfaces of Revolution of Minimum Resistance. — F. N. Cole : The Nineteenth Summer Meeting of the American Mathematical Society. — G. A. Miller : A Few Theorems Relating to Sylow Subgroups. — A. R. Schweitzer : Theorems on Functional Equations. — S. Lefschetz : Double Curves of Surfaces Projected from Space of Four Dimensions.

**Journal für die reine und angewandte Mathematik.** — G. Reimer, Berlin.

Band 141, nº 4. — R. Jentsch : Ueber Integralgleichungen mit positivem Kern. — R. Remak : Ueber die Zerlegung der kommutativen Gruppen in

zyklische teilerfrede Faktoren. — L. Fœppl : Stabile Anordnungen von Elektronen im Atom. — W. Vogt : Metrische Untersuchungen der kubischen Hyperbel, insbesondere der gleichseitigen.

Band 142, nº 1. — L. Lichtenstein : Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. I. Die erste Randwertaufgabe. Allgemeine ebene Gebiete. — P. Bachmann : Ueber den Rest von $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ (mod $p$). — C. Burrau : Numerische Lösung der Gleichung $\frac{2^{-D}\log 2}{1-2^{-2D}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n^{-D}\log p_n}{1-p_n^{-2D}}$, wo $p_n$ die Reihe der Primzahlen von 3 an durchläuft. — R. Remak : Neuer Beweis eines Satzes des Herrn Burnside über spezielle endliche Gruppen. — J. Rosanes : Ein Satz über konjügierte Formen. — H. W. E. Jung : Ueber die ausgezeichneten Kurven algebraischer Flächen.

**Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo**, Direttore G.-B. Guccia.

Tome XXXIII. — Burali-Forti : Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale. — Plancherel (M) : Sur la sommation des séries de Laplace et de Legendre. — Sannia (G.) : Su due forme differenziali che individuano una congruenza o un complesso dirette. — L. Amoroso : Sopra un problema al contorno. — P. Appell : Sur des fonctions se rattachant aux fonctions Θ du quarième degré. — R. Mattson : Sur les fonctions entières d'ordre zéro. — D. Pompeiu : Sur une classe de fonctions d'une variable complexe. — L. Bellesini : Generalizzazione di un teorema di Segre. — F. Giudice : Teorema fondamentale per la risoluzione assintotica delle equazioni algebriche numeriche. — A. P. Grouzinzeff : Sur la transformation de Lorentz et son application aux milieux quelconques. — H. Villat : Le problème de Dirichlet dans un aire annulaire. — A. Terracini : Sulle $V_k$ che rappresentano più di $\frac{k(k-1)}{2}$ equazioni di Laplace di linearmente indipendenti. — A. Signorini : Esistenza di un'estremale chiusa dentro un contorno di Whittaker. — G. Ricci : Di un metodo per la determinazione di un sistema completo di invarianti per un dato sistema di forme. — L. Lichtenstein : Beiträge zur Theorie der Linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus. Unendliche Folgen positiver Lösungen. — A. Rosenblatt : Algebraische Flächen mit diskontinuirlich unendlich vielen birationellen Transformationen in sich. — M. Pieri : Sulla rappresentazione vettoriale delle congruenze di raggi. — W. Blaschke : Ein Beitrag zur Liniengeometrie. — E. Picard : Sur les couples de fonctions uniformes d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité. — P. Appell : Sur les liaisons non linéaires par rapport aux vitesses. — G. Vivanti : Sull'equazione di Eulero per gli integrali multipli. — A. Terracini : Sul carattere invariantivo di alcune espressioni vettoriali. P. Levy : Sur les équations aux dérivées fonctionnelles et leur application à la Physique mathématique. — F. Severi : Sur principio della conservazione del numéro. — G. Sannia : Nuovo metodo per lo studio delle congruenze e dei complessi di raggi. — F. A. Dall'acqua : Le equazioni di Hamilton-Jacobi che si integrani per separazione di variabili. — J. Pal : Beweis des

Lebesgue-Young'schen Satzes. — T. Levi-Civita : Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all'anello di Saturno. — H. Poincaré : Sur un théorème de Géométrie.

## 2. Livres nouveaux :

C. Bourlet. — **Cours de mathématiques**, Eléments d'analyse et de géométrie analytique à l'usage des élèves architectes et ingénieurs. 2e édition. — 1 vol. in-8°, VI-252 p. : Gauthier-Villars, Paris.

C. Bourlet. — **Eléments de Statique graphique.** — 1 vol. in-8°, 156 p. ; 7 fr. 50 ; Hachette & Cie, Paris.

C. Godfrey and A. W. Siddons. — **Elementary Algebra.** Volume II. — 1 vol. relié, 530 p. (avec solutions 44 p.) ; 2 s. 2 d. ; University Press, Cambridge.

C. Godfrey and A. W. Siddons. — **Four-Figures Tables** (Tables à 4 décimales). — 1 vol. de 40 p. ; Nine pence ; University Press, Cambridge.

J. L. S. Hatton. — **The Principles of Projective Geometry.** — 1 vol. relié, gr. in-8°, 336 p. ; 10 sh 6 ; University Press, Cambridge.

R. Mehmke. — **Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung.** — In zwei Bänden. Erster Band : Punktrechnung Erster Teilband. Das Rechnen mit Punkten, Geraden und Ebenen (erste Hälfte) Grundzüge der projektiven Geometrie, Anwendungen und Uebungen. — 1 vol. in-8°, VIII-394 p. ; 14 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Poincaré. — **Leçons sur les hypothèses cosmogoniques** professées à la Sorbonne. — 1 vol. in-8°, 2e édition avec un portrait en héliogravure et une Notice sur Henri Poincaré par E. Lebon. — 1 vol. LXX-294 p. ; 12 fr. : Hermann & fils, Paris.

C. Runge. — **Graphical Methods.** Ernest Kempton Adams Research Fund 1909-1910. — 1 vol. in-8°, IX-148 p. ; Columbia University Press, New-York.

L. Schrutka. — **Elemente der höheren Mathematik** für Studierende der Technischen und Naturwissenschaften. — 1 vol. in-8°, XXIV-569 p. ; 10 M. : F. Deuticke, Leipzig et Vienne.

P. Stäckel und H. Beck. — **Lösungen der Aufgaben** aus Borel-Stäckel Elemente der Mathematik. — I. Arithmetik und Algebra. II. Geometrie. — 2 fasc. in-8°, 44 et 39 p. ; 1 M. 50 le fasc. ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Vogt. — **Eléments de mathématiques supérieures.** *Edition réduite*, à l'usage des élèves chimistes et des élèves des écoles industrielles. — 1 vol. in-8°, VI-357 p. ; Vuibert & Nony, Paris.

*Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland :*

K. Ott. — **Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschienenindustrie.** — 1 fasc. in-8°, VI-158 p. ; 4 M.

J. Schröder. — **Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands** insbesondere Norddeutschlands. — 1 fasc. in-8°, XII-133 p. ; 6 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

# SUR L'EXISTENCE DES POTENTIELS ET DE LEURS DÉRIVÉES[1]

1. *Introduction.* La théorie du potentiel peut être subdivisée en deux parties qui se rattachent, l'une à la théorie des intégrales définies, l'autre à la théorie des équations aux dérivées partielles ; les potentiels sont, en effet, certaines intégrales définies multiples qui ont la propriété de satisfaire aux équations de Laplace ou de Poisson.

Dans la théorie de ces équations différentielles, la démonstration de l'existence, dans un domaine donné, de solutions soumises à certaines conditions aux limites du domaine constitue un premier pas vers la solution des problèmes d'intégration (problèmes de Dirichlet et de Neumann, par exemple). Quelque vif que soit aujourd'hui l'intérêt qui s'attache à ces questions, ce n'est pas d'elles qu'il s'agit dans cette conférence.

Si l'on se place au point de vue de la théorie des intégrales définies, les fonctions sous le signe somme, dans les intégrales qui expriment les potentiels et leurs dérivées, sont souvent infinies dans le domaine d'intégration ; on se trouve en présence d'intégrales *généralisées* (ou impropres) dont il s'agit d'établir la *convergence*, ou si l'on veut l'*existence*, en même temps qu'indiquer les limites dans lesquelles elles vérifient les équations différentielles mentionnées. Je voudrais passer en revue les principaux problèmes qui se présentent dans cette théorie et noter l'état actuel de leur solution, sans viser à être complet[2].

2. *Définition.* Considérons l'attraction newtonienne exercée sur une masse ponctuelle M par plusieurs autres *m*. Lagrange a remarqué le premier (1773) que les composantes de l'attraction, X, Y, Z, suivant les axes d'un système de coordonnées rectangulaires, sont les dérivées partielles $\frac{\partial\Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$, d'une même

[1] Conférence faite par M. Ch. Jaccottet (Lausanne) à la réunion de la Société mathématique suisse, le 9 mars 1913, à Neuchâtel.

[2] Les compléments et la bibliographie du sujet seront donnés dans l'article que prépare l'auteur pour l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, édition française, tome II, vol. 4, 24.

fonction $\Omega$ des coordonnées du point P $(x, y, z)$, où est située la masse M. La fonction $\Omega$ a pour valeur $\Omega = \sum_{(m)} \frac{fm\text{M}}{r_m}$, la somme s'étendant à toutes les masses $m$, $r_m$ désignant la distance de la masse $m$ considérée à la masse M.

Pour exprimer l'action exercée sur une masse ponctuelle M par un corps continu K, Lagrange suppose ce corps décomposé en masses élémentaires $dm$ et fait la somme de toutes les actions élémentaires. Les composantes de l'action totale sont encore les dérivées partielles d'une fonction $\Omega(x, y, z)$,

$$\Omega = \int_{\text{K}} \frac{f.\text{M}.dm}{r} = f.\text{M}.\int_{\text{K}} \frac{dm}{r};$$

$r$ désigne la distance de l'élément $dm$ au point *potentié* P $(x, y, z)$, siège de la masse M ; $f$ est un facteur constant dépendant du choix des unités, qui peut être pris égal à 1. Si, de plus, nous faisons M $= + 1$, nous avons $\Omega = \text{V} = \int_{\text{K}} \frac{dm}{r}$. C'est à cette fonction V que Green a donné le nom de *fonction potentielle* et Gauss celui de *potentiel* du corps K par rapport au point potentié P. La fonction V a ainsi la signification suivante : $\text{X} = \frac{\partial \text{V}}{\partial x}$, $\text{Y} = \frac{\partial \text{V}}{\partial y}$, $\text{Z} = \frac{\partial \text{V}}{\partial z}$ sont les composantes de l'attraction exercée par le corps K sur la masse $+ 1$ située en P $(x, y, z)$.

3. *Hypothèses physiques*. Le fait de considérer l'action totale comme la somme des actions élémentaires et d'exprimer le potentiel par une intégrale implique l'hypothèse que la matière est divisible à l'infini et que chacune des parcelles de matière, si petite soit-elle, possède la propriété d'attirer suivant la loi de Newton d'autres parcelles analogues, à toutes les distances quelque petites que soient ces distances. Or ceci paraît en contradiction avec l'hypothèse de la constitution moléculaire de la matière et l'existence des forces intra-moléculaires.

Mais il y a plus. Dans le but de pouvoir traiter commodément l'intégrale V, on fait d'autres hypothèses sur la répartition des masses à l'intérieur du corps K. On admet en général la continuité et la dérivabilité de la fonction qui mesure la masse, de manière à assurer l'existence de la *densité*. On sait que la densité en un point N du corps est la limite de la densité moyenne d'un élément de volume entourant le point N, lorsque cet élément de volume s'évanouit en ce point. La densité au point N est ainsi $\varrho = \lim_{\Delta \text{K}=0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta \text{K}}\right) = \frac{dm}{d\text{K}}$, $\Delta m$ désignant la masse contenue dans

l'élément de volume $\varDelta$K. En introduisant dans l'intégrale V cette fonction $\varrho$, le potentiel prend la forme habituelle $V = \int\limits_K \frac{\varrho dK}{r}$.

On peut se demander si, dans ces conditions, le potentiel ne perd pas sa signification physique ou si, tout au moins, V représente avec une approximation suffisante l'action réelle du corps K.

Avant d'aller plus loin, il faut remarquer que les physiciens n'ont pas les mêmes idées sur la constitution de la matière. Les avis oscillent entre ces deux conceptions extrêmes : une matière continue au sens exact du mot, et une matière formée de corpuscules très petits isolés les uns des autres, les molécules. L'opinion la plus généralement admise aujourd'hui est intermédiaire. Je rappelle seulement, à ce propos, la superbe conférence dans laquelle M. le professeur P. Weiss[1] nous montrait l'atome comme un complexe encore peu connu de particules de nature très différente, parmi lesquelles on distinguait les particules $\alpha$, les électrons et les magnétons.

Les mathématiciens, comme le fait remarquer M. F. Klein dans son cours de Calcul différentiel et intégral avec applications à la géométrie (autogr., Leipzig 1902), n'ont pas à décider laquelle de ces hypothèses renferme la plus grande part de vérité. Leur rôle est de montrer jusqu'à quel point ces différentes hypothèses peuvent conduire aux mêmes résultats. Et c'est là, dit-il, l'un des grands problèmes de ce qu'il appelle la « mathématique des approximations. »

4. *Approximation des potentiels physiques par des intégrales définies.* C'est dans cet ordre d'idées que se place J. G. Leathem, dans sa brochure « Volume and Surface integrals used in physics » (Cambridge 1905). Il admet la constitution moléculaire de la matière et, exagérant volontairement son point de vue, considère un corps comme une agglomération de corpuscules extrêmement petits séparés les uns des autres par des espaces vides. Non seulement cette matière ne peut être subdivisée à l'infini, mais il existe un dernier degré de subdivision au delà duquel les parcelles de matière n'ont plus la propriété d'attirer d'après la loi de Newton. Il appelle *particules* les plus petites parcelles possédant cette propriété. Rien n'empêche de se figurer ces particules comme étant du même ordre de grandeur que les molécules. Le potentiel se présente alors sous la forme d'une somme, $\Sigma \frac{m}{r}$, que l'auteur veut représenter approximativement par l'intégrale $\int\limits_K \frac{\varrho dK}{r}$. L'évaluation de cette approximation ou, si l'on veut, l'examen de la

[1] Société helvétique des sciences naturelles, session d'Altdorf 1912.

question si les deux hypothèses de la continuité et de la discontinuité de la matière conduisent approximativement au même résultat, fait l'objet du premier chapitre de la brochure.

Dans ce but, il doit tout d'abord définir la densité $\varrho$ et veut s'arranger de manière que cette fonction soit en général continue. Il introduit pour cela la notion de *petitesse physique* (physical smallness). Un corps, par exemple, sera considéré comme physiquement très petit lorsqu'il sera imperceptible à nos sens, mais non pas tel qu'il doive être considéré comme ayant les propriétés physiques d'une molécule ; il doit au contraire renfermer un grand nombre de molécules. On estime qu'un gaz, à pression et température normales, renferme $4 \times 10^{19}$ molécules par $cm^3$. Un cube dont le côté serait égal à la longueur d'onde de la lumière de sodium, soit $6 \times 10^{-5}$ cm., renfermerait encore 8,000,000 de ces molécules. Si l'on considère 8 millions comme un grand nombre, on pourrait prendre cette longueur d'onde comme spécimen de petitesse physique et désigner son ordre de grandeur par $\varepsilon$. La densité en un point N du corps est alors définie comme la densité moyenne d'une partie de ce corps entourant N et dont toutes les dimensions sont de l'ordre $\varepsilon$.

Dans cette hypothèse, Leathem cherche l'ordre de grandeur de la différence entre $\Sigma\frac{m}{r}$ et $\int\limits_{K}\frac{\varrho dK}{r}$ et il arrive à la conclusion que cet ordre est $\varepsilon$ ; tandis que l'ordre de grandeur de la différence entre les composantes des attractions correspondant à ces potentiels est $\varepsilon \log \varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$. La question posée plus haut peut donc être considérée comme affirmativement résolue. Il faut cependant remarquer que la définition de la densité est quelque peu imprécise ; l'auteur ne s'en défend pas ; il s'adresse à des étudiants en physique et n'a pas l'intention d'entrer dans des discussions mathématiques délicates. Ainsi, il ne fait que rendre plausible la continuité qu'il attribue à la fonction $\varrho$.

5. *Comportement des potentiels en dehors des masses attirantes.* Considérons maintenant les potentiels mathématiques exprimés par des intégrales de la forme $V = \int\limits_{K}\frac{\varrho dK}{r}$ s'étendant à certaines masses. Celles-ci peuvent être distribuées dans un volume, sur une surface ou une ligne, ou encore en des points isolés. On obtiendra, suivant les cas, des potentiels de corps, de surface, de ligne ou de points. Nous considérerons aussi les potentiels de double couche qu'il est superflu de définir ici. Si le point potentié P se trouve à une distance finie de toute masse potentiante, la distance $r$ ne devient jamais infiniment petite et, pourvu que la densité $\varrho$ soit une fonction intégrable, l'intégrale V existe et représente une fonction des coordonnées du point P.

Poincaré[1] a démontré directement que ce potentiel V est développable aux environs d'un point $(a, b, c)$, extérieur aux masses potentiantes, en une série entière $\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}(x-a)^\alpha(y-b)^\beta(z-c)^\gamma$ ; cette série converge absolument dans les environs du point $(a, b, c)$ sous la seule condition que $\int_K |\varrho|\, dK$ existe.

Un potentiel a, par suite, des dérivées de tous ordres, que l'on obtient en dérivant sous le signe somme. Les dérivées premières satisfont à la relation suivante : Soit $s$ une direction donnée par ses cosinus directeurs $\alpha, \beta, \gamma$ ; soit $\frac{\partial}{\partial s} = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}$, et désignons par $X_s$ la composante, suivant la direction $s$, de l'attraction qu'exerce le corps sur la masse $+1$ située en P, on a

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial s} = \int_K \varrho \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s} dK = X_s \ .$$

Les dérivées secondes satisfont à l'équation de Laplace :

$$(2) \qquad \Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \ .$$

Ces propriétés appartiennent à tous les potentiels mentionnés, dans l'hypothèse que le point P est à une distance finie des masses potentiantes.

Dans tout ceci la densité $\varrho$ n'a joué qu'un rôle très effacé, elle aura sa revanche tout à l'heure. Mais auparavant, je voudrais signaler une question intéressante examinée récemment par MM. Pizetti et Lauricella[2]. Supposons que l'on donne le volume occupé par un corps et l'action externe du corps, c'est-à-dire son potentiel extérieur, quelle est la répartition des masses à l'intérieur du corps ? Ainsi formulé, le problème a une infinité de solutions et on peut se demander quel est le degré d'indétermination de la densité $\varrho$ ($\varrho$ est supposée continue et dérivable deux fois) ? Lauricella arrive à la conclusion que $\Delta\varrho$ est complètement arbitraire. En d'autres termes, $f(x, y, z)$ désignant une fonction arbitrairement choisie à l'intérieur du corps, on peut poser $\Delta\varrho = f(xyz)$ ; il existe alors une fonction $\varrho$, satisfaisant à cette équation différentielle, telle que le potentiel $\int_K \frac{\varrho dK}{r}$ soit, à l'extérieur du corps, identique au potentiel prescrit. Cette question est

[1] *Acta mathematica*, 22 (1898) p. 89.

[2] P. Pizetti, *Atti della R. Acc. Lincei* (5) 18, 1er sem., p. 211 ; *Annali di Mat.* 17 (1910), p. 225. — G. Lauricella, *Atti della R. Acc. Lincei* (5) 20, 1er sem., p. 99.

née de l'étude de la répartition des masses à l'intérieur du géoïde, dont l'action externe est assez bien connue.

6. *Potentiel d'un corps par rapport à un point intérieur.* Quand le point P est à l'intérieur du domaine K occupé par les masses potentiantes, la distance $r$ devient nulle dans le champ d'intégration, savoir au point P; la fonction sous le signe somme, dans les intégrales qui expriment V et ses dérivées, devient infinie en ce point. Ces intégrales, comme l'a fait remarquer Gauss, n'ont plus de sens, à moins d'être définies à nouveau, soit généralisées. Pour cela, on entoure le point P d'une surface $\sigma$, limite d'un certain volume $\tau$; l'intégrale à généraliser est alors étendue au domaine $K - \tau$. Puis on modifie la surface $\sigma$ de manière que toutes ses dimensions deviennent infiniment petites et qu'elle s'évanouisse au point P. Si l'intégrale étendue au domaine $K - \tau$ tend vers une limite finie lorsque $\sigma$ s'évanouit en P, elle est dite *convergente*, et cette limite est prise comme valeur de l'intégrale généralisée; si, au contraire, la limite n'existe pas ou est infinie, l'intégrale est dite *divergente;* la généralisation proposée n'a pas de sens. La convergence est de deux sortes : lorsque l'existence et la valeur de la limite sont indépendantes de la succession des formes prises par la surface $\sigma$ en s'évanouissant en P, l'intégrale est dite *absolument convergente,* dans le cas contraire, *semi-convergente.*

Revenons au potentiel. On démontre aisément la convergence absolue de l'intégrale V pour tous les points intérieurs, puis sa continuité, en montrant que V possède des dérivées premières. Le potentiel d'un corps est ainsi continu dans tout l'espace et y possède des dérivées premières.

Ces dérivées premières peuvent-elles être obtenues, comme dans le cas des points extérieurs, en dérivant sous le signe somme ?

La réponse est affirmative. Pour le démontrer et étendre ainsi aux points intérieurs la relation (1), il faut, 1°, non seulement établir l'existence de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$, mais encore celle de l'intégrale $X_s$, puis 2°, montrer l'égalité de ces deux limites.

Gauss et, à sa suite, Dirichlet et Riemann se contentent d'établir l'existence de $X_s$. On compléterait la démonstration en établissant le théorème suivant, que démontre J.-G. Leathem[1] dans les cas intéressant la théorie du potentiel et sous la condition que $\varrho$ soit dérivable : La dérivée d'une intégrale généralisée, au point P où la fonction à intégrer devient infinie, s'obtient en dérivant sous le signe somme, à la condition que l'intégrale primitive et celle obtenue après la dérivation soient convergentes.

La première démonstration satisfaisante de l'égalité (1) est due

[1] Loc. cit. p. 23.

à M. Bouquet[1]; elle est valable sans autre condition pour $\varrho$ que celle de l'intégrabilité.

7. *Equation de Poisson.* Considérons maintenant les dérivées secondes. Poisson remarqua le premier (1813) que l'équation de Laplace n'est plus vérifiée lorsque P appartient aux masses potentiantes et qu'elle devait être remplacée par la suivante :

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho \qquad \text{ou} \qquad \Delta V = -4\pi\rho ,$$

$\varrho$ étant la valeur de la densité au point P. Cette équation est dite l'*équation de Poisson. Etablir l'existence des dérivées secondes, puis l'équation de Poisson, est le problème capital de cette théorie.*

Ici la densité $\varrho$ est au premier plan, les progrès sont marqués par des hypothèses de moins en moins restrictives concernant cette fonction. Nous pouvons distinguer quatre périodes, suivant les hypothèses dans lesquelles l'équation de Poisson a été établie :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1re période : | | $\varrho$ constant | Poisson (1813). |
| 2me | » | $\varrho$ dérivable (analytique) | Gauss (1840), (E. Schmidt). |
| 3me | » | $\varrho$ continue | Hölder (1882), Morera. |
| 4me | » | $\varrho$ intégrable | H. Pétrini (1899). |

*1re période.* Poisson, non seulement démontra l'équation qui porte son nom dans le cas des corps homogènes, mais il donna de ce théorème, dans le cas général, trois démonstrations différentes. Ces démonstrations doivent être aujourd'hui considérées comme insuffisantes, Poisson admettant implicitement l'existence de $\Delta V$ et se bornant à calculer la valeur de cette expression. La même observation s'adresse aux démonstrations de O. Rodrigues, Ostrogradsky, Sturm, Pagani.

*2me période.* — C'est à Gauss[2] qu'est due la première démonstration satisfaisante de l'équation de Poisson . Cet auteur admet que $\varrho$ possède des dérivées premières finies ; mais, comme il le fait remarquer, sa démonstration n'exige que la dérivabilité (Gauss dit la continuité), de $\varrho$ le long de chacun des rayons vecteurs partant du point P. Gauss établit l'existence et la continuité des dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ , etc., à l'intérieur du corps, leur absence de signification à la surface, les discontinuités qu'elles éprouvent lorsqu'on passe de l'intérieur à l'extérieur du corps et déduit de ces résultats l'équation de Poisson. Il s'élève contre l'idée émise par Poisson, Ostrogradsky et Pagani de poser $\Delta V = 2\pi\varrho$ pour les points de la surface, car $\Delta V$ n'y a pas de sens précis.

[1] Publiée par Briot, *Théorie mécanique de la chaleur*; Picard, *Traité d'Analyse*, I, p. 165.
[2] Une traduction française du célèbre mémoire de Gauss se trouve dans le *Journal de Liouville*, 7 (1842).

La démonstration de Gauss fut reprise et modifiée par Dirichlet et dès lors les démonstrations du théorème de Poisson se font de plus en plus nombreuses.

Le point de vue de Gauss ($\varrho$ dérivable) est naturellement celui de presque tous les traités de la théorie du potentiel. On le retrouve même dans certains travaux modernes : E. Schmidt[1], suivant les traces de H. Bruns[2], considère la densité $\varrho$ et le potentiel comme des fonctions analytiques et ramène la question d'existence des dérivées au théorème d'existence des solutions analytiques des équations aux dérivées partielles.

Il faut encore citer la démonstration donnée par Kronecker dans le *Journal de Crelle* de 1869, quoique cette démonstration soit incomplète, Kronecker se voyant obligé à admettre l'existence des dérivées secondes. Pour la première fois, semble-t-il, on abandonne l'idée de $\varrho$ dérivable et propose comme idéal de soumettre $\varrho$ aux conditions les moins restrictives possibles. De plus, Kronecker fait voir que la difficulté de la démonstration provient de l'hypothèse du point matériel que l'on suppose placé au point P. Il remplace ce dernier, par exemple par une petite sphère homogène, et établit facilement, pour l'action réciproque des deux corps, un théorème correspondant à celui de Poisson. En faisant tendre la sphère vers un point matériel, il obtient le théorème de Poisson ; c'est ce passage à la limite qui est la partie difficile de le démonstration et oblige Kronecker aux restrictions indiquées.

3$^{me}$ *période*. Les progrès de la théorie des fonctions vont permettre un nouvel avancement de la solution du problème. Dans sa dissertation, présentée à l'Université de Tubingue en 1882, O. Hölder reprend l'étude de l'existence des potentiels et de leurs dérivées en considérant la densité $\varrho$ comme *intégrable*. Mais l'étude des dérivées secondes est faite en exigeant que la fonction $\varrho$ satisfasse, dans les environs du point P $(x, y, z)$, à la condition

$$(4) \qquad |\rho(\xi, \eta, \zeta) - \rho(x, y, z)| < Ar^{\lambda}$$

A et $\lambda$ étant deux constantes positives, $\lambda < 1$. Cela revient à considérer $\varrho$ comme continu au point P, avec encore une certaine restriction. Hölder trouve alors pour $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ l'expression

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{R=0} \int_{(K)-(R)} \rho \cdot \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} dK - \frac{4}{3}\pi\rho_0$$

dans laquelle $\varrho_0$ est la densité au point P, (K) désigne le domaine

[1] *Mathematische Annalen*, 68 (1909) p. 107.
[2] Dissertation. Berlin 1871.

occupé par le corps, (R) une sphère de rayon R et de centre P. De ces résultats découle l'équation de Poisson.

Pour assurer la continuité de ces dérivées, l'auteur doit modifier un peu la condition (4) et exiger que

$$| \rho(x', y', z') - \rho(x'', y'', z'') | < A r^{\lambda} ,$$

$(x', y', z')$ et $(x'', y'', z'')$ étant deux points quelconques des environs de P.

Les résultats de Hölder ont été retrouvés et quelque peu étendus par G. Morera[1], dans un travail admirable de clarté et de simplicité. Morera commence par distinguer la convergence absolue et la semi-convergence, puis montre que l'intégrale figurant dans la formule de Hölder est semi-convergente. Il obtient la formule

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - \rho_0 \int_S \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} dS + \int_K (\rho - \rho_0) \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi^2} dK ,$$

dans laquelle l'intégrale de volume est absolument convergente, grâce à la présence du facteur $\varrho - \varrho_0$ ; S désigne la surface qui limite le corps K et $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée suivant la normale à cette surface. Les hypothèses faites sont : 1° la densité $\varrho$ est finie au point P, $\varrho_P = \varrho_0$ ; 2° $\varrho$ est intégrable ; 3° l'intégrale $\int_0^r \frac{\rho - \rho_0}{r} dr$ est finie et déterminée le long de chacun des rayons vecteurs partant de P($r = 0$). Cette dernière condition entraîne la continuité de $\varrho$ au point P et même la restreint. En remplaçant l'intégrale absolument convergente par d'autres semi-convergentes, Morera retrouve les résultats de Hölder.

4[me] *période*. La solution complète du problème de Poisson est due à Henrik Pétrini. Dans un mémoire très étendu, paru en 1908 dans les Acta mathematica, cet auteur rassemble et complète les résultats qu'il avait publiés dès 1899 dans divers périodiques suédois.

M. Pétrini ne soumet tout d'abord la fonction $\varrho$ à aucune autre condition que celle de l'intégrabilité et il obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des dérivées secondes du potentiel. Il est ensuite obligé d'ajouter à la condition d'intégrabilité de $\varrho$, celle de continuité le long de chacun des rayons vecteurs partant du point P : si au lieu de coordonnées rectangulaires, on introduit des coordonnées polaires $r$, $\theta$, $\psi$ et

---

[1] *Rendiconti d. Instituto Lombardo* (2) 20 (1887), p. 302, 543.

pose $r = ht$, $u = \cos\theta$, la densité $\varrho$ doit être telle que $\lim_{h=0} \varrho(ht, \theta, \psi)$ existe et soit égale à une fonction $\varrho(u, \psi)$ intégrable le long de chacun des rayons vecteurs issus de P. La condition nécessaire et suffisante de l'existence de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ par exemple, est alors la convergence pour $h = 0$ de l'intégrale

$$\text{(5)} \qquad K_h = \int_{(h)}^{(a)} \rho \cdot \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} dK ,$$

dans laquelle $(h)$ et $(a)$ sont des sphères de centre P et de rayons $h$ et $a$, $a$ étant une constante.

L'existence des dérivées secondes $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ une fois assurée, $\Delta V$ se présente sous la forme d'une intégrale de surface qui devient égale à $-4\pi\varrho$ lorsqu'on suppose $\varrho$ continue au point P. L'équation de Poisson, $\Delta V = -4\pi\varrho$, est ainsi établie dans le cas où $\varrho$ est continue et sous condition de convergence de trois intégrales analogues à (5). En spécialisant, Pétrini retrouve les résultats de Morera, Hölder et Gauss.

La continuité de $\varrho$ ne suffit pas à assurer l'existence des dérivées secondes. M. Pétrini donne comme exemple d'une densité continue dans tout l'espace et pour laquelle les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, etc., n'existent pas au point P $(x, y, z)$, la fonction

$$\text{(6)} \qquad \rho = \frac{(\xi - x)^2}{r^2 \log \frac{1}{r}} , \qquad r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 .$$

Le laplacien $\Delta V$ du potentiel correspondant n'existe pas non plus et l'équation de Poisson est en défaut. Mais si l'on généralise cette équation en définissant $\Delta V$ comme suit :

$$\text{(7)} \qquad \overline{\Delta V} = \lim_{\substack{h_1=0\\h_2=0\\h_3=0}} \left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial V(x+h_1, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial V(x, y+h_2, z)}{\partial y} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}\right) + \frac{1}{h_3}\left(\frac{\partial V(x, y, z+h_3)}{\partial z} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}\right)\right] ,$$

les quantités $h_1$, $h_2$, $h_3$ tendant vers zéro de manière que

$$\lim \left(\frac{h_i}{h_k}\right) = c_{ik} = \text{constante} \neq 0 , \qquad i, k = 1, 2, 3 ,$$

alors, on a la relation

$$\overline{\Delta V} = -4\pi\rho .$$

Ce fait se présente chaque fois quand la densité $\rho$ est continue, alors même que les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ n'existeraient pas isolément.

Dans le cas général, où $\rho$ est soumis aux deux seules conditions d'intégrabilité et de continuité le long des rayons issus de P, l'expression $\overline{\Delta V}$, (7), existe *toujours*, mais on a *l'équation de Poisson généralisée*

$$\overline{\Delta V} = -4\pi\rho + \theta , \tag{8}$$

$\theta$ représentant une fonction dont l'intégrale est nulle dans n'importe quelle partie du domaine d'intégration ; cette fonction $\theta$ dépend de la formation de l'expression $\overline{\Delta V}$, c'est-à-dire des constantes $c_{ik}$. Réciproquement l'équation $\overline{\Delta V} = -4\pi\rho$ n'a en général pas de solution. Mais il existe une et une seule fonction $\theta$ à intégrale nulle, telle que l'équation de Poisson généralisée (8) ait une solution, savoir $V = \int\limits_K \frac{\rho dk}{r} + U$, U désignant une fonction harmonique quelconque.

En *résumé*, dans le cas général, avec les deux conditions imposées à $\rho$, les dérivées secondes satisfont à l'équation de Poisson généralisée, (8). Lorsque, de plus, $\rho$ est continue sans restriction, on est certain d'avoir la relation $\overline{\Delta V} = -4\pi\rho$, mais non encore l'équation de Poisson ordinaire. Pour être assuré de l'existence de cette dernière, il faut restreindre la continuité par l'adjonction d'une condition analogue à celles de Hölder ou de Morera.

8. *Dérivées secondes dans des directions quelconques.* Pétrini fait une étude complète des dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$. Considérons deux éléments rectilignes, $ds_1$ et $ds_2$, partant du point P et allant dans des directions déterminées : désignons par $P_1$ et $P_2$ leurs extrémités. Nous savons que $\frac{\partial V}{\partial s_1}$ existe toujours. Pétrini définit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = \lim_{ds_2=0} \left\{ \frac{1}{ds_2} \left[ \left(\frac{\partial V}{\partial s_1}\right)_{P_2} - \left(\frac{\partial V}{\partial s_1}\right)_{P} \right] \right\} \tag{9}$$

et cherche les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de cette limite. En général, les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1}$ sont différentes, l'auteur établit les conditions de leur égalité. Puis il

s'occupe de la continuité de ces dérivées quand la densité est continue.

Le comportement de ces dérivées dans le voisinage de la surface d'un corps est examiné tout d'abord dans le cas typique de deux corps homogènes, de densités différentes $\varrho_1$ et $\varrho_2$, en contact suivant une surface $\Sigma$. Le cas, plus général, de densités continues dans les deux corps se ramène, sous certaines conditions, au précédent et conduit alors aux mêmes résultats.

Nous avons vu que Gauss n'attribuait aucun sens aux dérivées secondes en un point de la surface $\Sigma$. Au contraire, les dérivées dans les *directions* $ds_1$ et $ds_2$, définies par la formule (9), ont souvent une valeur parfaitement déterminée en un tel point $P_0$. La nature de la surface aux environs de ce point a sur cette détermination une certaine influence. M. Pétrini établit les conditions d'existence de $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ lorsque le point $P_0$ est régulier, comme aussi lorsqu'il est conique ou de rebroussement. En un point conique, la dérivée est en général infinie, sauf dans certaines directions déterminées pour lesquelles elle est toujours finie. En un point de rebroussement, la dérivée peut exister dans toutes les directions.

Pour établir la discontinuité lorsqu'on traverse la surface $\Sigma$ au point $P_0$, on doit considérer la limite de la dérivée au point P lorsque ce point s'approche du point $P_0$ en suivant un certain chemin. Cette limite dépend en général du chemin suivi. Cependant, dans le cas de deux corps homogènes séparés par la surface $\Sigma$, supposée régulière en $P_0$, si le chemin est entièrement situé dans l'un des corps et n'est pas tangent à la surface de séparation en $P_0$, la limite existe et ne dépend pas du chemin parcouru ; elle ne dépend que du corps dans lequel s'est effectué le rapprochement. Nous avons alors trois quantités à considérer :

1° $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ en $P_0$ ;

2° $\lim\limits_{P=P_0}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_P$, pour un déplacement dans le corps de densité $\varrho_1$ $=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_1$

3° $\lim\limits_{P=P_0}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 . \partial s_2}\right)_P$, pour un déplacement dans le corps de densité $\varrho_2$ $=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_2$

Les limites 2° et 3° sont en général différentes, leur différence D est la *discontinuité* de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ quand on traverse la surface ; on trouve $D = 4\pi(\varrho_1 - \varrho_2)\mu_1\mu_2$, $\mu_1$ et $\mu_2$ sont les cosinus des angles que font les directions $ds_1$, $ds_2$ avec la normale à la surface en $P_0$. La valeur 1° est égale à la valeur 2° ou à la valeur 3° suivant que

l'élément $ds_1$ est situé dans le corps de densité $\varrho_1$, ou dans l'autre. En d'autres termes, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ s'approche de sa valeur en $P_0$ lorsque le chemin est situé dans le corps qui renferme l'élément $ds_1$.

9. *Potentiels de simple couche.* Les questions d'existence concernant ces potentiels sont analogues à celles examinées à propos des potentiels de corps et l'évolution des deux théories s'est faite à peu près parallèlement.

La surface S qui porte la couche attirante doit être une surface à deux côtés que nous distinguons par les indices 1) et 2). Le potentiel $V = \int_S \frac{\sigma dS}{r}$, dans lequel $\sigma$ désigne la densité superficielle $\left(\sigma = \frac{dm}{dS}\right)$, est, en général, une intégrale absolument convergente en tout point de la surface S et qui représente une fonction continue dans tout l'espace, même lorsqu'on franchit la surface.

*Dérivées premières.* La relation $\frac{\partial V}{\partial s} = X_s = \int_S \sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s} dS$, valable en tout point de l'espace non situé sur S, n'a plus de sens en un point $P_0$ de cette surface, l'intégrale du second membre étant semi-convergente.

On définit $\frac{\partial V}{\partial s}$ en un point $P_0$ de S comme nous avons défini, dans le numéro précédent, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ en un point de $\Sigma$. Nous aurons aussi à considérer la limite de $\frac{\partial V}{\partial s}$ en un point P, lorsque ce point P s'approche de $P_0$. L'existence de ces deux valeurs dépend: 1°, de la nature de la surface S aux environs du point $P_0$; 2°, du comportement de $\sigma$ sur cette portion de surface; 3°, la seconde limite dépend en plus du chemin qu'a suivi P.

Dans certains cas, en particulier lorsque la surface possède un plan tangent déterminé en $P_0$ et que $\sigma$ est continue en ce point, la limite de $\frac{\partial V}{\partial s}$, quand le chemin ne touche, ni ne traverse la surface, ne dépend que du côté de la surface S auquel aboutit le point P lorsqu'il arrive en $P_0$. Comme dans le numéro précédent, on a, dans ce cas, 3 valeurs à distinguer : $\frac{\partial V}{\partial s}$ en $P_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_1$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_2$. La différence entre ces deux dernières est la discontinuité lorsqu'on franchit la surface en $P_0$.

Dans la première période de recherches, on considéra des surfaces analytiques régulières et une densité $\sigma$ dérivable autant de fois que cela était utile. Les dérivées normales attirent d'abord l'attention. COULOMB (1788) avait déjà remarqué leur discontinuité

sous la forme suivante : l'attraction d'une couche infiniment mince sur deux points matériels situés de part et d'autre de la couche est différente : quand l'une des composantes normales est nulle, l'autre est égale à $4\pi$ fois la densité au point correspondant de la couche. POISSON (1811) après avoir indiqué que la somme des composantes normales est égale à $4\pi\sigma$ et que les composantes tangentielles sont continues, énonce la loi de discontinuité d'une composante quelconque ; il communique, en l'étendant au cas général, une démonstration donnée par LAPLACE pour le cas particulier d'une surface attirante de niveau et basée sur des considérations physiques. La première démonstration analytique est due à CAUCHY (1815). GREEN (1828) énonça le premier le théorème sous sa forme actuelle en considérant le potentiel au lieu des attractions ; il déduit cette loi à l'aide de sa formule de transformation des intégrales multiples.

C'est à GAUSS (1840) qu'est due la première analyse rigoureuse de la question. Mettant en évidence les hypothèses concernant la surface S (existence d'un plan tangent, courbure finie, infinie sous certaines conditions) Gauss montre que l'équation $\frac{\partial V}{\partial s} = X_s$ n'a plus de sens en un point de la surface. Il établit, pour le cas d'une densité dérivable, l'existence des limites $\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_1$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_2$ et calcule la discontinuité de $\frac{\partial V}{\partial s}$.

HÖLDER (1882) impose à la densité superficielle $\sigma$ la condition (4) qu'il avait imposée à la densité d'un corps. Il représente la surface par les équations $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ et prescrit aux six dérivées premières de ces fonctions une condition de continuité analogue :

$$|x'(u_0 + \xi, v_0 + \eta) - x'(u_0, v_0)| < A \cdot l^{\mu} , \qquad l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} ,$$

A et $\mu$ sont des constantes positives, $\mu < 1$ ; il a aussi une condition spéciale pour le bord de la surface. Dans ces hypothèses, il établit la loi des discontinuités de $\frac{\partial V}{\partial s}$, puis le comportement de cette dérivée dans les environs du bord de la surface : $\frac{\partial V}{\partial s}$ devient infinie logarithmiquement quand P s'approche indéfiniment de ce bord, et il donne une expression asymptotique de $\frac{\partial V}{\partial s}$.

WEINGARTEN[1], MORERA[2], LIAPOUNOFF[3] et d'autres apportent encore certaines simplifications ou contributions. Mais ici aussi, c'est H. PÉTRINI qui, dans les mémoires déjà cités, parvient à élucider

[1] *Acta mathematica*, 10 (1887), p. 303.
[2] Loc. cit., p. 543.
[3] *Journal de Math.* (6), 4 (1898), p. 241.

définitivement un grand nombre de questions. Il libère la surface S de l'obligation de posséder un plan tangent en utilisant les surfaces qu'il appelle *physiquement régulières*. Une surface est dite physiquement régulière au point $P_0$, lorsque les conditions suivantes sont remplies :

1° Il doit exister une ligne à tangentes déterminées ne coupant la surface qu'en $P_0$ et dont tous les points, non situés dans les environs de $P_0$, sont à une distance finie des autres points de la surface.

2° Il doit exister un plan $\pi$ passant par $P_0$, tel que toutes les normales au plan, menées par les points de $\pi$ situés dans les environs de $P_0$, ne rencontrent la surface qu'en un nombre fini de points.

Un cylindre de révolution, dont l'axe passe par $P_0$ et est normal au plan $\pi$, détache de la surface S une portion S'. On peut se borner à considérer le potentiel de cette portion S', $V' = \int_{S'} \frac{\sigma dS}{r}$.

3° Le plan $\pi$ doit pouvoir être choisi de façon que $V'$ puisse se mettre sous la forme $\int_{\omega'} \frac{\delta d\omega}{r}$, où $d\omega$ est la projection de l'élément $dS$, $\omega'$ la projection de S', sur le plan $\pi$, $\delta$ ne devant jamais devenir infini ou indéterminé.

Le plan $\pi$ rend le même service qu'aux autres auteurs le plan tangent.

Des résultats obtenus par Pétrini, nous ne citons, comme exemple, que le suivant :

Lorsqu'en un point $P_0$ de S la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ existe, la limite de $\frac{\partial V}{\partial s}$, quand P s'approche de $P_0$ par un chemin non tangent à la surface en $P_0$, existe aussi. Cette limite est égale à la valeur de $\frac{\partial V}{\partial s}$ en $P_0$ dans les deux cas suivants :

1° Si la dérivée est prise dans la direction de la tangente en $P_0$ au chemin suivi par le point P ;

2° Si la fonction $\sigma$ est continue en $P_0$ et si la surface y a un plan tangent déterminé.

*Dérivées secondes*. Green détermina, déjà en 1828, la discontinuité de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}$ lorsque la surface qui porte la couche est en même temps surface de niveau. P. Paci étendit les résultats de Green au cas d'une distribution superficielle générale. Le comportement des autres dérivées secondes, trouvé par Carl Neumann, fut justifié par Beltrami et Horn, puis récemment par Poincaré[1], Korn[2] et T. J. I'A. Bromwich[3].

[1] Théorie du Potentiel newtonien, Paris 1899, p. 232.
[2] Lehrbuch der Potentialtheorie I, Berlin 1899, p. 49.
[3] *Arkiv der Math. u. Physik* (3) 2 (1902), p. 295.

H. Pétrini, dans son grand travail des Acta mathematica, reprend l'étude de ces dérivées en lui donnant l'ampleur avec laquelle il avait traité les autres questions. En particularisant ses résultats, il retrouve ceux de Poincaré.

*Dérivées troisièmes.* Je ne connais aucun travail s'occupant des dérivées troisièmes des potentiels de corps.

Celles des potentiels de surface — dans le cas où la surface attirante est en même temps surface de niveau — ont été considérées par P. Paci [1], mais cet auteur considère sa méthode comme ne pouvant pas s'appliquer au cas général.

Tout, ou à peu près, reste à faire dans ce domaine.

10. *Potentiels de ligne.* L'étude de ces potentiels est relativement peu avancée. Quant aux hypothèses faites, soit sur la nature des lignes, soit sur la densité, on en est encore au point de vue de Gauss.

On sait depuis longtemps qu'un tel potentiel devient infini lorsque le point potentié s'approche indéfiniment de la ligne attirante. Poincaré [2], dans l'hypothèse d'une densité et d'une ligne analytiques, donna du potentiel V de cette ligne une expression asymptotique $V^{(a)}$, telle que $V - V^{(a)}$ est holomorphe dans les environs de la ligne attirante. Il trouva $V^{(a)} = U \log R$, où U et R sont aussi des fonctions holomorphes des coordonnées du point potentié P. Il semble que ces résultats aient échappé à plusieurs auteurs : Levi-Civita [3] et Viterbi [4] obtiennent plus tard des expressions asymptotiques moins parfaites, mais plus maniables et établies dans des conditions un peu plus générales ; A. Tonolo [5], voulant perfectionner leurs résultats et s'inspirant du travail déjà cité de E. Schmidt, retrouve tout récemment les résultats de Poincaré par une méthode complètement différente. Prenant comme point de départ les expressions de Levi-Civita et de Viterbi, M. Olivo [6] établit des expressions asymptotiques soit des potentiels de simple et de double couche dans les environs de la surface attirante et de son bord, soit des potentiels de corps dans le voisinage d'un point régulier ou singulier de la surface.

11. *Potentiels de double couche.* Ces potentiels s'expriment par des dérivées premières de potentiels de simple couche et l'étude de leur dérivées premières se ramène à celles des dérivées secondes des potentiels de simple couche (voir Poincaré, Potentiel newtonien, p. 218). Les problèmes sont donc analogues à ceux que nous avons déjà examinés.

---

[1] *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo,* 8 (1894), p. 33.

[2] *Acta mathematica,* 22 (1898), Théorème 9.

[3] *Atti della R. Acc. Lincei* (Rendiconti), (5) 17, 2me sem., (1908), p. 3. 413, 535.

[4] *Rendiconti Istituto Lombardo* (2) 42 (1909), p. 913.

[5] *Math. Annalen,* 72 (1912), p. 78.

[6] *Atti Istituto Veneto,* 69 (1909-10), p. 519-546.

Remarquons que, contre toute attente, les dérivées premières *normales* des potentiels de double couche sont en général continues ; cette propriété, due à Helmholtz, a été démontrée dans des cas très généraux par Liapounoff[1]; elle est aussi l'objet d'une étude approfondie de H. Pétrini. Quant aux dérivées secondes, leurs discontinuités sont établies par A. Korn[2], dans des cas assez étendus.

12. *Potentiels de masses non dérivables.* Indiquons encore une extension de la notion de potentiel due à J. Plemelj[3].

Admettre l'existence d'une densité, c'est restreindre beaucoup le mode de répartition des masses attirantes et particulariser d'une façon peut-être excessive la notion de potentiel. On peut très bien concevoir une répartition de masses n'admettant pas de densité et M. Plemelj en revient à exprimer les potentiels correspondants sous la forme de Lagrange $\int \frac{dm}{r}$ ; seulement cette intégrale doit être prise dans un sens analogue à celui donné par Stieltjes[4] aux intégrales de fonctions d'une variable.

Il s'agira donc, après avoir étendu aux intégrales multiples la notion d'intégrales de Stieltjes[5], d'aborder l'étude de ces potentiels très généraux dont les propriétés seront assez différentes de celles des potentiels classiques. En particulier, il ne faudra plus compter sur l'existence de leurs dérivées en des points appartenant aux masses potentiantes. Aussi M. Plemelj développe-t-il une notion destinée à remplacer, pour les potentiels de simple et de double couche, les dérivées normales en un point de la surface attirante.

Cette notion permettra une extension des formules de Green et les nouveaux potentiels deviendront des instruments beaucoup plus puissants que les anciens, à l'aide desquels il sera possible de résoudre les problèmes aux limites dans des cas plus généraux que jusqu'ici.

Il semblait intéressant de terminer cette revue en signalant une innovation qui fait prévoir de prochaines découvertes dans la théorie du potentiel.

C. Jaccottet (Lausanne).

---

[1] *Journal de mathématiques* (6) 4 (1898), p. 241.
[2] Lehrbuch der Potentialtheorie, Berlin 1899, I, p. 51.
[3] Preisschriften der fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, 40, 1911.
[4] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1) 8 (1894), n° 10.
[5] Cette extension a été donnée par M. Fréchet, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4), 10 (1910), p. 241-256.

## L'ÉDIFICE GÉOMÉTRIQUE ET LA DÉMONSTRATION [1]

---

1. — Pour un entendement parfait et dont la puissance de compréhension serait infinie, la science ne se déroulerait pas, comme pour nous, en une longue file de théorèmes. Du point de vue de la raison, à qui le temps est indifférent, il n'est point vrai qu'une proposition en précède ou en justifie une autre ; toutes sont également primitives et évidentes par elles-mêmes. Mais la science humaine, imparfaite par nature, ne peut saisir que l'une après l'autre et au prix de longs et laborieux détours, les propriétés des figures géométriques [2]; « on rapporte, écrit Proclus, que Ptolémée demanda un jour à Euclide s'il n'y avait pas pour la géométrie de route plus courte que celle des *Éléments ;* il eut cette réponse : Il n'y a pas en géométrie de chemin fait pour les rois ».

Le chemin frayé par les géomètres grecs, quelque roturier qu'il soit, n'en est pas moins une des plus belles créations de l'humanité.

Les Grecs ont eu de bonne heure le goût de la dialectique. Fortifié par les sophistes, ce goût se répandit chez les géomètres de l'Académie, contemporains ou continuateurs de Platon. Les diverses formes de raisonnements mathématiques furent subtilement distinguées, classées, disséquées, et d'interminables discussions s'engagèrent sur des questions de méthode ou de terminologie.

**2. Théorèmes et problèmes.** — « Déjà [3] parmi les anciens, dit Proclus, les uns, comme Speusippe et Amphinome, proposaient de tout appeler *théorème,* pensant que ce terme convient mieux que celui de problème aux sciences théorétiques (contemplatives) et surtout traitant de choses éternelles ; car, pour de telles choses, il n'y a pas de génération ; il n'y a donc pas de place pour le pro-

---

[1] Extrait d'un ouvrage intitulé « Introduction à l'Analyse mathématique », où M. Pierre Boutroux étudie les principes fondamentaux de la science des nombres, de l'analyse et de la géométrie en donnant une grande importance à leur enchaînement historique. La première partie, actuellement sous presse, paraîtra prochainement à la librairie Hermann & fils.

[2] P. Tannery, *La géometrie grecque*, p. 69.

[3] P. Tannery, *loc. cit.*, p. 137. Speusippe, neveu de Platon. Amphinome n'est en tout cas pas antérieur à Aristote.

blème où il s'agit d'engendrer et de faire quelque chose comme si elle n'était pas auparavant : par exemple, construire un triangle équilatéral, décrire un carré sur une droite donnée... D'autres, au contraire, comme les mathématiciens de l'école de Ménechme, étaient d'avis de tout regarder comme des *problèmes,* tout en en distinguant deux formes : tantôt, en effet, il s'agit de fournir (*ποϱίσασθαι*) quelque chose de cherché, tantôt, au contraire, prenant quelque chose de déterminé, de voir ce que c'est, ou quelle en est la nature, ou ce qui lui arrive, ou quelle est sa relation à autre chose ». La discussion se poursuit pendant des siècles. Geminus (1er siècle av. J.-C.), soutient que le théorème est plus général que le problème. Au contraire, « Carpos[1] le mécanicien, dans son *Traité astrologique,...* dit que le genre des problèmes précède dans l'ordre celui des théorèmes, car c'est par les premiers que l'on trouve les sujets auxquels se rapportent les propriétés à étudier. L'énoncé du problème est simple et n'a pas besoin d'une intelligence exercée : ... construire un triangle équilatéral, ou bien, étant donné deux droites, retrancher de la plus grande une égale à la moindre ; là, rien d'obscur, aucun besoin d'une attention minutieuse. L'énoncé du théorème est au contraire pénible, il réclame une grande exactitude et une critique savante, pour n'être ni trop étendu, ni insuffisant par rapport à la vérité ». Proclus défend, quant à lui, l'opinion de Geminus, et il conclut : « Il est donc frivole d'attaquer Geminus comme ayant dit que le théorème est plus parfait que le problème ; car si c'est d'après l'ordre que Carpos donne la prééminence aux problèmes, c'est d'après le degré de perfection que Geminus l'accorde aux théorèmes. »

**3.** — Ces discussions ne sont pas aussi oiseuses qu'elles paraissent au premier abord. Elles ont permis de dégager les caractères auxquels se reconnaît la légitimité d'une définition ou la rigueur d'une démonstration, et si l'analyse de ces caractères est superflue dans les premiers chapitres de la science, où nous sommes guidés par le bon sens, il n'en est pas de même dans la suite.

Ainsi, en analysant la signification des problèmes, nous apprenons que toute définition doit être complétée par une discussion (problème) établissant l'*existence* de la chose définie. Si, par exemple, je proposais d'appeler triangle birectangle un triangle dont deux angles sont droits, je donnerais une définition purement verbale et sans valeur : en effet le problème « construire un triangle dont deux angles sont droits » n'a pas de solution, puisque la somme des *trois angles* du triangle ne peut être supérieure à deux droits.

Dans l'étude des théorèmes également (propositions énonçant

[1] Fragment de Proclus, *apud.,* P. Tannery, *loc. cit.,* p. 146.

les propriétés des figures géométriques) les problèmes jouent souvent un rôle capital. Supposons, par exemple, que nous énoncions le théorème suivant : *Tout angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit ;* cet énoncé ne sera satisfaisant que si, d'une part, il est exact en toutes circonstances et si d'autre part, il ne contient aucune restriction superflue[1] c'est-à-dire si la condition imposée à l'angle (d'être inscrit dans un demi-cercle) est bien une condition *nécessaire* de sa rectitude. Or, pour s'assurer qu'il en est bien ainsi, le procédé le plus sûr sera de résoudre le problème suivant : *inscrire dans un cercle de rayon donné quelconque un angle de grandeur donnée ;* on constatera alors que l'arc embrassé par l'angle inscrit est inférieur, supérieur, ou égal à un demi-cercle, suivant que cet angle est lui-même inférieur, supérieur ou égal à un angle droit ; et l'on conclura de là que le théorème donné plus haut est correctement énoncé.

**4. Traitement d'un problème.** — Ainsi l'étude complète d'une question de géométrie sera ramenée en général à l'étude d'un problème : étant *données* certaines figures, construire une nouvelle figure remplissant telles ou telles conditions déterminées. C'est ce que nous voyons nettement dans les *Eléments* d'Euclide.

Le traitement d'un problème comprend huit phases ou parties :

1° La *protase* (πρότασις) ou énoncé ;

2° L'*ecthèse* (ἔκθεσις) ou répétition de l'énoncé rapporté cette fois au tracé d'un schéma dont les différentes parties (points, droites, etc.) sont en général désignées par des lettres ;

3° L'*apagoge* (ἀπαγωγή), qui transforme le problème proposé en un autre problème plus simple : elle suppose, pour cela, le problème résolu et, en s'appuyant sur des propositions connues, elle montre que les conditions requises (pour la construction de la figure inconnue) seront sûrement satisfaites si telles autres conditions (plus simples) le sont ;

4° La *résolution* (ἀνάλυσις) est la confrontation des conditions requises avec celles qui sont données (avec les conditions auxquelles satisfont les *données*).

5° S'il y a équivalence entre ces conditions, le problème est résolu. Mais il se peut que l'équivalence ait lieu seulement lorsqu'on ajoute aux données quelques conditions restrictives supplémentaires. Nous reviendrons donc à la protase et la compléterons par le *diorisme* (διορισμός), énoncé des restrictions moyennant lesquelles le problème est possible ; cet énoncé formule des propriétés appartenant aux figures que l'on considère ; c'est donc un *théorème*.

Ces étapes franchies, il n'y a plus maintenant qu'à vérifier que,

[1] Je me garderai par exemple d'énoncer comme un théorème la proposition suivante : *La somme des angles d'un triangle rectangle est égale à deux angles droits.* En effet la conclusion énoncée est exacte lors même que le triangle n'est pas rectangle.

par l'intermédiaire de l'apagoge, on peut effectivement, à partir des figures *données* par la protase et le diorisme, construire la figure demandée. La vérification comprend les parties suivantes :

6° La *construction* (*κατασκευή*) qui complète l'ecthèse en traçant, ou du moins indiquant les diverses lignes qu'il est nécessaire de considérer pour faire la démonstration ;

7° La *démonstration proprement dite* (*ἀπόδειξις*), qui déduit de la construction la figure demandée ;

8° La *conclusion* (*συμπέρασμα*), qui affirme que cette figure satisfait bien aux conditions requises.

**5.** — Eclairons cette théorie par un exemple.

Soit *(protase)* à construire un triangle isocèle étant *données* la longueur de la base et la grandeur d'un angle adjacent à la base.

Il s'agit, en d'autres termes *(ecthèse)*, de construire un triangle isoscèle ABC où le côté BC et l'angle B aient respectivement pour grandeurs celles d'un segment B′C′ et d'un angle O donnés.

*Apagoge :* Si ABC est le triangle demandé, l'angle ABC est égal à l'angle ACB (puisque le triangle est isocèle) ; donc les angles B et C sont tous deux égaux à O, BC étant égal à B′C′.

Donc *(résolution)*, si l'on peut construire un triangle satisfaisant aux conditions requises, ce triangle sera formé par une base BC et deux demi-droites BX, CY situées du même côté de BC et *faisant* chacune avec BC un angle égal à O.

Un tel triangle n'existe effectivement que si les droites BX et CY se coupent ; pour qu'il en soit ainsi il faut, manifestement, et il suffit *(diorisme)* que *les angles égaux* XBC *et* YCB *soient aigus*. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant : *Dans un triangle isoscèle, les angles adjacents à la base sont aigus.*

Cela posé, nous pouvons construire le triangle ABC. Prenons *(construction)* un segment BC égal à B′C′, et, à partir des points B et C menons, d'un même côté de BC, des droites BX et CY faisant avec BC des angles égaux à l'*angle aigu* O. Ces droites *(démonstration)* se coupent, et forment par conséquent, avec BC, un triangle ABC.

Ce triangle satisfait bien aux conditions requises *(conclusion)*.

**6. Analyse et synthèse.** — Parmi les phases du raisonnement énumérées ci-dessus, la troisième et la quatrième (*ἀπαγωγή* et *ἀνάλυσις*) constituent l'*analyse*, la sixième et la septième (*κατασκευή* et *ἀπόδειξις*) constituent la *synthèse*. Il se peut que la synthèse ne fasse que répéter l'analyse en renversant l'ordre de l'exposition. En ce cas on a le droit (sans diminuer en rien la rigueur de la déduction) de se borner, soit à l'analyse, soit à la synthèse. Il se peut, au contraire, qu'analyse et synthèse soient toutes deux nécessaires, l'analyse donnant des solutions qui satisferaient aux conditions requises *si elles existaient*, mais qui peut-être n'existent pas, la synthèse, d'autre part, fournissant des solutions

toujours possibles, ne donnant peut-être pas toutes celles que comporte le problème [1].

Un raisonnement qui se réduit à l'analyse ou à la synthèse est appelé *raisonnement analytique* ou *raisonnement synthétique*. Le raisonnement *analytique* part du résultat à démontrer (c'est-à-dire suppose le problème résolu) ; le raisonnement *synthétique* (qui est la *démonstration* sous sa forme normale) part, au contraire, des données, pour aboutir au résultat requis.

7. — Ainsi, parmi les huit parties dont se compose un raisonnement complet, toutes ne sont pas toujours explicitement formulées. La marche du raisonnement varie suivant la nature des problèmes et des théorèmes (la démonstration d'un théorème comprenant d'ordinaire moins de parties que la solution d'un problème). D'ailleurs l'apagoge et la construction se présentent, suivant les cas, sous des aspects très divers. D'où un grand nombre de types de déductions que le logicien s'applique à définir. C'est ainsi que Viète distingue entre l'*analyse zététique* qui fournit la solution d'un problème et l'*analyse poristique* qui fournit, non pas la solution, mais la démonstration d'une solution. Il y a lieu également de distinguer entre l'analyse directe et l'analyse indirecte telle que la pratique la *démonstration par l'absurde :* au lieu de supposer le problème résolu, imaginons au contraire que les conditions requises par l'énoncé ne soient pas remplies ; si nous déduisons de cette hypothèse (par une apagoge) des conséquences absurdes (contradictoires entre elles), nous en concluons que l'hypothèse est illégitime et que, par conséquent, les conditions requises sont sûrement remplies.

Mais nous ne pouvons prétendre approfondir ici l'étude logique de la démonstration. Il importe davantage de nous demander comment, par le moyen des démonstrations, nous pourrons dresser l'édifice de la géométrie rationnelle.

**8. Les éléments.** — « Le terme d'éléments (*στοιχεῖα*), dit Paul Tannery d'après Proclus, s'applique proprement à ces théorèmes qui, dans toute la géométrie, sont primordiaux et principes de conséquences, qui s'appliquent partout, et fournissent les démonstrations de relations en grand nombre ; on peut comparer leur rôle à celui des lettres (également appelées *στοιχεῖα*) dans le langage. »

De nombreux *Eléments* ont été composés en Grèce (ceux d'Hippocrate de Chios, aujourd'hui perdus, furent célèbres) : cependant nous n'en connaissons point de plus anciens que ceux d'Euclide, qui sont demeurés jusqu'à notre époque le modèle du genre.

Les *Eléments* d'Euclide jouent en même temps le rôle de fin et

[1] On sait, qu'en effet, un problème peut admettre plusieurs solutions différentes. Soit par exemple à construire un triangle dont on connait deux côtés et un angle (non compris entre ces côtés) : ce problème a deux solutions.

le rôle de moyen : fin, puisqu'ils sont destinés à faire connaître les théorèmes essentiels de la géométrie ; moyen, puisque les solutions toutes préparées qu'ils nous offrent sont les instruments dont on a besoin pour effectuer l'apagoge (ou l'*ἀπόδειξις*) des problèmes nouveaux. Euclide adjoignit d'ailleurs aux *Eléments*, un second ouvrage, les *Data*, qui a pour objet direct de fournir des instruments à l'analyse et à la synthèse : « les propositions, dit Zeuthen[1], y ont pour but de prouver que, certaines quantités ou portions d'une figure étant *données*, certaines autres le sont aussi, c'est-à-dire qu'elles se déterminent à l'aide des premières. »

**9.** — Comment sont composés les *Eléments* ? Partant de définitions et d'hypothèses, le géomètre en déduit progressivement, conformément aux règles de la logique, une série de propositions, rigoureusement enchaînées les unes aux autres.

Les *définitions* (*ὅροι*) déterminent les concepts qui sont à la base de la science.

Les hypothèses sont[2], soit des *postulats* ou *demandes* (*αἰτήματα*), soit des *notions communes* ou *axiomes* (*κοιναὶ ἔννοιαι, ἀξιώματα*) ; les postulats affirment (sans démonstration) que certaines constructions premières sont possibles ; les axiomes, que certaines propriétés essentielles appartiennent aux grandeurs ou aux figures les plus simples.

Il est clair — puisqu'aussi bien l'ordre logique n'est qu'un ordre introduit *après coup* pour exposer des vérités simultanées — que le choix des définitions, postulats et axiomes reste à notre discrétion. Entre plusieurs constructions ou propositions qui s'impliquent mutuellement, nous avons le droit de choisir celles que nous prendrons comme point de départ et renoncerons à démontrer, et celles qu'au contraire nous considérerons comme déduites. C'est pourquoi les savants modernes ont pu changer les bases de la géométrie euclidienne tout en continuant à la prendre pour modèle. Ce qui importe, du point de vue de la logique, c'est l'enchaînement des propositions. Or à cet égard il n'y a rien à ajouter aux règles posées par Euclide.

**10.** — Les propositions (*théorèmes*) sont rangées dans l'ordre suivant lequel elles se déduisent les unes des autres. Elles portent des numéros[3] afin qu'il soit facile d'y renvoyer quand on les invoque dans la démonstration des propositions ultérieures.

Les propositions d'importance secondaire sont souvent appe-

---

[1] Zeuthen, *Hist. des mathématiques dans l'antiqu.*, trad. J. Mascart, pp. 87-88.

[2] La distinction que les Grecs établissaient entre les postulats et les axiomes n'a pas été maintenue par les modernes.

[3] L'usage s'est répandu aujourd'hui de désigner les propositions par les noms de leurs inventeurs (théorèmes de Pythagore, théorème de Desargues, etc.). Beaucoup de ces appellations sont cependant discutables au point de vue historique et il n'y faut voir qu'un substitut des numéros d'ordre.

lées[1] *lemmes* lorsqu'elles sont destinées à faciliter la démonstration d'un théorème à venir, *corollaires* lorsqu'elles expriment des conséquences directes d'un théorème que l'on vient d'établir.

La démonstration des propositions se fait suivant les règles que nous avons indiquées plus haut.

**11.** — Le système de géométrie que nous ont laissé les Alexandrins a traversé vingt-deux siècles sans être, pour ainsi dire, ébranlé. Couronnement de l'œuvre minutieuse poursuivie pendant trois cents ans par les dialecticiens grecs, il n'est pas loin d'atteindre la perfection. De la nécessité où est l'homme d'exposer l'une après l'autre les vérités géométriques au lieu de les embrasser toutes, du même coup d'œil, il a tiré le principe d'une méthode de découverte et de déduction qui est l'une des plus précieuses possessions de l'esprit humain.

Cependant, si les « *Eléments* » ont conservé moyennant quelques retouches[2] toute leur valeur logique, ils ne jouent plus, dans l'ensemble de la science mathématique, le rôle unique qui paraissait jadis leur être assuré. Sans doute, le système euclidien — dont la marche a été réglée si sûrement — est susceptible d'une extension continue et indéfinie. Ce n'est point, toutefois, en le prolongeant que la science a le plus progressé ; la raison en tient à une faiblesse du système qui ne s'est fait sentir qu'à la longue, mais que nous pouvons dès maintenant apercevoir.

Nous avons dit que les *Eléments* sont en même temps une fin poursuivie pour elle-même et un instrument de démonstration. Il y a certes une grande élégance à satisfaire du même coup deux besoins différents : mais est-on bien sûr d'y réussir ? La géométrie, en tant que fin, est l'héritière de la science pythagoricienne : elle note les plus belles propriétés (les plus simples, les plus suggestives) des figures les plus parfaites. Sont-ce bien ces mêmes propriétés qui rendront le plus de services pour l'analyse et pour la synthèse ? Il serait surprenant qu'il en fût toujours ainsi. L'admirable unité que les Grecs avaient donnée à la science n'a donc pas pu être sauvegardée[3]. Pour passer des données d'un problème à la solution, il faut souvent recourir à des intermédiaires qui ne sont point dignes d'occuper eux-mêmes une place dans l'édifice de la science : constructions artificielles, inharmonieuses, dépareillées, qui souvent même sont choquantes pour la raison et lui

---

[1] Ces distinctions ont été systématiquement introduites par les commentateurs d'EUCLIDE.

[2] Sur le systeme euclidien, comparé aux systèmes logiques de géométrie récemment constitues, voir les développements ultérieurs de l'ouvrage ; on lira aussi avec intérêt KLEIN, *Elementar math. v. höher. Standp. aus*, II, 1909, p. 38 › et suiv

[3] Il est à remarquer – nous reviendrons sur ce point lorsque nous étudierons la géométrie algébrique — que, quelque savamment qu'elle ait été décomposée et codifiée, la méthode de résolution des problemes employée par les géomètres anciens est extrêmement difficile à manier. Elle exige que l'on prenne des voies détournées où l'on ne peut s'orienter qu'à force d'ingéniosité.

paraissent absurdes au premier abord. C'est ainsi qu'à côté de la science contemplative, une technique a dû se développer, dont le but est strictement utilitaire et qui vise seulement à accroître, par tous les moyens possibles, la puissance de la démonstration. A ne vouloir jamais descendre des cimes splendides qu'elle prétend explorer, la science se condamnerait elle-même à l'impuissance.

Pierre Boutroux (Poitiers).

---

# SUR LE PROLONGEMENT, PAR CONTINUITÉ, DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

1. — Soient $D_1$ et $D_2$ deux domaines, simplement connexes, séparés par une ligne rectifiable L. Je suppose que les frontières $C_1$ et $C_2$ des domaines $D_1$ et $D_2$ sont aussi des lignes rectifiables.

Cela étant posé, supposons que dans $D_1$ se trouve définie une fonction holomorphe $f_1(z)$ prenant sur L une suite continue de valeurs ; supposons, de même, que dans $D_2$ se trouve définie une fonction holomorphe $f_2(z)$ prenant sur le L la même suite continue de valeurs que $f_1(z)$.

2. — M. Painlevé a démontré (dans sa Thèse : *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, page 27) que la fonction $f(z)$ définie de la manière suivante :

$$f(z) = f_1(z) \qquad \text{dans le domaine} \quad D_1 \;;$$
$$f(z) = f_2(z) \qquad \text{dans le domaine} \quad D_2 \;;$$
$$f(z) = f_1(z) = f_2(z) \qquad \text{sur la ligne} \quad L \;;$$

est holomorphe dans le domaine D, obtenu en supprimant la ligne L.

En d'autres termes : deux fonctions holomorphes, définies dans deux domaines contigus, et se raccordant (les fonctions) par continuité le long de la frontière commune (ligne rectifiable) se prolongent mutuellement et ne forment, dans le *domaine-somme* (obtenu en supprimant la frontière commune) qu'une seule et même fonction holomorphe.

3. — La démonstration de M. Painlevé est basée sur l'intégrale de Cauchy. Je vais donner une autre démonstration[1] basée sur une transformation de la définition des fonctions holomorphes.

---

[1] T. Levi-Civita, *Sulla continuazione analitica* [Atti e Memorie della R. Academia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova, vol. XXVIII, Dispensa I (1912), pp. 3-5].

D'après un théorème de Morera, une fonction $f(z)$ définie dans un domaine simplement connexe D est holomorphe dans ce domaine si

1° elle est continue dans D ;

2° l'intégrale

$$\int_C f(z)\,dz$$

est nulle, pour tout contour fermé C tracé dans D.

4. — Venons maintenant au théorème de M. Painlevé. On montre immédiatement que la fonction $f(z)$, définie au n° 2, satisfait aux conditions de Morera.

D'abord, elle est continue dans le domaine D.

Ensuite l'intégrale

$$I = \int_C f(z)\,dz$$

est évidemment nulle si le contour C est situé tout entier dans $D_1$ ou dans $D_2$. Supposons maintenant que ce contour fermé traverse la ligne L et, pour simplifier, supposons que C traverse L seulement en deux points : $\alpha$ et $\beta$.

Pour calculer l'intégrale I, on peut la décomposer en deux autres intégrales :

$$I = I_1 + I_2$$

l'intégrale $I_1$ étant obtenue en intégrant $f(z)$ le long d'un contour fermé $C_1$ formé avec la partie de C qui se trouve dans $D_1$ et l'arc $\alpha\beta$ de la ligne L ; de même, l'intégrale $I_2$ étant obtenue par l'intégration de $f(z)$ le long du contour fermé $C_2$, formé de la partie de C, située dans $D_2$ et de l'arc $\alpha\beta$ de la ligne L.

Mais, à cause de la continuité des fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sur L, on trouve facilement

$$I_1 = 0\ , \qquad I_2 = 0\ ,$$

d'où

$$I = 0\ .$$

Et, ainsi, la fonction $f(z)$ satisfait, dans D, aussi à la seconde condition de Morera. Elle est donc holomorphe dans D.

5. — L'importance de ce mode de démonstration me semble résider dans ce fait qu'il permet de généraliser le théorème de M. Painlevé et de *prolonger*, par continuité, des fonctions non-holomorphes.

En effet, reprenons les domaines $D_1$ et $D_2$, définis au n° 1, mais cette fois-ci supposons que l'on définit, dans chacun de ces domaines des fonctions non-holomorphes mais appartenant à la même classe.

Voici ce que j'entends par là.

Lorsqu'une fonction $f(z)$, continue, n'est pas holomorphe l'intégrale.

$$I = \int_C f(z)\,dz$$

prise suivant un contour fermé quelconque C [tracé dans le domaine où se trouve définie $f(z)$] n'est pas nulle ; mais sa valeur peut s'exprimer quelquefois d'une manière simple en fonction du contour C. C'est cette manière d'exprimer la valeur de I en fonction de C qui sert à caractériser une classe de fonctions, et par suite à distinguer une classe des autres classes de fonctions.

Voici un exemple simple :

Supposons que la valeur de I est égale à l'aire de la région délimitée par C, multipliée par l'affixe du centre de gravité de cette région.

Nous avons défini ainsi une classe G de fonctions non-holomorphes : $g(z)$.

6. — Je dis que le théorème de M. Painlevé est généralisable à cette classe de fonctions.

En d'autres termes : si dans le domaine $D_1$ se trouve définie une fonction $g_1(z)$ et dans $D_2$ une fonction de même classe $g_2(z)$, et si ces deux fonctions se raccordent par continuité le long de la ligne L (qui sépare $D_1$ et $D_2$) la fonction $g(z)$ définie comme il suit :

$$g(z) = g_1(z) \qquad \text{dans } D_1 ;$$
$$g(z) = g_2(z) \qquad \text{dans } D_2 ;$$
$$g(z) = g_1(z) = g_2(z) \qquad \text{sur } L ;$$

est une fonction qui, dans le domaine-*somme* D, appartient à la même classe que $g_1(z)$ et $g_2(z)$.

On n'a qu'à reprendre le mode de raisonnement du n° 4 et à faire usage d'une propriété élémentaire du centre de gravité.

D'ailleurs la classe des fonctions $g(z)$ peut être définie aussi par un système d'équations aux dérivées partielles absolument analogue au système par lequel Cauchy définit les fonctions holomorphes.

7. — J'ai donné dans une Note des *Comptes Rendus*[1] la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de variable complexe, appartenant à une classe déterminée, soit prolongeable par continuité.

D. Pompéiu (Bucarest).

[1] T. 156, p. 376, séance du 3 février 1913. Dans cette Note des *Comptes Rendus* se trouve indiquée aussi la démonstration du texte (n° 4). En lisant cette Note, M. le prof. T. Levi-Civita a bien voulu me communiquer qu'il avait, avant moi, donné, dans les *Atti e Memorie* de l'Académie de Padoue, la même démonstration, comme application du théorème de Morera au prolongement des fonctions holomorphes.

# SUR LA RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'UN SYSTÈME DE TROIS ÉQUATIONS LINÉAIRES

La méthode de Massau pour la résolution d'un système quelconque d'équations linéaires[1] a l'intérêt d'une pleine généralité. Mais il est possible, en certains cas particuliers, d'obtenir des constructions plus simples que celles qui en dérivent. C'est ainsi que, pour le cas de trois équations linéaires, au reste quelconques, que nous écrirons

$$aX + bY + cZ = d \ ,$$

$$a'X + b'Y + c'Z = d' \ ,$$

$$a''X + b''Y + c''Z = d'' \ ,$$

nous allons faire connaître ici une solution, reposant tout simplement sur l'interprétation de ces équations en coordonnées parallèles, et qui comporte des tracés sensiblement plus simples que ceux exigés par la méthode de Massau. Pour la résolution d'un tel système, cette dernière méthode nécessite l'emploi de quatre fausses positions, alors que la solution ici indiquée n'en utilise que deux.

Faisant choix de deux axes parallèles quelconques A$u$ et B$v$, portons sur ces axes les échelles définies par

$$u = X \ , \qquad v = \lambda Y \ ,$$

$\lambda$ étant un paramètre arbitraire qu'on prendra le plus souvent égal à 1, mais dont, le cas échéant; on pourra disposer comme on l'indiquera plus loin. Les trois équations ci-dessus devenant ainsi

$$a\lambda u + bv = \lambda(d - cZ) \ ,$$

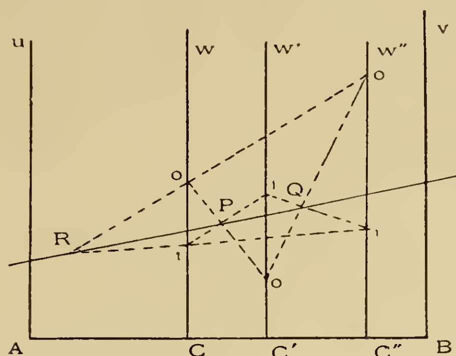
$$a'\lambda u + b'v = \lambda(d' - c'Z) \ ,$$

$$a''\lambda u + b''v = \lambda(d'' - c''Z) \ ,$$

---

[1] Voir l'exposé de cette méthode dans mon volume : *Calcul graphique et Nomographie* (nos 13 à 15).

définissent alors trois systèmes linéaires de points (Z) distribués respectivement sur les parallèles $C\omega$, $C'\omega'$, $C''\omega''$ aux axes, telles que




$$\frac{CA}{CB} = -\frac{b}{\lambda a},$$

$$\frac{C'A}{C'B} = -\frac{b'}{\lambda a'},$$

$$\frac{C''A}{C''B} = -\frac{b''}{\lambda a''},$$

et déterminés sur ces supports par les formules

$$\omega = \frac{\lambda(d - cZ)}{a\lambda + b}, \qquad \omega' = \frac{\lambda(d' - c'Z)}{a'\lambda + b'}, \qquad \omega'' = \frac{\lambda(d'' - c''Z)}{a''\lambda + b''}.$$

Supposons ces cinq échelles métriques marquées sur les supports correspondants. Pour avoir la solution en X, Y, Z du système considéré, il nous faudra trouver trois points des échelles (Z) portées par $C\omega$, $C'\omega'$, $C''\omega''$ qui, tout en ayant la même cote Z, soient alignés. La droite sur laquelle ils se trouveront coupera les échelles de $Au$ et $Bv$ en des points dont les cotes feront connaître les valeurs de X et Y qui, jointes à cette valeur commune de Z, constitueront le système (X, Y, Z) cherché.

Or, si nous considérons les droites unissant les points de même cote sur deux des trois échelles $C\omega$, $C'\omega'$, $C''\omega''$, ces droites passent toutes par un même point, attendu que l'élimination de Z entre les expressions de $\omega$ et $\omega'$ par exemple conduit à une équation linéaire en $\omega$ et $\omega'$.

Soient P, Q, R les pôles ainsi obtenus par association des mêmes valeurs de Z sur $C\omega$ et $C'\omega'$, $C'\omega'$ et $C''\omega''$, $C''\omega''$ et $C\omega$. L'alignement cherché devra passer par chacun de ces trois pôles qui, dès lors, sont nécessairement en ligne droite.

Or, pour nous procurer l'un d'eux, nous n'avons qu'à prendre entre $C\omega$ et $C'\omega'$, ou entre $C'\omega'$ et $C''\omega''$, ou entre $C''\omega''$ et $C\omega$, les alignements joignant les points qui correspondent à deux mêmes cotes : $Z = 0$ et $Z = 1$, par exemple.

En général, avons-nous dit, on prendra $\lambda = 1$ ; mais on pourra aussi disposer de ce paramètre de façon à faire varier homographiquement la figure en vue d'une disposition plus avantageuse.

Si, notamment, l'une des sommes $a + b$, $a' + b'$ ou $a'' + b''$ était nulle, l'axe $C\omega$, $C'\omega'$ ou $C''\omega''$ correspondant serait avec la valeur $\lambda = 1$, rejeté à l'infini. En choisissant pour $\lambda$ une valeur quelconque ne rendant nulle aucune des quantités $\lambda a + b$, $\lambda a' + b'$, $\lambda a'' + b''$, on maintient, dans tous les cas, ces trois axes à distance finie.

M. d'Ocagne (Paris).

---

# DÉMONSTRATION NOUVELLE ET EXTENSION D'UN THÉORÈME DE M. G. KŒNIGS

---

Dans un mémoire publié en 1887[1], M. G. Kœnigs a déterminé, par une méthode élégante, les surfaces de l'espace à trois dimensions contenant deux faisceaux de coniques.

Dans le travail actuel, j'expose une généralisation du théorème de M. Kœnigs, en ce sens que je détermine les surfaces algébriques de $S_r$ contenant deux faisceaux de courbes rationnelles. La méthode que j'emploie est fondée sur la représentation plane des surfaces et est différente de celle de M. Kœnigs. Précisément, j'établis le théorème suivant :

I. — *Si une surface algébrique de* $S_r$ *possède deux faisceaux de courbes rationnelles, cette surface est rationnelle et peut être représentée sur le plan de manière qu'aux courbes d'un faisceau correspondent les droites d'un faisceau et qu'aux courbes de l'autre faisceau correspondent des courbes rationnelles d'un certain ordre* $\mu$, *le plus petit possible, passant* $\mu - \nu$ *fois par le sommet du faisceau de droites* ($\nu$ *étant le nombre de points communs aux courbes des faisceaux*) *et telles que leurs multiplicités en deux points-bases, divers du sommet du faisceau de droites, n'aient jamais une somme excédant* $\nu$. *De plus, il n'y a pas de points-bases* $\nu$*-uples et il en peut exister qu'un seul point-base dont la multiplicité surpasse* $\frac{\nu}{2}$ *(en dehors du faisceau de droites). Les courbes représentant les sections hyperplanes de la surface ne passent jamais, par deux points-bases du faisceau de courbes d'ordre* $\mu$ *dont la somme des multiplicités est* $\nu$, *avec des multiplicités dont la somme surpasse*

---

[1] *Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques.* Annales de l'École Normale sup. 1888, 3e s., t. V, p. 177. (Voir aussi C. R. 1887).

*l'ordre d'une courbe rationnelle du faisceau correspondant au faisceau de droites.*

Je considère, dans ce qui précède, une surface rationnelle comme complètement donnée lorsque l'on connaît une de ses représentations planes.

Comme cas particulier, je déduis le théorème de M. Kœnigs, que j'énonce comme ceci :

II. — *Si une surface algébrique contient deux faisceaux de coniques, cette surface est rationnelle et c'est ou la surface de Véronèse, de* $S_4$, *ou la surface d'ordre huit, à sections hyperplanes elliptiques, représentant le système des quartiques planes à deux points doubles, ou l'une des projections de ces deux surfaces.*

Je déduis enfin ce théorème :

III. — *Si une surface algébrique contient un faisceau de coniques et un faisceau de cubiques rationnelles, elle est rationnelle et c'est une surface d'ordre* 12, *de* $S_{11}$, *à sections hyperplanes de genre deux, ou une surface d'ordre* 11, *de* $S_{10}$, *à sections de genre deux, ou une surface d'ordre* 8, *de* $S_8$, *à sections elliptiques (représentant le système des courbes planes du troisième ordre ayant un point-base), ou une règle cubique de* $S_4$, *ou une quadrique, ou une projection de l'une de ces surfaces.*

1. — Soit F une surface algébrique d'ordre $n$, située dans un espace linéaire $S_r$, à $r$ dimensions et contenant deux faisceaux de courbes rationnelles. Dénotons par $C_1$ la courbe générique de l'un des faisceaux, par $C_2$ la courbe générique de l'autre. Soient $n_1$, $n_2$ les ordres respectifs des courbes $C_1$, $C_2$, $\nu$ le nombre de points ($\geqq 1$) communs à une $C_1$ et à une $C_2$ quelconque.

Les groupes de points d'intersection des courbes $C_1$ avec une $C_2$ déterminée (mais choisie d'ailleurs arbitrairement) forment une involution $\gamma'$ sur cette courbe. Or, cette courbe $C_2$ étant rationnelle, il en est de même de l'involution d'après le théorème bien connu de Lüroth, et par suite du faisceau des $C_1$.

Le faisceau rationnel des $C_1$ sera désigné, suivant l'usage, par $|C_1|$. On démontre de même que les $C_2$ forment un faisceau rationnel $|C_2|$.

Mais, par un théorème de M. Nöther, une surface algébrique possédant un faisceau rationnel de courbes rationnelles, est rationnelle ; donc *la surface* F *est rationnelle.*

Nous désignerons par $|C|$ le système des sections planes ou hyperplanes de la surface F et nous supposerons que cette surface est normale, c'est-à-dire qu'elle n'est la projection d'aucune surface du même ordre $n$ appartenant à un espace linéaire à plus de $r$ dimensions.

2. — Considérons une représentation plane de la surface, c'est-à-dire établissons une correspondance birationnelle entre la surface F et un plan quelconque. Soient $|C^*|$ le système linéaire,

simple, de dimension $r$, représentant le système des sections hyperplanes $|C|$, $|C^*_1|$ le faisceau de courbes rationnelles correspondant aux $C_1$, $|C^*_2|$ le faisceau des courbes rationnelles correspondant aux $C_2$.

Mais nous avons une infinité de représentations planes d'une surface, car on sait qu'on aurait pu prendre au lieu de $|C^*|$ un système linéaire transformé de $|C^*|$ au moyen d'une transformation birationnelle quelconque. Nous pouvons profiter de cette indétermination pour choisir un système $|C^*|$ plus commode que les autres. Précisément, nous choisirons le système $|C^*|$ de manière que :

1° Les courbes $C^*_1$ soient les droites d'un faisceau de sommet P.

2° Les courbes $C^*_2$ aient l'ordre minimum $\mu$.

3° Les courbes $C^*$ aient l'ordre minimum $m$ ($m$ n'étant naturellement choisi que lorsque $\mu$ est fixé).

Il est toujours possible de satisfaire au 1°), car étant donné un faisceau de courbes rationnelles dans un plan, il existe toujours une transformation birationnelle qui le change en un faisceau de droites (cela résulte d'ailleurs du théorème de M. Nöther précédemment invoqué). Si donc nous avions affaire à une représentation plane de F dans laquelle les $C^*_1$ ne seraient pas des droites, il serait possible de trouver une transformation birationnelle (et par conséquent une autre représentation plane de F) changeant les $C^*_1$ en des droites.

3. — Les courbes $C^*_2$ rencontrent une courbe $C^*_1$ en $\nu$ points, donc on a $\mu \geqq \nu$ et le point P est $(\mu - \nu)$ -uple pour toutes les courbes $C^*_2$.

De même, le point P est $(m\text{-}n_1)$ - uple pour les courbes $C^*$.

Désignons par $x_{ik}$ le nombre des points fixes du plan, en dehors de P, $i$-uples pour les $C^*_2$ et $k$-uples pour les $C^*$ ($i = 0, 1, 2, \dots, \nu$ ; $k = 0, 1, 2, \dots, n_1$).

Exprimons que les courbes $C^*_2$ sont rationnelles, on a

$$(\mu - 1)(\mu - 2) = (\mu - \nu)(\mu - \nu - 1) + \sum_k \sum_i i(i-1)x_{ik} .$$

De plus, deux courbes $C^*_2$ n'ont aucun point variable en commun, donc on a

$$\mu^2 = (\mu - \nu)^2 + \sum_k \sum_i i^2 x_{ik} .$$

Ces deux formules s'écrivent, après quelques réductions,

$$\sum_k \sum_i i x_{ik} = 2(\mu - 1) + \nu , \qquad (1)$$

$$\sum_k \sum_i i^2 x_{ik} = 2\mu\nu - \nu^2 . \qquad (2)$$

Exprimons que deux courbes $C^*$ ont $n$ points variables communs. On a

$$m^2 = (m - n_1)^2 + \sum_i \sum_k k^2 x_{ik} + n \ . \qquad (3)$$

Une courbe $C^*$ rencontre une courbe $C^*_2$ en $n_2$ points, donc on a

$$m\mu = \sum_i \sum_k ik \, . \, x_{ik} + (m - n_1)(\mu - \nu) + n_2 \ . \qquad (4)$$

4. — Le nombre $\mu$, pour satisfaire à la seconde condition, doit être le plus petit possible, c'est-à-dire que l'on ne peut trouver une transformation birationnelle changeant les courbes $C^*_2$ en des courbes d'un degré moindre, tout en faisant correspondre des droites aux droites $C^*_1$.

Dans ces conditions, on doit avoir $x_{\nu k} = 0$ ($k = 0, 1, \ldots, n_1$), sauf pour $\nu = 1$. En effet, supposons $x_{\nu k} > 0$, $\nu > 1$. Alors on ne peut avoir $x_{ik} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, \nu\text{-}1$), car les formules (1) et (2) donnent

$$\nu x_{\nu k} = 2(\mu - 1) + \nu \ , \qquad \nu x_{\nu k} = 2\mu - \nu \ ,$$

d'où $\nu = 1$. Il doit donc exister, en dehors de P et des points-bases $\nu$-uples de $|C^*_2|$, quelques autres points-bases. Envisagons un point-base $P_1$ $\nu$-uple et un point base $P_2$, $i$-uple de $|C^*_2|$ ($i < \nu$). La transformation quadratique ayant pour points fondamentaux P, $P_1$, $P_2$ change les $C^*_1$ en des droites et les $C^*_2$ en des courbes d'ordre $2\mu - (\mu - \nu) - \nu - i = \mu - i < \mu$. Or, nous venons de voir que cela n'est pas possible si la représentation plane a été choisie de manière à satisfaire à la condition 2°), donc sauf pour $\nu = 1$, on doit avoir $x_{\nu k} = 0$.

D'une manière générale, on ne peut avoir, en dehors du point P, un point-base $P_1$ $i$-uple et un point-base $P_2$ $j$-uple pour $|C_2|$, si $i + j > \nu$. En effet, si cela était possible, la transformation quadratique ayant pour points fondamentaux P, $P_1$, $P_2$ changerait les $C^*_1$ en des droites, et les $C^*_2$ en des courbes d'ordre $2\mu - (\mu - \nu) - i - j = \mu - (i + j - \nu) > \mu$, de sorte que la représentation plane ne pourrait satisfaire au 2°).

De cette propriété, on conclut que l'on ne peut avoir $x_{ik} \geqq 0$ que pour une seule valeur $i > \frac{\nu}{2}$, et qu'alors, on a précisément $x_{ik} = 1$.

Nous allons appliquer ces théorèmes à la détermination des faisceaux $|C^*_2|$ lorsque l'on a $\nu = 1$, 2 ou 3.

5. — $\nu = 1$. On a $i \leq \nu$ ou 1, donc $i = 0$ ou 1. Les équations (1) et (2) deviennent :

$$x_{1k} = 2\mu - 1 .$$

Or, si $x_{1k} > 0$, comme on a $\nu = 1 > \frac{\nu}{2} \frac{\nu}{1}$ ou $\frac{1}{2}$, on ne peut avoir que $x_{1k} = 1$, d'où $\mu = 1$. Les $C^*_2$ sont donc les droites d'un faisceau.

Cela était évident à priori, car si une surface algébrique possède deux faisceaux de courbes rationnelles unisécantes, on en obtient une représentation plane en rapportant projectivement ces faisceaux respectivement à deux faisceaux de droites d'un même plan.

6. — $\nu = 2$, On a $i \leq 1$, d'où

$$x_{1k} = 2\mu = 4\mu - 4 ,$$

c'est-à-dire $\mu = 2$. Les $C^*_2$ sont donc les coniques d'un faisceau.

7. — $\nu = 3$. On a $i \leq 2$ et si $i$ peut être égal à 2, on a $x_{2k} = 1$. Nous avons donc deux cas à considérer :

1° $i$ ne peut prendre la valeur 2. Alors on a

$$x_{1k} = 2\mu + 1 = 6\mu - 9 ,$$

c'est-à-dire $4\mu = 10$, ce qui est impossible pour $\mu$ entier.

2° $i$ peut prendre la valeur 2. Alors on a

$$2 + x_{1k} = 2\mu + 1 , \qquad 4 + x_{1k} = 6\mu - 9 .$$

On en déduit $\mu = 3$, $x_{1k} = 5$.

Les $C^*_2$ sont donc des cubiques planes ayant un point double et cinq points simples en commun.

8. — Occupons-nous maintenant d'exprimer la condition 3°).

Les courbes $C^*$ ne peuvent avoir, en deux points différents de P et dont les multiplicités pour les $C^*_2$ ont pour somme $\nu$, des multiplicités dont la somme surpasse $n_1$.

Il suffit, pour le prouver, de supposer qu'il puisse exister deux points $P_1$, $P_2$ respectivement multiples d'ordres $i$, $\nu - i$ pour les $C^*_2$, multiples d'ordre $k$, $k'$ $(k + k' > n_1)$ pour les $C^*$.

Alors, une transformation quadratique dont les points fondamentaux sont P, $P_1$, $P_2$ change les $C^*_1$ en des droites, les $C^*_2$ en des courbes d'ordre $2\mu - (\mu - \nu) - i - (\nu - i) = \mu$, et les $C^*$ en des courbes d'ordre $2m - (m - n_1) - k - k' = m(k + k' - n_1) < m$. La condition 3°) ne serait donc pas remplie par $|C^*|$, ce qui est contre l'hypothèse.

Nous avons donc complètement démontré le premier théorème énoncé dans le préambule.

9. — Théorème de M. G. Kœnigs. — Pour déterminer les surfaces F possédant deux faisceaux de coniques, nous devons faire $n_1 = n_2 = 2$, et, si l'on écarte le plan $(n = 1)$ $\nu \leq 2$.

*1*er *cas.* — $\nu = 1$. Nous avons vu qu'alors, $|C^*_2|$ est un faisceau de droites dont le sommet sera désigné par P' $(\mu = 1)$.

Les équations (3) et (4) deviennent $(k \leq n_1$ ou $2)$ ;

$$m^2 = (m - 2)^2 + x_{11} + 4x_{12} + n \ ,$$

$$m = x_{11} + 2x_{12} + 2 \ .$$

$|C^*_2|$ n'ayant qu'un point-base, on a $x_{11} + x_{12} \leq 1$.

De ces trois équations, on déduit aisément les trois solutions :

a) $m = 2$, $x_{11} = x_{12} = 0$.

$|C^*|$ est le système des coniques du plan et F est par suite la surface de Véronèse dans $S_5$.

b) $m = 3$, $x_{11} = 1$, $x_{12} = 0$.

$|C^*|$ est le système des cubiques planes ayant deux points bases simples et F est une surface d'ordre 7, de $S_7$, à sections hyperplanes elliptiques.

c) $m = 4$, $x_{11} = 0$, $x_{12} = 1$.

$|C^*|$ est le système des quartiques elliptiques (deux points-bases doubles P, P') et F est une surface d'ordre 8 de $S_8$ à sections hyperplanes elliptiques. Remarquons que la surface du septième ordre (cas *b*) s'obtient comme projection d'un de ses points de cette surface du huitième ordre.

*2*e *cas.* — $\nu = 2$. Alors, $|C^*_2|$ est un faisceau de coniques $(\mu = 2)$. Nous désignerons par $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ les quatre points-bases de ce faisceau.

D'après l'observation générale faite précédemment (n° 8), la somme des multiplicités des courbes $C^*$ en deux des points $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, ne peut excéder $n_1 = 2$, les équations (3) et (4) deviennent :

$$m^2 = (m - 2)^2 + x_{11} + n \ , \qquad (x_{11} \leq 4) \ ,$$

$$2m = x_{11} + 2 \ .$$

De la seconde, on déduit que $x_{11}$ est pair. Si $x_{11} = 4$, on a $m = 3$, $n = 4$ et le système $|C^*|$ est celui des cubiques planes ayant cinq points simples P, $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$. F est donc une surface d'ordre 4, à sections elliptiques, de $S_4$.

Si $x_{11} = 2$, on a $m = 2$, $n = 2$ et F est une quadrique, $|C^*|$ étant le système des coniques passant par deux des points $P_1, \ldots, P_4$.

L'hypothèse $x_{11} = 0$ conduit à $m = 1$ et est inadmissible.

Ainsi se trouve démontré le théorème de M. G. Kœnigs.

10. — SURFACES AYANT UN FAISCEAU DE CONIQUES ET UN FAISCEAU DE CUBIQUES UNICURSALES. Nous poserons $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ et nous aurons à examiner les trois cas $\nu = 1, 2, 3$ (le dernier correspondant à des cubiques gauches).

*1^er cas.* — $\nu = 1$. — Comme nous l'avons vu tantôt, on a $\mu = 1$, et $|C^*_2|$ est un faisceau de droites de sommet P′. Les équations (3), (4), s'écrivent :

$$m^2 = (m - 3)^2 + k^2 + n \,, \qquad m = k + 2 \,,$$

en supposant P′ $k$-uple pour les $C^*$. Or, on a $k \leq n_1$, c'est-à-dire $k \leq 3$.

Nous avons donc quatre hypothèses à faire :

a) $k = 3$, $m = 5$, $n = 12$.

$|C^*|$ est le système des quintiques ayant deux points-bases respectivement doubles et triples. Ces quintiques sont donc de genre deux et F est une surface du douzième ordre, à sections de genre deux, de $S_{11}$ (car les quintiques planes sont $\infty^{20}$ et l'imposition de points triples ou doubles équivaut respectivement à six ou trois conditions).

b) $k = 2$, $m = 4$, $n = 11$.

$|C^*|$ est le système des quartiques de genre deux ayant un point-base double et un point-base simple. F est donc une surface d'ordre 11, à sections de genre deux, de $S_{10}$.

c) $k = 1$, $m = 3$, $n = 8$.

$|C^*|$ est le système des cubiques planes avec un point-base P′ et F est donc une surface d'ordre 8, à sections elliptiques, de $S_8$.

d) $k = 0$, $m = 2$ (impossible).

*2^e cas.* — $\nu = 2$. Actuellement, $|C^*_2|$ est un faisceau de coniques dont les points-bases sont $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$. ($\mu = 2$). On a $k \leq 3$ et par suite

$$x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 4 \,.$$

Les équations (3) et (4) deviennent :

$$m^2 = (m - 3)^2 + x_{11} + 4x_{12} + 9x_{13} + n \,,$$
$$2m = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2 \,.$$

La première de ces équations s'écrit, plus simplement,

$$x_{11} + 4x_{12} + 9x_{13} + n = 6m - 9 \,.$$

Nous allons donner à $x_{11}$, $x_{12}$, $x_{13}$ les différentes valeurs compatibles avec l'inégalité écrite ci-dessus et nous en déduirons les valeurs correspondantes de $n$ et $m$. Nous formerons ainsi le ta-

bleau suivant, en remarquant que $x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13}$ et par suite $x_{11} + 3x_{13}$ doivent être pairs :

| | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *a)* | 4 | 0 | 0 | 3 | 5 |
| *b)* | 3 | 0 | 1 | 4 | 3 |
| *c)* | 2 | 2 | 0 | 4 | 5 |
| *d)* | 2 | 1 | 0 | 3 | 3 |
| *e)* | 2 | 0 | 2 | 5 | + 1 |
| *f)* | 1 | 0 | 3 | 6 | — 1 |
| *g)* | 0 | 4 | 0 | 5 | 5 |
| *h)* | 0 | 3 | 0 | 4 | 3 |
| *i)* | 0 | 2 | 2 | 6 | 1 |
| *j)* | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 |
| *k)* | 0 | 1 | 0 | 2 | — 1 |
| *l)* | 0 | 0 | 4 | 7 | — 3 |
| *m)* | 0 | 0 | 2 | 4 | — 3 |
| *n)* | 0 | 0 | 0 | 1 | — 3 |

Les cas *a), b), c), d), g), h)* sont évidemment les seuls à considérer.

Dans le cas *a)*, $|C^*|$ est le système des cubiques planes ayant quatre points-bases simples $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ et F est donc la surface d'ordre 5, de $S_5$, à sections hyperplanes elliptiques.

Dans le cas *b)*, $|C^*|$ est le système des quartiques rationnelles ayant un point-base triple $P_1$ et quatre points-bases simples P, $P_2$, $P_3$, $P_4$. F est donc une réglée cubique de $S_4$.

Dans le cas *c)*, $|C^*|$ est le système des quartiques elliptiques ayant deux points-bases doubles $P_1$, $P_2$ et trois simples P, $P_3$, $P_4$. F est une surface d'ordre 5 de $S_5$, à sections hyperplanes elliptiques.

Dans le cas *d)*, $|C^*|$ est le système des cubiques ayant trois points-bases, un double $P_1$ et deux simples $P_3$, $P_4$. F est une réglée cubique de $S_4$.

Dans le cas *g)*, $|C^*|$ est le système de quintiques elliptiques ayant cinq points doubles. F est une surface d'ordre 5, de $S_5$, à sections elliptiques.

Dans le cas *h)*, $|C^*|$ est le système des quartiques rationnelles à trois points-bases doubles et un simple. F est une réglée cubique de $S_4$.

*3e cas.* — $\nu = 3$. Alors, nous savons que $|C^*_2|$ est un faisceau de cubiques planes ayant un point-base double $P_1$ et cinq points-bases simples $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$, $P_6$ ($\mu = 3$).

D'après ce que nous avons vu au n° 8, la somme des multiplicités du point $P_1$ et de l'un des points $P_2, \ldots, P_6$ pour $|C^*|$ est

au plus égale à trois. Soit $k_i$ la multiplicité de $P_i$ pour $|C^*|$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

On aura à faire quatre hypothèses :

$\alpha)$ $k_1 = 3$. Alors, $k_2 = \ldots = k_6 = 0$. Les équations (3) et (4) deviennent

$$m^2 = (m - 3)^2 + 9 + n, \qquad 3m = 6 + 2.$$

Cela est impossible en nombres entiers.

$\beta)$ $k_1 = 2$. Alors $k_i \leq 1$ $(i = 2, 3, \ldots, 6)$. On pourra écrire, en appelant $x_{11}$ le nombre des points $P_2, \ldots, P_6$ simples pour les $C^*$,

$$m^2 = (m - 3)^2 + 4 + x_{11} + n,$$
$$3m = 4 + x_{11} + 2 = x_{11} + 6.$$

$x_{11}$ doit être multiple de 3 et d'autre part, $x_{11} \leq 5$, donc on peut avoir :

a) $x_{11} = 3$, $m = 3$, $n = 2$.

F est alors un quadrique, $|C^*|$ étant le système des cubiques planes avec un point-base double et trois simples.

b) $x_{11} = 0$, $m = 2$, ce qui est impossible.

$\gamma)$. $k_1 = 1$. Soit alors $x_{11}$ le nombre des points $P_2, \ldots, P_6$ simples pour les $C^*$, $x_{12}$ celui de ces points doubles pour les $C^*$. On a

$$m^2 = (m - 3)^2 + 1 + x_{11} + 4x_{12} + n,$$
$$3m = 2 + x_{11} + 2x_{12} + 2 = x_{11} + 2x_{12} + 4$$

Nous dressons un tableau analogue à celui de tantôt, mais en omettant d'écrire les cas à rejeter.

| | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $m$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| $a)$ | 5 | 0 | 3 | 3 |

$|C^*|$ est le système des cubiques planes à six points-bases simples et F est donc une surface cubique générale de $S_3$.

$\delta)$ $k_1 = 0$. Avec nos notations habituelles, nous aurons

$$n + x_{11} + 4x_{12} + 9x_{13} = 6m - 9,$$
$$3m = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2.$$

On en déduit

$$n + 3x_{13} + 3 = x_{11}.$$

Or, $x_{11} \leq 5$, donc $n + 3x_{13} \leq 2$ et par conséquent $x_{13} = 0$, $n = 2$, $x_{11} = 5$, $x_{12} = 0$, $3m = 7$, ce qui est impossible. Donc l'hypothèse $\delta)$ est à rejeter.

Ainsi se trouve démontré notre théorème III énoncé au début de ce travail.

Janvier 1913. Lucien GODEAUX (Morlanwelz, Belgique).

---

## SUR LES ROULETTES A BASE RECTILIGNE

---

R. de Saussure (*American Journal of mathematics,* XVII, 1895, p. 269-272) a donné des solutions bien simples du problème des roulettes dans le roulement d'une courbe plane sur une base rectiligne et du problème inverse, c'est-à-dire de la détermination du profil générateur correspondant à une roulette assignée *a priori.* Je vais indiquer, dans le présent article, une méthode de résolution de ces problèmes qui, dans bien des cas, présente certains avantages.

1. — Un cas particulièrement intéressant de déplacement d'une figure plane dans son plan est certainement celui pour lequel une courbe (C) du plan mobile, invariablement liée à ce plan mobile, est assujettie à passer par un point fixe O et à toucher en ce point une droite fixe $Ox$ : *la construction ordinaire du centre instantané de rotation est alors illusoire.* L'abbé Aoust (Analyse infinitésimale des courbes planes, 1873, p. 250-251) a le premier remarqué que le centre instantané de rotation est, pour chaque position de la courbe (C), le centre de courbure de cette. courbe (C) correspondant à celle des normales de cette courbe qui coïncide momentanément avec la droite $Oy$ ; de sorte que, ainsi que l'observe ce géomètre, le mouvement est produit par le roulement sur la base rectiligne $Oy$ de la développée de la courbe (C). Cette même remarque fut faite, en 1901, par E. Duporcq, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (à propos de la Question 1861, p. 43). Ignorant ces remarques de l'abbé Aoust et d'E. Duporcq, j'avais, en 1909, signalé cette même propriété *(Nouvelles Annales,* juillet 1909, *Sur les surfaces de Monge).*

Supposons que dans le plan fixe $xOy$ se déplace une courbe (C) invariable en grandeur ; cette courbe est supposée rapportée à des axes $\omega\xi\eta$, mobiles mais invariablement liés à (C). Le déplacement du plan $\omega\xi\eta$ par rapport au plan fixe $Oxy$ est défini par les conditions suivantes : la courbe (C) doit constamment passer par O et y toucher la droite fixe $Ox$. Soit :

$$\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi = \varpi ,$$

$\varpi$ étant une fonction donnée de l'azimut $\varphi$, l'équation de la tan-

gente à la courbe (C) en un point quelconque, par rapport aux axes mobiles $\omega\xi\eta$ : cette fonction $\varpi$ étant la distance de $\omega$ à la tangente et sa dérivée $\frac{d\varpi}{d\varphi}$ représentant la distance du même point $\omega$ à la normale correspondante de (C), on peut donc poser les relations suivantes entre $\varpi$, sa dérivée, et les coordonnées par rapport aux axes fixes $Oxy$ du point $\omega$ :

$$(1) \qquad y = \varpi , \qquad x = \frac{d\varpi}{d\varphi} ;$$

l'équation de la normale à la roulette du point $\omega$ est

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0 ;$$

il résulte donc des formules (1) que cette normale rencontre l'axe $Oy$ au point d'ordonnée

$$y = \varpi + \frac{d^2\varpi}{d^2\varphi} ,$$

(à moins que $\frac{d\varpi}{d\varphi}$ ne soit nul, c'est-à-dire que $\omega$ ne soit sur $Oy$ : la normale à la trajectoire de $\omega$ est alors $Oy$). En interprétant la relation précédente, on est conduit, par conséquent, à considérer le centre de courbure de (C) correspondant à la normale $Oy$ comme étant le centre instantané de rotation.

2. — Les formules (1) permettent de déterminer le lieu du point $\omega$ dans le plan fixe, lorsque la courbe (C) est donnée et inversement d'effectuer la recherche des courbes (C) telles que le point $\omega$ ait une trajectoire ($\Gamma$) assignée *a priori*. Si (C) est donnée, l'élimination de $\varphi$ entre les équations (1) conduira à une relation entre $x$ et $y$ qui sera l'équation cartésienne de ($\Gamma$). Inversement si ($\Gamma$) est donnée, soit

$$x = f(y)$$

l'équation de cette courbe imposée ; l'équation de (C) sera

$$\varphi = \int \frac{d\varpi}{f(\varpi)} + \text{const} ;$$

la courbe (C) dépend donc alors d'une constante arbitraire, qui n'a aucune influence sur la forme de cette courbe : deux courbes différant par les valeurs de cette constante arbitraire se déduisent, en effet, l'une de l'autre par une rotation autour du pôle $\omega$. Il était d'ailleurs évident *a priori* que les courbes (C) correspondant à une roulette imposée ($\Gamma$) devaient dépendre d'une équation différentielle du premier ordre, admettant la rotation autour de $\omega$ pour transformation infinitésimale.

J'emprunterai à M. H. Brocard[1] des exemples de détermination de la courbe $(\Gamma)$ lorsque (C) est connue. Lorsque (C) est une ellipse de foyer $\omega$ (*Nouvelles Annales*, 1872, Question 959, p. 132), soit

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

l'équation de cette conique ; sa podaire par rapport à $\omega$ est le cercle principal ; l'équation polaire tangentielle de la conique est donc

$$\varpi^2 - 2c\varpi \cos \varphi = b^2 ;$$

d'où, en dérivant cette équation par rapport à $\varphi$ et en appliquant ensuite les relations (1), il résulte que la trajectoire de $\omega$ a pour équations cartésienne et polaire :

$$(x^2 + y^2)(y^2 + b^2)^2 = 4a^2y^4 , \qquad r(2a - r) \sin^2 \theta = b^2 .$$

Lorsque (C) est une ellipse de centre $\omega$, la même méthode conduit à la quartique circulaire

$$x^2y^2 + (y^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0$$

comme lieu de $\omega$. Considérant encore le cas d'une parabole (C) de foyer $\omega$, la trajectoire $(\Gamma)$ de $\omega$ est la quartique d'équations cartésienne et polaire :

$$a^2(x^2 + y^2) = y^4 , \qquad r. \sin^2 \theta = a .$$

(*Nouvelles Annales*, 1872, Question 973, p. 500). Ces deux dernières roulettes ont été étudiées par W.-H. Besant (*ibid.*, e871, p. 327 et 554).

3. — Le problème inverse du précédent conduit à des considérations beaucoup plus intéressantes.

Supposons, par exemple, que la courbe imposée $(\Gamma)$ est une droite ; soit

$$x \cos a + y \sin a = b$$

son équation ; l'une des courbes (C) est donc

$$\varpi = \frac{b}{\cos a} - \text{tang}\, a \,.\, e^{-\varphi \,\text{cotg}\, a} ;$$

pour $b = o$, c'est-à-dire lorsque la droite imposée $\Gamma$ passe par O, cette équation représente une spirale logarithmique. Lorsque $b$ est différent de zéro, elle représente une courbe parallèle à la spirale logarithmique : ces courbes parallèles à la spirale loga-

---

[1] Voir aussi : Question 457 de *Mathésis* 1890 p. 205 [(C) est une parabcle de foyer ou de sommet $\omega$] et l'article *Roulettes de coniques* de M. H. Brocard dans la *Nouvelle Correspondance Mathématique* de 1876 (p. 373).

rithmique viennent d'être l'objet d'une Question intéressante de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (n° 3951, 1911, p. 266, — 1912, p. 153-156) : « Pour qu'un système de courbes parallèles ne comprenne que des courbes semblables, il faut que leur développée « soit une spirale logarithmique. Toutes les courbes parallèles à « une spirale logarithmique et situées d'un même côté de cette « spirale sont semblables entre elles, sans être pourtant semblables à la spirale logarithmique. Le cercle seul est semblable à « ses parallèles. La développante de cercle est la seule courbe « égale à ses parallèles ».

Comme second exemple simple, je citerai celui de la parabole ($\boldsymbol{\Gamma}$) d'équation

$$x = 1 + y^2 \; ;$$

la courbe (C) correspondante, est définie par l'équation

$$\varphi = \int \frac{d\varpi}{1+\varpi^2} = \text{arc tang}\, \varpi \; ,$$

ou

$$\varpi = \text{tang}\, \varphi \; ;$$

cette courbe (C) est donc l'antipodaire d'une courbe *Cappa*.

4. — Dans les *Nouvelles Annales* de 1909, j'avais rapidement signalé la solution du problème inverse dans le cas particulier où la courbe imposée ($\boldsymbol{\Gamma}$) est une circonférence. Ce problème se présente dans l'étude de la forme rationnelle qu'il convient de donner aux tiges qui dirigent les vannes des écluses de certains canaux. Dans le cas particulier où le cercle imposé ($\boldsymbol{\Gamma}$) est tangent à la droite $oy$, j'avais annoncé que la courbe (C) est l'inverse d'une développante de cercle ou une courbe parallèle à cette inverse ; ce résultat s'établit immédiatement sans aucun calcul ; une figure montre, en effet, que la courbe (C) correspondant à un cercle ($\boldsymbol{\Gamma}$) tangent en O à l'axe O$y$ doit avoir sa tangente polaire constante : cette courbe est donc, d'après Côtes, la tractrice compliquée de M. Loria (Spezielle Kurven, II, p. 200), courbe qui est encore désignée par les dénominations de tractrice polaire (Giard, Neuberg), de spirale tractrice (G. Teixeira), de tractrice circulaire (H. Brocard). Dans le cas où le cercle ($\boldsymbol{\Gamma}$) touche O$y$ en un point autre que O, la courbe ($\boldsymbol{\Gamma}$) est une parallèle de la précédente.

Dans le cas général d'un cercle ($\boldsymbol{\Gamma}$) quelconque, d'équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \; , \qquad (a > 0)$$

la courbe (C) a pour équation

$$(2) \qquad \varphi = \int \frac{d\varpi}{a + \sqrt{R^2 - (\varpi - b)^2}} \; ;$$

l'intégration s'effectue élémentairement, mais trois cas sont à distinguer : lorsque R est supérieur à $a$, on doit introduire la fonction logarithmique ; lorsque $R = a$ (cas de la tractrice compliquée et de ses parallèles) et lorsque R est inférieur à $a$, l'intégrale dépend des fonctions circulaires. Il est aisé de démontrer que ces diverses courbes ne sont autres que les tractrices du cercle ($b = o$) ou des parallèles à ces tractrices ($b \neq o$), soit par un raisonnement géométrique, soit par un calcul simple.

Vérifions cette propriété analytiquement, ce qui nous permettra d'établir l'équation des tractrices du cercle par une méthode bien plus simple que celles de Morley et de Bordoni. Considérons, en effet, un cercle de centre O, d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2 ;$$

soit (C) une tractrice de ce cercle ; la tangente à cette tractrice (C) en un quelconque de ses points M coupe le cercle en deux points : soit N l'un d'eux ; la condition imposée est $MN = \text{const} = l$. Projetons en P le centre O du cercle sur la droite MN ; on a

$$OP = \varpi , \qquad PM = \frac{d\varpi}{d\varphi} ,$$

puisque ces longueurs ne sont autres que les distances de O à la tangente et à la normale en M de la courbe (C) ; le triangle rectangle PON donne alors la condition

$$R^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PN}^2$$

qui se traduit par l'équation différentielle des tractrices cherchées

$$R^2 = \varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\varphi} - l\right)^2 ;$$

celle-ci se met finalement sous la forme :

$$(3) \qquad d\varphi = \frac{d\varpi}{l \pm \sqrt{R^2 - \varpi^2}} ;$$

qui s'identifie immédiatement avec l'équation (2).

Puisque j'ai antérieurement fait allusion à l'équation de Morley et de Bordoni, il convient d'indiquer comment il est possible de la retrouver en partant de l'équation tangentielle (3). Il suffit de remarquer que l'on a :

$$r^2 = \varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\varphi}\right)^2 , \qquad \frac{1}{\varpi^2} = \frac{1}{r^2} + \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 ;$$

ces deux relations permettent d'obtenir des expressions de $\varpi^2$ et de $\left(\frac{d\varpi}{d\varphi}\right)^2$ en fonction de $r^2$ et $\frac{dr}{d\theta}$ ; en substituant dans l'équation différentielle (3) de la tractrice on obtient l'équation de Morley-Bordoni [1].

5. — Supposons qu'on veuille réaliser un roulement sur une base rectiligne pour lequel une roulette soit assignée à l'avance. A ce problème, on pourra substituer celui du mouvement défini par une courbe (C) de grandeur invariable passant par un point fixe et y touchant une droite fixe. Il suffira de choisir arbitrairement un point O sur la base donnée et de considérer celle-ci comme étant l'axe des ordonnées $Oy$ d'un système d'axes rectangulaires ($Ox$, $Oy$).

Le cas du tracé d'une droite avec une base rectiligne est particulièrement intéressant, car il se retrouve chaque fois que la base quelconque rencontre la roulette assignée, elle-même quelconque : la roulette peut, en effet, être toujours assimilée à une spirale logarithmique (voir mon article antérieur *Sur les spirales logarithmiques osculatrices à une courbe plane*) au voisinage du point d'intersection, puisque les petits arcs de la base et de la roulette imposée voisins du point d'intersection peuvent être remplacés par des éléments des tangentes aux deux courbes en ce point (*Exercices et compléments de mathématiques générales*, § 263). C'est un résultat bien connu que la courbe génératrice doit être la spirale logarithmique : il résulte, en effet, du théorème sur le centre instantané de rotation et la construction générale des tangentes aux roulettes, que le rayon vecteur émanant du point générateur de la roulette rectiligne et aboutissant à un point de la courbe roulante doit faire un angle constant avec la tangente à cette courbe.

Ce même théorème se rattache au 3° du présent article ; la méthode indiquée est certainement plus compliquée dans ce cas que la méthode directe. Mais considérons le *tracé d'un cercle avec une base rectiligne* (*Exercices et compléments de mathématiques générales*, § 264). Substituons à ce problème le problème équivalent du 4° : *la courbe roulante sur Oy doit être la développée d'une tractrice de cercle :* cette courbe est donc parfaitement définie par une propriété géométrique remarquable ; en second lieu, puisque la tractrice du cercle a été obtenue tangentiellement, cette développée a une équation qu'on peut écrire *sans aucun nouveau*

---

[1] Les tractrices du cercle font l'objet du paragraphe 282 des *Exercices et compléments de mathématiques générales* (pp. 218-220) de MM. H. Bouasse et E. Turrière (Paris, Delagrave, 1912). La tractrice circulaire est considérée comme trace de la *roulette coupante* et la figure 200, qui la représente dans un cas particulier, a été tracée par un procédé mécanique. Une application aux voitures y est indiquée.

*calcul :* il suffit de remplacer $\frac{d\varpi}{d\varphi}$, dans l'équation différentielle (3), par $\varpi$, et $\varphi$ par $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Cette développée de la tractrice du cercle est d'après Morley la courbe que Ch. Laboulaye appelle *courbe à* n *saillies,* dans le cas de la représentation au moyen des fonctions circulaires ; dans le cas de la représentation au moyen des fonctions hyperboliques, la courbe peut être aisément construite à partir de la *spirale de Poinsot :* elle se rattache donc, dans ce cas, à la spirale logarithmique. Entre ces deux cas, se place celui où la courbe roulante est

$$r = \frac{2a}{1 - \theta^2},$$

c'est-à-dire est une transformée cissoïdale de deux spirales hyperboliques. (Voir G. Kœnigs, Leçons de Cinématique, Paris, 1897, p. 170 ; G. Loria, Spezielle Kurven, II, p. 158 et 128).

É. Turrière (Poitiers).

---

## SUR LES AXES PRINCIPAUX D'INERTIE

Lorsqu'on étudie le complexe formé par les axes principaux d'inertie d'un système, on choisit généralement comme axes coordonnés les axes de symétrie de l'ellipsoïde central d'inertie. C'est à l'aide de ce système de référence que l'on rétablit ordinairement le remarquable théorème de Binet montrant, entre autre, que le complexe des axes principaux est identique au complexe des normales aux quadriques homofocales à l'ellipsoïde central de gyration. Dans beaucoup d'ouvrages d'enseignement on emploie aussi, pour chercher la condition à laquelle doit satisfaire une droite pour être axe principal, un système de référence dont l'axe des $z$ coïncide avec la droite choisie. On se borne alors à établir une condition analytique. Il est pourtant facile d'interpréter géométriquement la relation à laquelle on arrive. On obtient ainsi des théorèmes qui, sans avoir l'importance du théorème de Binet, sont cependant intéressants.

Pour qu'une droite quelconque, choisie comme axe $Oz$, soit avec axe principal d'inertie il faut et il suffit que l'on puisse trou-

ver sur cette droite un point $O_1$ (0, 0, $h$) tel que les deux premiers produits d'inertie relatifs à des axes parallèles aux axes coordonnés et passant par ce point soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\Sigma my(z - h) = 0 , \qquad \Sigma mx(z - h) = 0 ,$$

ou, en appelant M la masse totale du système, $x_g$, $y_g$, $z_g$ les coordonnées du centre de gravité, D et E les deux premiers produits d'inertie relatifs aux axes primitifs $Ox$, $Oy$, $Oz$ :

$$D - hMy_g = 0 , \qquad E - hMx_g = 0 .$$

D'où la condition classique :

$$Dx_g - Ey_g = 0 . \qquad (1)$$

Pour interpréter cette équation considérons l'ellipsoïde d'inertie ayant pour centre l'origine O des axes coordonnés :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EXZ - 2FXY = 1 .$$

L'équation du plan diamétral conjugué, dans cet ellipsoïde, à l'axe $Oz$ a des coefficients respectivement proportionnels à :

$$-E \qquad -D \qquad C .$$

D'autre part les coefficients de l'équation du plan déterminé par l'axe considéré et le centre de gravité du système sont proportionnels à :

$$y_g \qquad -x_g \qquad 0 .$$

La condition (1) exprime la perpendicularité de ces deux plans. Donc, l'origine ayant été laissée arbitraire sur l'axe :

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un axe soit principal est que le plan diamétral conjugué à la direction de l'axe dans l'ellipsoïde d'inertie relatif à un point quelconque de cet axe soit normal au plan déterminé par l'axe et le centre de gravité.*

De là résulte que si un axe est principal tous les plans diamétraux conjugués à sa direction, dans les ellipsoïdes d'inertie ayant pour centre les différents points de l'axe, sont perpendiculaires à un même plan : le plan déterminé par l'axe et le centre de gravité.

L'axe des $z$ étant toujours la droite considérée, supposée axe principal, prenons comme axe des $x$ la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur $Oz$. Alors :

$$y_g = 0$$

et la condition (1) se réduit à :

$$D = 0 . \qquad (1')$$

La cote $h$ du point pour lequel l'axe $Oz$ est principal est donnée par :

$$E - hMx_g = 0 \qquad (2)$$

Soient $O_1$ (0, 0, $\alpha$) un point quelconque de $Oz$ et $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $E_1$, $F_1$, les coefficients de l'équation de l'ellipsoïde d'inertie de centre $O_1$ rapporté à des axes menés par $O_1$, parallèlement aux axes $Ox$, $Oy$, $Oz$. Les coefficients de l'équation du plan diamétral conjugué à la direction de l'axe dans l'ellipsoïde d'inertie relatif à $O_1$ sont proportionnels à :

$$-E_1 \qquad -D_1 \qquad C_1$$

or

$$E_1 = \Sigma mx(z - \alpha) = E - \alpha Mx_g$$

$$D_1 = \Sigma my(z - \alpha) = 0 , \qquad C_1 = \Sigma m(x^2 + y^2) = C .$$

Le plan diamétral considéré a comme équation par rapport aux axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ :

$$-(E - \alpha Mx_g)X + C(Z - \alpha) = 0$$

ou :

$$-EX + CZ + \alpha(Mx_gX - C) = 0$$

Il décrit donc, lorsque $\alpha$ varie, un faisceau dont l'axe a pour équations :

$$Mx_gX = C , \qquad EX = CZ ,$$

ou :

$$X = \frac{C}{Mx_g} , \qquad Z = \frac{E}{Mx_g} = h .$$

Cette droite est située dans le plan perpendiculaire à l'axe au point pour lequel celui-ci est principal. Il suffit de se rapporter à l'étude des percussions pour remarquer que c'est la ligne suivant laquelle il faudrait faire agir une percussion appliquée au système pour que, celui-ci pouvant tourner autour de $Oz$, les appuis de l'axe ne supportent aucune percussion. Nous pouvons donc énoncer le théorème :

*Si une droite est axe principal d'inertie, les plans diamétraux conjugués à la droite dans les différents ellipsoïdes d'inertie ayant pour centres les points de cette droite forment un faisceau de plans. L'axe de ce faisceau est la ligne suivant laquelle il faudrait faire agir une percussion appliquée au système pour que l'axe principal supposé immobilisé ne supporte aucune percussion.*

F. Bouny (Mons).

---

# MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

## Sur un problème de dynamique.

Réponse à une question proposée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*[1].

*Une ellipse est parcourue par un point mobile* P *d'un mouvement képlérien (il obéit à la loi des aires, centre des forces un foyer); en chaque point* P *on mène la tangente* PT *telle que* PT *soit le vecteur qui figure la vitesse. Quel est le lieu géométrique du point* T ?

Au centre des forces considérons une terne orthogonale[2] dextrorsum (**i**, **j**, **k**) telle que **i** soit parallèle à l'axe majeur de l'ellipse et **i**, **j** soient parallèles au plan de l'ellipse même ; le vecteur :

$$P' = T - P$$

sera défini par[3] :

$$P' = \frac{1}{p}\left\{ \frac{(P - O) \wedge \mathbf{k}}{\rho} - e\mathbf{j} \right\} \tag{1}$$

où $p$ est le paramètre, $\varrho$ le module de P — O, $e$ l'excentricité. alors :

$$T - O = (T - P) + (P - O) = \frac{P - O}{p\rho} \wedge \mathbf{k} - \frac{e}{p}\mathbf{j} + (P - O)$$

c'est-à-dire :

$$T - O_1 = \frac{1}{p\rho}(P - O) \wedge \mathbf{k} + (P - O) \tag{2}$$

ayant posé :

$$O_1 = O - \frac{e}{p}\mathbf{j}\ . \tag{3}$$

De (2) on tire :

$$\rho_1^2 = (T - O_1)^2 = \frac{1}{p^2\rho^2}\left\{ (P - O) \wedge \mathbf{k} \right\}^2 + (P - O)^2$$

---

[1] Question n° 3972 proposée par M. A. Boutin, *Intermédiaire*, janvier 1912, p. 5.

[2] Burali-Forti et Marcolongo, *Eléments de calcul vectoriel*, Paris, Hermann, 1911.

[3] Marcolongo, *Theoretische Mechanik*, S. 62, erster Bd; Leipzig, Teubner, 1911.

c'est-à-dire :

$$\rho_1^2 = \frac{1}{p^2} + \rho^2$$

donc : $\varrho_1$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont $\frac{1}{p}$ et $\varrho$ sont les côtés de l'angle droit ; si $\vartheta$ est l'angle des droites $TO_1$ et PO, en multipliant scalairement (2) par P — O, on a :

$$(T - O_1) \times (P - O) = (P - O)^2 = \rho^2$$

c'est-à-dire :

$$\rho\rho_1 \cos\vartheta = \rho^2 \ , \quad \rho_1 \cos\vartheta = \rho \ .$$

De $O_1$ conduisons la parallèle à OP et de T la perpendiculaire sur $O_1P_1$ ; il résulte :

$$O_1P_1 = \rho \ , \qquad P_1T = \frac{1}{p} \ ;$$

par conséquent $P_1$ décrira une ellipse $\varphi_1$ semblable et semblablement posée à la trajectoire de P et dont le foyer $O_1$ se déduit de O par la formule (3). On peut donc conclure :

*Si le sommet* $P_1$ *d'un angle droit décrit l'ellipse* $\varphi_1$, *tandis que l'un de ses côtés passe constamment par le foyer* $O_1$, *un point* T, *situé sur l'autre côté à une distance constante* $\frac{1}{p}$ *du sommet, décrira le lieu demandé.*

Armand Palomby (Naples).

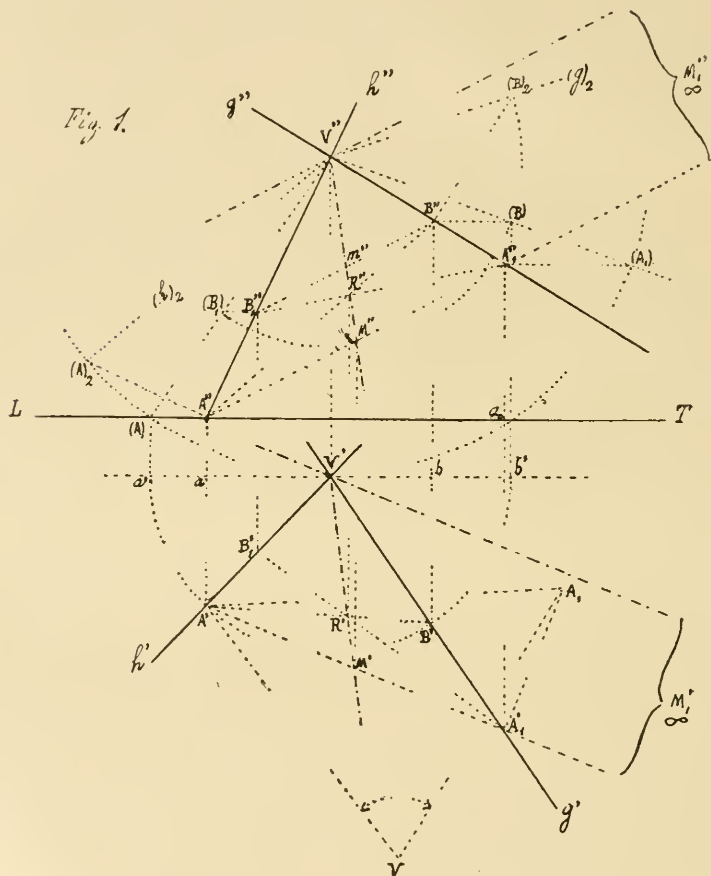
## Déterminations directes des projections des bissectrices d'un angle

*en Géométrie descriptive dans le système de Monge.*

Pour construire les projections des bissectrices d'un angle, on a généralement recours au rabattement et au relèvement du plan de cet angle. Cette méthode est indirecte, et parfois elle n'est guère praticable, par exemple, lorsque, en tout ou en partie, les traces des côtés ne rentrent pas dans les limites de la feuille. Quant aux expédients habituels du changement de plans, de la réduction homothétique ou du *rabattement dans l'espace*, communément en usage, ils ne sont pas directs non plus dans ce cas-là et souvent même ils sont laborieux. En outre, je ferai remarquer que le système de rabattement, tout en étant assez simple, a pour-

tant l'inconvénient de trop restreindre la figure sur laquelle on opère, au détriment de l'exactitude du tracé.

De sorte qu'il ne me semble pas hors de propos de signaler quelques *solutions directes* de ce problème[1].




La première est suggérée par la propriété des bissectrices de l'angle au sommet d'un triangle isocèle : l'une divise la base en parties égales et l'autre lui est parallèle. En même temps on

[1] Des solutions analogues pour la bissection de l'angle dièdre furent déjà indiquées il y a plusieurs années (V. *Atti del Collegio degl' Ing. ed Arch.*, Palermo, 1889, et *Periodico di Matem.*, Livorno, 1908) ; elles auraient dû suivre plutôt que précéder celles que nous venons d'exposer. Mais aujourd'hui seulement elles se sont présentées à mon esprit.

utilise, dans une seconde solution, la symétrie des côtés par rapport à la bissectrice de l'angle, de manière que, dans son plan, une transversale quelconque est coupée par la symétrique en un point de cette bissectrice.

Une dernière solution enfin s'obtient en appliquant le principe

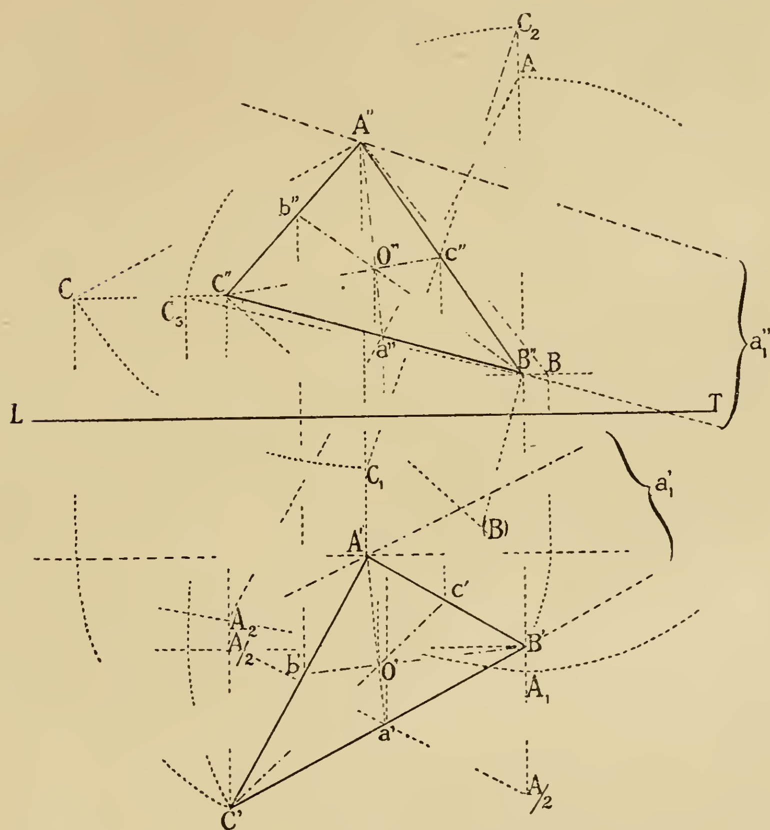



Fig. 2.

connu que les bissectrices de tout angle dans un triangle coupent le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés de l'angle.

La 1re *figure* contient les deux premières solutions, et il suffit de noter que si nous considérons, à partir du sommet, deux segments quelconques VA, VB sur les côtés *g* et *h* de l'angle donné (uniquement pour des raisons de simplicité choisies de façon que les projections horizontales en soient égales) en les faisant suc-

cessivement tourner autour de la verticale V, jusqu'à ce qu'ils deviennent parallèles au plan vertical, on obtient là, en véritable grandeur, les dimensions V(A) et V(B), qui se reportent réciproquement en $V(A_1)$ et $V(B_1)$ sur ces droites en construisant leurs projections respectives.

Les points milieux M et *m* des transversales $AA_1$ et $BB_1$ (bases, comme on sait, des deux triangles isocèles semblables avec le sommet commun V) et les parallèles menées à ces droites par ce point, donnent les bissectrices demandées VM et $VM_1$ de l'angle donné. L'une de ces bissectrices est déterminée aussi par l'intersection R des lignes $AB_1$ et $A_1B$, relativement à cette bissectrice, et symétriques entre elles.

*Remarque.* — Les perpendiculaires aux V″A″ et V″B″ dans leurs extrémités non communes respectivement égales à *a*A′ et à *b*B′ (qui sont les différences entre les distances au plan vertical de V avec A et B) donnent les points $(A)_2$ et $(B)_2$ qui tombent respectivement sur les circonférences de centre V″ déjà indiquées. Ces points permettent encore de trouver de nouveau les vraies grandeurs des segments VA et VB susdits, construction qu'on peut comprendre comme un rabattement sur le plan vertical, de deux plans qui les projettent verticalement.

De même l'hypoténuse du triangle rectangle $A'A_1A'_1$, dont le côté $A_1A'_1 = A''_1 a_0$, est comme la base $AA_1$ du triangle isocèle $VAA_1$; en faisant A′V et $VA_1$ égaux à AV, l'angle A′VA sera, dans sa vraie grandeur, celui des droites considérées dans l'espace.

La 2^me^ *figure* représente les projections d'un triangle quelconque ABC et des bissectrices de ses angles, obtenues par le principe susdit des segments proportionnels. Cependant il faut trouver avant tout les vraies longueurs A″C, A″B et $C_3B''$ de ses côtés (par la méthode ordinaire, par exemple des rotations) et puis sur les lignes de rappel déjà marquées A″A′, B″B′, C″C′ l'on prend, à partir des parties opposées ou de la même partie, des projections horizontales ou verticales de chaque côté, des segments égaux ou proportionnels aux deux autres côtés. Par exemple l'on trace $C''A^2 = CA''$ (vraie longueur de CA) et $B''A = B''A_1$, tous deux égaux à A″A (vraie longueur de AB); alors les transversales $AA_2$ et $A_2A_1$ donnent sur C″B″ les points *a*″ et $a''_1$, qui appartiennent respectivement aux bissectrices de l'angle opposé A. Et si, comme dans notre dessin, le point $a''_1$ se trouve en dehors du tableau, on considère la bissectrice qui correspond comme 4^me^ harmonique des trois rayons donnés (c'est-à-dire les deux côtés de l'angle et l'autre bissectrice).

Deux bissectrices internes quelconques de ce triangle donnent, comme l'on sait, le centre O du cercle inscrit, dont on ne peut cependant déterminer le rayon par les seules méthodes proposées.

F. P. PATERNÒ (Palerme).

## Factorisation des grands nombres.

*A propos des articles de* MM. G. LORIA et A. AUBRY.

A propos des intéressantes Notes de MM. LORIA et AUBRY, publiées dans l'*Ens. math.* du 15 mai 1913 (p. 193-231), je me permets de signaler les articles parus en 1902 dans les Actes de l'Académie Royale des Sciences d'Amsterdam[1]. On y trouvera, entre autres, une méthode donnant immédiatement les facteurs du nombre que Mersenne proposa à Fermat pour la factorisation.

Si $G = a^2_1 - b_1$ est le nombre à factoriser, et $p$ est un facteur de G, la différence des restes de $a^2_1$ et de $b_1$ après division par $p$, doit être divisible par $p$.

Ecrivons

$$G = \left(\frac{G+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{G-1}{2}\right)^2 , \qquad \text{si} \qquad \frac{G-1}{2} \equiv r \pmod p$$

il faut que

$$\frac{G+1}{2} \equiv r + 1 \pmod p .$$

Donc

$$G \equiv (r+1)^2 - r^2 \pmod p \qquad \text{ou} \qquad G \equiv 2r + 1 \pmod p ,$$

donc $2r + 1$ doit être divisible par $p$.

*Par exemple :* $G = 80047 = (40024)^2 - (40023)^2$

$$G_1 = 40023 = 200^2 + 23 ,$$

$$\text{ou} \qquad G_1 = 200^2 - 1^2 + 24 , \qquad \text{ou} \qquad G_1 = (201 \times 199) + 24 .$$

Chacun des diviseurs 199 et 201 donnera 24 comme reste ; mais puisque $2r + 1 = 49$ n'est pas divisible par 199 ou 201, ces deux nombres ne seront pas des diviseurs de G. On peut écrire successivement :

| | $r$ | $2r+1$ |
|---|---|---|
| $G_1 = 201 \times 199 +$ | 24 | 49 |
| $202 \times 198 +$ | 27 | 55 |
| $203 \times 197 +$ | 32 | 65 |
| $204 \times 196 +$ | 39 | 79 |
| $205 \times 195 +$ | 48 | 97 |
| $206 \times 194 +$ | 59 | 119 |
| $207 \times 193 +$ | 72 | 145 |
| $208 \times 192 +$ | 87 | 175 |
| $\underline{209} \times 191 +$ | 104 | $\underline{209}$ |

[1] Verhandelingen van de K. Academie van Wetenschappen te Amsterdam, 1902, p. 374-384, 474-486, 623-631 et dans l'édition anglaise, p. 326-336, 425-436, 501-508. L'étude parut plus tard en brochure chez l'éditeur Versluys à Amsterdam.

Ce tableau est facilement construit puisque les restes 23, 24, 27, 32, ... ont pour différences 1, 3, 5, ... On trouve 209 comme facteur.

Le nombre G = 100895598169 de Mersenne-Fermat égale

$$(50447799085)^2 - (50447799084)^2$$

tandis que

$$50447799084 = 224605^2 + 393059 \quad \text{ou} \quad = (\underline{224606} \times 224605) + 168454$$

$2r + 1 = \underline{336909}$, donc 112303, diviseur commun des nombres soulignés, est un des facteurs de G.

F.-J. Vaes (Rotterdam).

---

# CHRONIQUE

## Commission internationale de l'enseignement mathématique.

### Sous-Commissions Nationales.

**Suisse.** — Comme conclusion à ses rapports, la Sous-commission suisse vient de publier un fascicule annexe intitulé « Réformes à accomplir dans l'enseignement mathématique en Suisse, vœux et propositions de la Sous-commission suisse ». Le texte est reproduit dans les trois langues nationales.

*L'Enseignement mathématique en Suisse,* Rapports publiés sous la direction de H. Fehr. — *Annexe* (34 p., Fr. 0,50 ; Georg & Cie, Genève et Bâle) :

Reformvorschläge und Anregungen aus den Berichten über den mathematischen Unterricht in der Schweiz.

Réformes à accomplir dans l'enseignement mathématique en Suisse.

Riforme da compiere nell'insegnamento delle matematiche nella Svizzera.

## Unification de la terminologie dans les théories du potentiel et de l'élasticité.

Sur l'initiative de M. le Prof. A. Korn (Charlottenbourg), il vient de se constituer une commission en vue d'une « *unification par voie d'entente internationale des notations et de la terminologie de la théorie du potentiel et de la théorie de l'élasticité* ». Nous reproduisons ci-après la *première circulaire :*

Il est superflu d'insister sur les grands avantages qu'il y aurait à provoquer une entente entre les travailleurs des diverses natio-

nalités sur les termes et les notations à employer dans n'importe laquelle des sciences pures et appliquées à l'industrie.

Parmi les diverses branches des Mathématiques et de la Physique théorique, c'est certainement la théorie du potentiel et celle de l'élasticité qui se prêteraient dès maintenant à faire l'objet d'une entente de ce genre, pourvu que la tentative soit faite suivant un plan convenable et dans un esprit assez large.

A. *Domaine auquel l'unification des termes et notations se bornerait pour le moment.* — 1. L'adoption d'un même terme pour une même notion dans les différentes langues étant irréalisable, il conviendrait de fixer les termes de façon à en rendre la traduction d'une langue dans une autre aussi facile que possible.

2. L'unification de la terminologie et des notations ne porterait — dans le projet en question — que sur la théorie du potentiel et celle des milieux élastiques, isotropes, en repos. Quant à une extension des conventions considérées à la théorie générale des équations du type elliptique, elle devrait seulement être prise en considération.

Les termes et notations adoptés devront s'éloigner le moins possible de ceux et de celles qui sont les plus usités.

B. *Plan d'exécution.* — Le Comité d'organisation s'adresse, au moyen de cette première circulaire, aux astronomes, mathématiciens et physiciens en les priant d'abord de vouloir bien répondre à la question suivante :

Quelles sont les notions et les notations sur lesquelles l'unification doit porter ?

Les réponses, parvenues dans le courant de l'année présente, seront classées le plus rapidement possible ; dans le courant de l'année 1914 on sera prié, au moyen d'une seconde circulaire, de vouloir bien faire des propositions quant aux termes et notations à adopter. Un parfait accord des propositions qui seront faites ne pouvant pas être obtenu, le Comité se propose de faire connaître, au moyen d'une troisième circulaire (printemps 1916) les points qui auront donné lieu à des divergences d'opinion et de provoquer au prochain Congrès international des mathématiciens (1916) une discussion de ces points. Une quatrième circulaire (1917) rendra compte de cette discussion en invitant en même temps les savants qui n'auront pas pu assister au Congrès à faire connaître leur opinion.

Après étude et classement des propositions et discussions, le Comité d'organisation fera connaître, au moyen d'une cinquième circulaire (1919), les points où une entente sera probable et mettra aux voix ceux où la divergence d'opinions pourrait persister. Le vote aura lieu en 1920 au Congrès international des mathématiciens qui aura lieu cette année-là, et même les savants qui n'y assisteront pas pourront voter par écrit.

Le Comité d'organisation fera connaître, au moyen d'une sixième circulaire (1921), les résultats du vote, et il se propose, peu après, de publier les conventions internationales adoptées de cette façon.

La correspondance doit être rédigée en allemand, anglais, français ou italien et être adressée à M. Arthur Korn, Schlüterstrasse, 25, Charlottenbourg, Allemagne.

Le *Comité* se compose de MM. Max Abraham (Milan), Alfred Ackermann-Teubner (Leipzig), Robert d'Adhémar (Lille), Paul Appell (Paris), Serge Bernstein (Karkow), Christian Birkeland (Christiania), Wilhelm Bjerknes (Leipzig), Marcel Brillouin (Paris), Oreste Chwolson (St-Pétersbourg), Eugène Cosserat (Toulouse), François Cosserat (Paris), Gaston Darboux (Paris), Paul Ehrenfest (Leyde), Henri Fehr (Genève), Léopold Fejér (Budapest), Richard Gans (La Plata), Henri Graf (Berne), Sir George Greenhill (Londres), Jacques Hadamard (Paris), Wilhelm Hallwachs (Dresde), Fritz Hasenöhrl (Vienne), Tsuruichi Hayashi (Sendaï), Pierre de Heen (Liége), David Hilbert (Göttingue), Gustave Jäger (Vienne), Eugène Jahnke (Berlin), Paul Köbe (Leipzig), Walter König (Giessen), Arthur Korn (Charlottenbourg), Horace Lamb (Manchester), Emile Lampe (Berlin), Sir Joseph Larmor (Cambridge), Otto Lehmann (Carlsruhe), Eugenio-Elia Levi (Gênes), Tullio Levi-Civita (Padoue), Léon Lichtenstein (Berlin), A.-Ed.-H. Love (Oxford), Roberto Marcolongo (Naples), Max Mason (Madison, Wis.), Friedrich-Wilhelm-Franz Meyer (Königsberg), Albert-Abraham Michelson (Chicago), Gösta Mittag-Leffler (Stockholm), Ernst-Richard Neumann (Marbourg), Niels Nielsen (Copenhague), Wilhelm Oseen (Upsala), Michel Petrovitch (Belgrade), Emile Picard (Paris), Friedrich Pockels (Heidelberg), Demètre Pompeiu (Bucarest), Georgios Remundos (Athènes), Karl Schwarzschild (Potsdam), Carlo Somigliana (Turin), Wladimir Stekloff (St-Pétersbourg), Orazio Tedone (Gènes), Francisco-Gomes Teixeira (Porto), Esteban Terradas (Barcelone), Vito Volterra (Rome), Albert Wangerin (Halle), Otto Wiener (Leipzig), Stanislas Zaremba (Krakow).

## Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles.

La XXII^e assemblée générale de l'Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles a été tenue à *Munich*, du 13 au 15 mai 1913, sous la présidence de M. le Prof. Thaer (Hambourg). Le Comité local était dirigé par M. le Prof. W. von Dyck, président d'honneur, et M. le Prof. Dœhlemann, président. Les séances ont eu lieu à l'Aula de

l'Ecole technique supérieure ; elles ont été suivies par environ 200 personnes.

Parmi les conférences et discussions, nous signalerons les suivantes concernant les mathématiques et leurs applications aux sciences physiques :

M. K. Dœhlemann (Munich) : Sur la valeur éducative des mathématiques pures.

M. G. Kerschensteiner (Munich), conseiller de l'instruction publique : Sur la valeur éducative des études scientifiques et leur rôle dans l'organisation scolaire

M. S. Günther, M. G. R. (Munich) : L'élément historique dans l'enseignement des mathématiques et des sciences naturelles.

M. W. v. Dyck, G. R. (Munich) : Le rôle éducatif du Muséum allemand.

M. Hess (Nuremberg) : Sur les études complémentaires et les cours de vacances pour les maîtres de l'enseignement moyen. Le conférencier propose qu'il soit organisé des cours d'un semestre (été), tous les deux ans, dans une université ou dans une école technique supérieure allemande et destinés plus spécialement aux maîtres de l'enseignement moyen, afin de leur permettre de se tenir au courant des progrès de la science.

Après discussion, le Comité est invité à transmettre aux autorités scolaires compétentes l'étude très documentée de M. Hess en tenant compte des modifications et des vœux apportés par l'assemblée.

M. W. Brüsch (Lübeck) : Sur la question des travaux pratiques de chimie et de physique dans les gymnases réaux.

M. Lotzbeyer (Berlin) : Sur le rôle de l'arithmétique financière dans l'enseignement mathématique.

M. Fischer (Munich) : Des températures basses ; leurs démonstrations dans les cours de physique.

MM. A. Sommerfeld et Friedrich (Munich) : Nos conceptions actuelles sur les rayons Rœntgen et démonstration des phénomènes d'interférence sur les cristaux.

La prochaine assemblée annuelle aura lieu à *Braunschweig*, à Pentecôte 1914.

## Gabriel Arnoux.

Trop tard pour avoir pu l'annoncer, nous avons appris la mort de Gabriel Arnoux, décédé à Monaco le 3 avril dernier.

Il était né aux Mées (Basses-Alpes) le 23 mars 1831. Admis en 1846 à l'Ecole navale, il abandonna la carrière maritime en 1858 pour raisons de santé ; il était alors enseigne de vaisseau.

Il se retira dès lors dans son pays natal, où il est resté presque

jusqu'à sa mort, s'occupant de travaux sur les vers à soie, d'opérations de colmatage, puis consacrant ses loisirs à des recherches mathématiques, publiées sous forme de Notes ou de Mémoires dans les Comptes rendus de la *Société scientifique des Basses-Alpes*, et surtout dans ceux de l'*Association française pour l'Avancement des Sciences*.

Mais son œuvre principale, publiée sous le titre général : *Essais de psychologie et de métaphysique positives; arithmétique graphique*, se compose de quatre volumes, publiés à d'assez longs intervalles :

*Les espaces arithmétiques hypermagiques* (1894).

*Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques* (1906).

*Les espaces arithmétiques; leurs transformations* (1908).

*Essai de Géométrie analytique modulaire à deux dimensions* (1911).

Nous ne saurions tenter ici une analyse, même sommaire, de ces ouvrages. Nous pouvons dire seulement qu'on y trouve, peut-être pour la première fois, surtout dans le premier, des considérations vraiment scientifiques sur les questions de magie arithmétique.

La puissance d'invention d'Arnoux était prodigieuse; mais il lui fallait pour ainsi dire concrétiser les objets de ses recherches pour en saisir les rapports. Il mettait une sorte de coquetterie à se déclarer exclusivement *visuel* et à proclamer son incapacité à comprendre le langage algébrique, pour lequel, disait-il, il éprouvait une sorte de phobie.

Des études de sa jeunesse, il avait conservé une admiration pour la géométrie. Cela ne l'empêchait pas de montrer à l'occasion, même en algèbre, une grande finesse et une grande acuité de vue, dont j'ai pu souvent faire la constatation.

En dehors des sciences mathématiques, et au-dessus d'elles dans son esprit, il s'était passionnément adonné à des recherches philosophiques, et avait accumulé un nombre formidable de notes, de réflexions, de citations; il serait bien à désirer que d'aussi précieux documents ne fussent pas perdus après sa mort.

Le terme de *Métaphysique positive* représentait à ses yeux une science des raisonnements, s'appuyant sur l'observation et l'expérience, mais pouvant s'appliquer ensuite à toutes les recherches dont est capable l'humanité. A prendre les mots dans leur sens habituel, c'était une métaphysique-antimétaphysique.

En somme, il est à peu près impossible de rencontrer un esprit doué d'une plus grande originalité, plus inventif que ne le fut l'esprit d'Arnoux. Mais il se sentait, à cause de son éloignement de l'analyse mathématique, en mauvaise situation pour présenter une exposition de ses idées; et c'est ce qui le détermina à demander le concours de collaborateurs, auxquels il a rendu un hom-

mage excessif dans ses préfaces, s'effaçant presque lui-même avec une modestie trop grande, et bien rare.

Il nous est permis d'ajouter ici que la valeur morale de l'homme fut au moins égale à sa valeur intellectuelle. Bon et confiant, sa confiance et sa bonté furent souvent bien mal récompensées. Sa haute probité scrupuleuse, dans certaines circonstances, ne fut pas payée de retour; et plus d'une fois, ce que j'ai appris à ce sujet évoqua chez moi le souvenir de *L'Ennemi du peuple*, ce chef-d'œuvre d'Ibsen.

Dans ces dernières années, atteint par de cruelles infirmités, il quitta son village natal des Mées pour aller s'établir à Monaco, où il pouvait recevoir des soins plus assidus, que son état de santé exigeait impérieusement. Sa puissance de travail s'en trouva diminuée, mais non sa belle intelligence ni sa bonté, dont je trouve encore les marques dans la dernière lettre que j'ai reçue de lui à la fin de décembre 1912.

En résumé, celui qui vient de nous être enlevé n'eut pas une grande notoriété de son vivant parmi les mathématiciens. Cela n'empêche pas que sa mémoire doit être pieusement conservée, et que parmi les jeunes, plus d'un pourra trouver profit à étudier ses œuvres, en essayant de creuser plus profondément les sillons qu'il a tracés.

C.-A. Laisant.

## H. Weber.

Les sciences mathématiques viennent de faire une perte très sensible en la personne de M. Henri Weber, professeur à l'Université de Strasbourg. Né à Heidelberg le 5 mars 1842, Heinrich Weber était le fils d'un célèbre historien allemand. Il eut une jeunesse des plus heureuses, qu'il passa dans l'atmosphère scientifique de l'Université de Heidelberg. C'est là qu'il établit les bases solides de ses connaissances étendues, embrassant aussi bien les mathématiques que l'histoire, qu'il cultivait par tradition paternelle.

Après avoir étudié successivement à Heidelberg où il prit son doctorat en 1863, puis à Leipzig et à Kœnigsberg, il revint dans sa ville natale et fut admis comme privat-docent en 1867. Ce fut le début d'une brillante carrière dans l'enseignement supérieur. En 1870, il fut appelé à l'Ecole polytechnique de Zurich, puis en 1875 il accepta un appel à l'Université de Kœnigsberg (1875-1883), De là il passa successivement à Berlin (Ecole technique supérieure, 1883-84), à Marbourg (1884-93), à Gœttingue (1893-95), puis enfin à Strasbourg. En 1904 il présida avec distinction le 3e Congrès international des mathématiciens, à Heidelberg.

Elève de Riemann, H. Weber s'acquitta d'une façon magistrale

de la tâche qu'il s'était imposée en publiant le cours sur les équations aux dérivées partielles[1] et en se chargeant plus tard de rédiger l'édition des œuvres complètes de son éminent maître.

Ses recherches personnelles appartiennent principalement au domaine de l'Algèbre supérieure à laquelle il apporta d'intéressantes contributions. Chacun connaît son magistral Traité d'Algèbre[2], dans lequel il a réuni les fondements des différentes branches que comprend l'algèbre prise dans son sens le plus large, notamment la théorie des nombres, l'étude des groupes et la théorie des fonctions algébriques. Pour celles-ci il a établi, avec Dedekind, une remarquable théorie. C'est lui qui démontra le remarquable théorème que tout corps abélien est contenu dans un corps engendré par une racine de l'unité.

Nous rappellerons aussi l'important traité de mathématiques élémentaires qu'il publia, avec son collègue M. Wellstein, sous le titre d'*Encyklopädie der Elementar-Mathematik*[3], que nous avons eu l'occasion de signaler à plusieurs reprises à nos lecteurs.

H. Weber conserva jusqu'à ses derniers jours la plénitude de ses facultés, comme le témoigne son Précis d'Algèbre, édition réduite de son grand traité, et qui parut en automne 1912. Il succomba le 17 mai dernier, à la suite d'une attaque d'apoplexie qui le terrassa en pleine activité. Par ses travaux et par son enseignement, Weber laissera le souvenir d'un mathématicien de grand mérite et d'un excellent professeur. La science allemande perd en lui l'un de ses plus distingués représentants.

## Conférences mathématiques à Edimbourg.

La Société mathématique d'Edimbourg a organisé une série de conférences qui auront lieu du *4 au 8 août* 1913 dans les bâtiments de l'Université d'Edimbourg.

M. A.-W. Conway, Professeur de physique mathématique à l'Université de Dublin, donnera cinq conférences sur la théorie de la Relativité : *The Theory of Relativity and the New Physical Ideas of Space and Time*.

M. D.-W.-Y. Sommerville, Lecturer in Mathematics in the University of St-Andrews, donnera cinq conférences sur la Géométrie

---

[1] H. Weber, *Die partiellen Differential-Gleichungen der mathem. Physik*. Nach Riemann's Vorlesungen neu bearbeitet. — L'ouvrage comprend deux volumes qui viennent de paraître en 5e édition (1910-1912).

[2] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 3 volumes, 2e édition. Le premier volume a paru en français chez Gauthier-Villars, traduction de Griess. — Nous avons annoncé récemment l'édition réduite parue sous le titre *Kleine Ausgabe* (1 vol.; Vieweg & Sohn, Braunschweig).

[3] H. Weber u. J. Wellstein, *Encyklopädie der Elementar-Mathematik*. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende (3 vol., B. G. Teubner, Leipzig). — Le 1er volume, rédigé par Weber, est à sa 3e édition.

non-euclidienne : *Non-Euclidean Geometry and the Foundations of Geometry.*

M. E.-T. Whittaker, Professeur de Mathématiques à l'Université d'Edimbourg, donnera cinq conférences, avec démonstrations, intitulées : *Practical Harmonic Analysis and Periodogram Analysis; an Illustration of Mathematical Laboratory Practice.*

La finance d'inscription pour l'ensemble des conférences est de 1 L. 1 s. pour les personnes qui ne font pas partie de la Société mathématique d'Edimbourg; les inscriptions doivent être adressées au secrétariat de la Société mathématique avant le 28 juillet.

## Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

**Allemagne.** — M. F. Lindemann, Professeur à l'Université de Munich, a été nommé Docteur honoraire de l'Université St-Andrews (Ecosse).

M. D.-J. Schur, privat-docent à l'Université de Berlin, a été nommé professeur extraordinaire de mathématiques à l'Université de Bonn.

*Privat-docents.* — M. E. Steinitz, professeur de mathématiques à l'Ecole technique supérieure de Breslau, a été admis en qualité de privat-docent à l'Université de Breslau. — M. Cl. Thaer, privat-docent à l'Université de Iena, a été admis en qualité de privat-docent à l'Université de Greifswald.

*Société mathématique allemande.* — Les mathématiciens allemands *(Deutsche Mathematiker-Vereinigung)* se réuniront cette année à Vienne, du 21 au 26 septembre, sous la présidence de M. le Prof. K. Rohn, en même temps que le 85e Congrès des naturalistes et médecins allemands.

**Angleterre.** — M. A.-S. Eddington, premier assistant à l'Observatoire de Greenwich, a été nommé professeur d'astronomie à l'Université de Cambridge, en remplacement de Sir George Darwin.

M. A. Forsyth a été nommé Docteur honoraire de l'Université de Calcutta.

M. A.-R. Hinks, premier assistant à l'Observatoire de Cambridge, a été nommé professeur d'astronomie à Londres.

M. W.-H. Young, F. R. S., professeur à l'Université de Liverpool, a été nommé Docteur honoraire de l'Université de Genève.

**Canada.** — M. J.-C. Fields, professeur à l'Université de Toronto, a été nommé membre de la Société Royale de Londres.

**Chine.** — M. F. Rusch, privat-docent à l'Université de Zurich, a été nommé professeur de mathématiques et de physique à l'Université de Tientsin.

**Etats-Unis.** — M. P. Boutroux, de l'Université de Poitiers (France), a été appelé comme professeur de mathématiques à l'Université de Princeton.

**France.** — M. M. Bôcher, professeur à l'Université Harvard, fera des conférences à l'Université de Paris pendant le semestre d'hiver 1913-1914.

**Hollande.** — M. J.-C. Kapteyn, professeur à l'Université de Groningue, a reçu la *Médaille Bruce* de la Société astronomique du Pacifique, pour ses recherches sur le mouvement propre des étoiles, ainsi que la *Médaille Watson* de l'Académie Nationale des Sciences de Washington, pour ses travaux astronomiques.

**Italie.** — M. Max Abraham, professeur de mécanique rationnelle à l'Institut technique supérieur de Milan, vient d'être nommé professeur ordinaire.

M. G. Bordiga, privat-docent à l'Université de Padoue, est nommé professeur extraordinaire de géométrie projective.

M. E. Daniele, privat-docent à l'Université de Pavie, est nommé professeur extraordinaire de physique mathématique à l'Université de Catane.

M. G. Scorza, professeur de géométrie projective et descriptive à l'Université de Cagliari, est transféré à la même chaire dans l'Université de Parme.

M. L. Tonelli, privat-docent à l'Université de Bologne, est nommé professeur extraordinaire d'analyse algébrique à l'Université de Cagliari.

*Privat-docent.* — M. L. Amoroso, privat-docent d'économie politique à l'Université de Rome, a été admis aussi comme privat-docent de physique mathématique dans la même Université.

**Suisse.** — M. L. Bieberbach, privat-docent à l'Université de Königsberg (Prusse), est nommé professeur ordinaire de mathématiques à l'Université de Bâle.

M. S. Dumas, mathématicien au Bureau fédéral des Assurances, est nommé professeur extraordinaire de mathématiques financières à l'Université de Lausanne.

M. W. Mathies, privat-docent à Munster, a été nommé professeur de physique mathématique à l'Université de Bâle.

*Société mathématique suisse.* — La réunion annuelle aura lieu à Frauenfeld, le 9 septembre, à l'occasion de la 95e réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles.

*Ecole Polytechnique Fédérale.* — Le Conseil de l'Ecole a conféré le titre de professeur à M. Gust. Dumas, privat-docent. — M. Herm. Weyl, privat-docent à l'Université de Gœttingue, est nommé professeur de mathématiques supérieures en remplacement de M. C. F. Geiser, qui prend sa retraite.

### Nécrologie.

M. Eugène-Charles Combette, instructeur général honoraire de l'Instruction publique, est décédé le 22 juin 1913, à l'âge de 72 ans.

M. Th. Friesendorff, professeur de mécanique à l'Institut électro-technique de St-Pétersbourg, est décédé au mois d'avril dernier à l'âge de 42 ans.

G. König. — On annonce la mort, survenue le 8 avril dernier, de M. G. König, conseiller au Ministère, professeur honoraire de l'Ecole polytechnique de Budapest et secrétaire perpétuel de la Section des Sciences mathématiques et naturelles de l'Académie magyare. Né le 16 décembre 1849, König fit ses études supérieures à Berlin et à Heidelberg où il prit le grade de docteur en 1870; par ses remarquables travaux, il ne tarda pas à prendre une place importante dans le monde des mathématiciens hongrois.

Gaston Tarry. — Nous apprenons la mort de M. Gaston Tarry, décédé au Hâvre le 21 juin 1913.

---

# NOTES ET DOCUMENTS

### Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

*Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.*

(13e article)

## ALLEMAGNE

### Les mathématiques dans les écoles supérieures de jeunes filles.

*Die neuzeitliche Entwicklung des mathem. Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands insbesondere Norddeutschlands*[1], von Prof. Dr J. Schröder (Hamburg). — Le tome I des *Abhandlungen* est consacré plus spécialement à l'enseignement mathématique dans les écoles supérieures de l'Allemagne du Nord. Il comprend 5 fascicules dont le dernier, dû à M. Schröder, vient de paraître. C'est une étude très détaillée sur les écoles supérieures de jeunes filles et une source précieuse de renseignements pour des études comparatives sur telle ou telle partie de l'instruction mathématique chez les jeunes filles.

M. Schröder a divisé son rapport en 3 parties :

1° Les origines et l'organisation des écoles supérieures de jeunes filles en Allemagne, au point de vue historique ;

2° La place et l'amplitude de l'enseignement du calcul et des mathématiques dans les établissements supérieurs d'instruction pour la jeunesse féminine de Prusse, à la suite de la réorganisation scolaire d'août 1908 ;

---

[1] 1 fasc. de 183 p., Band I, Heft 5 der Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland; 6 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

3° L'enseignement mathématique dans les écoles supérieures des autres États allemands.

La première partie donne donc un aperçu historique de la question. En quelques pages l'auteur caractérise l'instruction en général, à défaut d'instruction mathématique, dans les écoles de jeunes filles pendant les XVI, XVII et XVIII^e^ et le commencement du XIX^e^ siècles ; il montre les changements et les fluctuations dans le développement de cette instruction sous l'influence, soit des transformations subies par la société elle-même, soit du changement progressif du rôle de la femme dans cette société.

Pendant la deuxième moitié du XIX^e^ siècle les progrès réalisés furent asssez considérables grâce à l'impulsion donnée par des réunions de personnes éclairées (Weimar, 1872) et à la formation d'associations destinées à soutenir les intérêts des établissements d'instruction pour jeunes filles et à étudier l'organisation et la préparation du corps enseignant.

Le décret de mai 1894 cependant (Maibestimmung von 1894), quoique consacrant déjà un progrès, n'accorde au calcul qu'une place secondaire tout au moins en ce qui concerne les heures d'étude, 2 h. $^2/_3$ en moyenne contre 6, 4 $^1/_2$ et 4 h. respectivement pour l'allemand, le français et l'anglais.

Des transformations graduelles continuèrent à préparer la réorganisation complète de l'enseignement en Prusse d'août 1908.

La seconde partie du rapport traite exclusivement de cette réorganisation et plus spécialement de l'organisation intérieure de l'enseignement mathématique. L'organisation actuelle comporte d'abord le lycée formé de 10 classes. La classe inférieure X prend les élèves dès l'âge de 6 ans. L'enseignement est ensuite partagé entre 2 genres d'établissements, les « *Studienanstalten* » et les *lycées supérieurs* (Oberlyzeen) qui comprennent chacun plusieurs subdivisions.

Les « Studienanstalten » donnent accès à l'Université par 3 sections : 1° Les cours d'école supérieure réale, 5 ans d'études dès la sortie de la classe II du lycée. 2° Les cours de gymnase réal, 6 ans d'étude à partir de la classe III du lycée (du latin, mais pas de grec). 3° Les cours de gymnase (latin et grec), 6 ans d'études dont les 2 premiers en commun avec la section précédente.

Le lycée supérieur prend les élèves à leur sortie de la dernière classe du lycée (classe I) ; il comporte 2 subdivisions, la « Frauenschule », 2 années d'études et le séminaire de maîtresse supérieure, 4 ans d'études, 3 jusqu'à l'examen de maturité et 1 an de pratique avant l'examen de professorat.

Les plans d'étude indiquent pour les *lycées*, l'arithmétique, des éléments d'algèbre jusqu'aux équations du 2^e^ degré à 1 inconnue, de la géométrie plane jusqu'à la circonférence et l'aire du cercle, le calcul des aires et volumes de corps simples.

Pour les *lycées supérieurs* (section du séminaire), l'algèbre est poussée jusqu'aux nombres complexes, aux équations du 2^e^ degré à 2 inconnues et au binôme avec exposants positifs entiers ; la planimétrie jusqu'à l'étude des points harmoniques et des faisceaux. La trigonométrie plane, la stéréométrie, des éléments de géométrie projective et de géométrie analytique plane sont aussi traités.

Dans les « *Studienanstalten* » il s'ajoute pour la section réale supérieure l'étude des équations du 3^e^ degré et des principales séries ; les sections coniques au point de vue synthétique et analytique, enfin les éléments de trigonométrie sphérique nécessaires en géographie mathématique.

Pour la section de gymnase réal, les programmes sont sensiblement les mêmes, seulement les sections coniques ne sont traitées qu'analytiquement.

Pour la section du gymnase, le programme est celui du lycée supérieur, avec quelques adjonctions telles que des théorèmes simples relatifs aux sections coniques.

M. Schröder accompagne son exposé de développements sur la méthode et l'esprit dans lesquels ils doivent être conçus ainsi que des points de comparaison avec les écoles réales de jeunes gens ; il s'occupe également de la question des manuels.

Au sujet des mathématiques dans les examens de maturité, l'auteur donne des détails très circonstanciés soit pour l'organisation, soit pour les matières exigées ; il y joint des exemples de questions proposées aux examens.

La lecture de ce chapitre permet de se rendre compte très nettement du champ d'étude mathématique minimum parcouru par les élèves durant leur temps de scolarité.

La moyenne des jeunes filles est-elle apte à profiter d'une instruction mathématique dans la même mesure que la moyenne des jeunes gens ? Une étude approfondie de la question, appuyée sur les résultats déjà obtenus dans les diverses écoles prussiennes, principalement depuis la réorganisation de 1908, amène M. Schröder à constater que la majorité des spécialistes reconnaissent aux jeunes filles des capacités très suffisantes pour recevoir une instruction mathématique. Si l'instruction mathématique des jeunes filles doit être équivalente à celle des jeunes gens, la meilleure méthode d'enseignement ne sera cependant dans bien des cas pas la même chez celles-ci que chez ceux-ci.

L'auteur expose en une dizaine de pages la question de la préparation du corps enseignant et des grades actuellement exigés pour l'enseignement dans les écoles supérieures de jeunes filles en Prusse.

Enfin, dans la 3e partie de son rapport, M. Schröder considère l'état actuel de l'enseignement mathématique dans les autres Etats allemands, pour autant qu'il diffère de celui de la Prusse. La majorité de ces Etats ont adopté presque intégralement la même organisation que la Prusse. Quelques-uns pourtant, Hambourg, la Saxe, la Hesse, ont conservé ou adopté des plans qui leur sont propres et, pour les mathématiques tout au moins, sont mieux partagés que la Prusse.

Pour ne citer qu'un exemple, le royaume de Saxe avait déjà dès 1876 une organisation assez complète d'écoles de jeunes filles en 10 classes et l'a encore perfectionnée en 1910 afin de ne pas rester en arrière du mouvement de réforme prussien.

Plusieurs schémas et tableaux comparatifs permettent de voir aisément les correspondances et les divergences des classes parallèles dans les divers types d'écoles; en outre l'indication du nombre d'heures consacrées aux différentes branches d'études permet de se rendre compte de l'importance donnée aux mathématiques.

Renée Masson (Genève).

### L'histoire des mathématiques dans l'enseignement moyen.

*Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterricht der höheren Schulen Deutschlands*[1], von Gebhardt Martin. — L'histoire des mathéma-

[1] 1 vol. de 157 p.; 4 M. 50; B. G. Teubner, Leipzig.

tiques n'occupe pas, dans l'enseignement secondaire, ni même dans l'enseignement supérieur, la place qu'elle devrait occuper. C'est là une vérité que M. Gebhardt met en évidence dans l'étude très riche et très documentée qu'il nous présente sur ce sujet.

Passant en revue les divers manuels de mathématiques qui sont employés dans les écoles, il montre combien, à quelques exceptions près, les allusions historiques y sont rares. Et cependant un enseignement des mathématiques qui serait basé sur l'histoire de cette discipline serait vivifié et prendrait un intérêt nouveau pour les élèves, surtout pour ceux qui se laissent rebuter par des formules dont ils ne voient pas la signification. Certains problèmes ne s'éclairent que s'ils sont replacés dans le milieu historique où ils ont pris naissance. Pour comprendre la portée du calcul intégral et différentiel, il est de la plus haute importance de comparer les méthodes d'Archimède avec les méthodes qui furent créées par les géomètres du XVII[e] siècle et qui sont à la base de l'analyse moderne.

Mais l'histoire des mathématiques peut être envisagée à un point de vue plus général. Elle est indispensable à qui veut posséder une culture classique et étendue, car le développement des sciences et de la philosophie est intimement lié à celui des mathématiques.

Il est inutile d'insister sur tous ces points. La difficulté très grande qui subsiste est de choisir dans l'histoire des mathématiques les questions vraiment essentielles. Pour faciliter ce choix, M. Gebhardt consacre le dernier chapitre de son livre à une brève analyse des ouvrages d'ensemble qui traitent du développement historique des mathématiques. Il donne en outre une bibliographie détaillée (exclusivement allemande, il est vrai) des études concernant une époque ou un sujet spéciaux.

Arnold Reymond (Neuchâtel).

## La Cosmographie et la Géodésie dans l'enseignement moyen.

*Mathematische Himmelskunde u. niedere Geodäsie an den höheren Schulen*[1], von Dr Bernhard Hoffmann. — Dans cet opuscule M. B. Hoffmann, qui est directeur du Gymnase de Rawitsch, expose d'une manière détaillée et fort intéressante ses vues personnelles sur l'enseignement des premières notions d'astronomie dans les établissements secondaires supérieurs. Selon l'auteur, l'enseignement de la Cosmographie et de la Géographie mathématique doit être développé suivant les méthodes des sciences naturelles, c'est-à-dire qu'il doit être basé sur l'induction et l'expérience. En partant de ce principe, M. Hoffmann cherche à démontrer qu'il est possible de baser tout l'enseignement de la cosmographie sur les observations des élèves ; il affirme en outre que ce principe peut être appliqué en évitant tout surmenage et en restant dans les limites des programmes officiels.

Cette monographie est divisée en cinq chapitres.

I. *L'enseignement de la trigonométrie* (p. 1 à 10). — L'auteur rappelle d'abord les diverses manières d'enseigner les éléments de cette branche ; il signale qu'un assez grand nombre de professeurs allemands « d'une ancienne

[1] Abhandl. über den mathem. Unterricht in Deutschland, Band III, Heft 4. — 1 fasc. VI-68 p., 2 M., B. G. Teubner, Leipzig.

génération » persistent à utiliser l'expression « lignes trigonométriques ». Une autre erreur grave de cet enseignement est l'introduction immédiate des logarithmes des fonctions trigonométriques. C'est une lacune, dit l'auteur, de ne pas enseigner d'abord le calcul des rapports trigonométriques de quelques angles simples. Comme les logarithmes, les fonctions trigonométriques « tombent du ciel » ; il est facile pourtant de les calculer d'une manière élémentaire à l'aide de la similitude et de l'étude des polygones réguliers.

Dans le même chapitre, M. Hoffmann critique également la « peur des nombres décimaux » qui se manifeste en particulier dans les collections de problèmes ; il est bien rare, dit-il, de trouver dans les problèmes d'examens de maturité, d'autre ellipse que

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

la « königlich preussische Staatsellipse » (l'ellipse royale et gouvernementale prussienne).

II. *Notions élémentaires d'astronomie* (p. 10 à 17). — De nos jours, tout homme cultivé parle de la rotation terrestre et du mouvement de la Terre autour du Soleil ; bien peu cependant en comprennent le sens exact. A l'appui de cette affirmation, l'auteur cite le petit nombre de manuels de géographie mathématique exempts de fautes grossières. Jusqu'ici, l'enseignement de la cosmographie a été un enseignement dogmatique ; il faut le transformer en utilisant les observations personnelles des élèves.

La plupart des collèges allemands n'ont aucune installation astronomique ; ce qui existe est rudimentaire.

Les problèmes de maturité, tirés de l'astronomie élémentaire, sont peu nombreux et contiennent des erreurs ; la plupart se rapportent à des observations faites ailleurs que dans la localité où vivent les élèves. Une statistique sommaire de l'année 1910 montre que le quart des gymnases, la moitié des gymnases réaux et la plupart des écoles réales supérieures ont choisi des problèmes en géographie mathématique.

Les programmes prussiens ont réparti l'enseignement de la cosmographie entre la physique et les mathématiques, et ces deux branches ne sont pas toujours enseignées par le même maître.

L'auteur regrette que les étudiants qui se destinent à l'enseignement des mathématiques ne sachent pas utiliser les instruments les plus simples.

III. *Le matériel d'enseignement* (p. 17 à 25). — L'auteur conseille l'emploi d'un petit théodolite dont les deux cercles portent la même division ; un tel instrument suffit. M. Hoffmann utilise un appareil portatif, simple et solide, un petit théodolite de voyage de 500 francs. Si l'on en a le moyen, on peut acheter un instrument de passage et ensuite seulement un sextant. Le deuxième instrument nécessaire est une bonne montre de poche réglée sur le temps moyen ; une seconde montre donnant le temps sidéral rendra aussi d'excellents services.

L'auteur recommande également l'emploi du gnomon, composé d'un fil à plomb jetant ombre sur une planche ; celle-ci est recouverte d'une feuille de papier blanc ; elle est munie d'un niveau et de deux viseurs. Ce gnomon peut être utilisé en géométrie descriptive pour l'étude des sections coniques.

Un appareil photographique simple mais qui puisse être dirigé vers un

point quelconque du ciel, une lunette dont l'oculaire terrestre possède un réticule, un annuaire astronomique, quelques cartes célestes, une sphère en bois noirci sont les autres instruments nécessaires.

IV. *L'enseignement de la cosmographie* (p. 25 à 55). — L'enseignement est préparé par deux expériences faites près de l'équinoxe du printemps en présence des futurs élèves de la « Prima », la dernière classe des gymnases allemands : 1° la détermination de la déclinaison du soleil par l'observation de la hauteur de ses deux bords, le théodolite étant placé dans le méridien ; 2° une série de photographies du soleil, faites sur la même plaque, chaque jour à 0 h. sidérale, l'appareil étant dirigé vers le point le plus haut de l'équateur céleste.

Ces clichés, dont deux exemplaires sont reproduits dans les fig. 3 et 4, prouvent la marche du soleil sur un grand cercle de la sphère céleste.

Les premières leçons sont consacrées aux coordonnées horizontales d'un point quelconque de la salle, puis à la fenêtre et en plein air, avec le théodolite.

Maintenant commence la série principale des observations qui formeront la base de toutes les connaissances astronomiques des élèves ; l'observation de deux passages consécutifs du soleil et d'une étoile au méridien montrera la différence entre le jour solaire et le jour sidéral ; puis viendront les observations relatives à la rotation de la sphère céleste et les diverses notions qui s'y rattachent ; la position du pôle, les constellations polaires, les coordonnées équatoriales et le triangle fondamental peuvent aussi être expliqués dans les deux premiers soirs. Signalons quelques-uns des points que les élèves étudieront ensuite et toujours à l'aide d'observations : l'année tropique, l'inclinaison de l'écliptique, l'azimut et le temps du lever et du coucher d'un astre, la détermination de l'heure par le soleil ou une étoile et le problème réciproque : trouver la position d'un astre à un instant donné, la forme de l'écliptique par la grandeur des images photographiques du soleil, l'équation du temps, l'emploi très utile des cadrans solaires, la détermination déjà assez difficile d'une longitude par le télégraphe ou les satellites de Jupiter, les mouvements de la lune et des planètes, etc., etc. Un grand nombre d'exemples numériques illustre l'exposé de l'auteur.

V. *Géodésie élémentaire* (p. 55 à 66). — Les problèmes de géodésie donnés dans les examens de maturité ne semblent pas tirés de la pratique ; seuls les gymnases situés au bord de la mer font exception à cette règle.

L'auteur emploie dans l'enseignement de la géodésie élémentaire le théodolite portatif décrit au chapitre III, des jalons, une chaîne de 20 m., des fiches et une planchette.

La cour du collège et ses environs offrent les exercices les plus commodes ; l'enseignement marche ici de front avec celui de la géométrie et de la trigonométrie. Il est aussi possible de procéder à une triangulation simple, à des nivellements faciles.

Ce trop bref résumé engagera, je l'espère, quelques collègues à lire et à étudier le très intéressant travail de M. Hoffmann. Il est certain que cette monographie contribuera à améliorer sensiblement, à rendre plus pratique et moins dogmatique l'enseignement de l'astronomie élémentaire dans les lycées.

Toutefois, une affirmation de l'auteur me paraît très risquée. Sans surmenage, en restant dans les limites des programmes et sans empiéter sur le temps consacré aux autres branches, M. Hoffmann pense réaliser en une

année tout le vaste programme pratique et théorique exposé dans le chapitre IV. Cela me paraît impossible et il serait intéressant d'avoir l'avis de ceux qui ont l'habitude de cet enseignement.

Aug. Lalive (La Chaux-de-Fonds).

## Les mathématiques appliquées dans l'enseignement technique moyen.

*Die Angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie*[1], von Karl Ott. — Le livre de M. Ott comprend quatre parties. La première est consacrée aux généralités : place et importance des mathématiques appliquées dans les écoles techniques moyennes allemandes, méthodes d'enseignement et préparation des professeurs. La seconde partie traite d'une manière toute particulière l'enseignement de la mécanique technique et de la résistance des matériaux. L'utilisation des méthodes graphiques forme l'objet de la troisième partie. La quatrième et dernière partie se rapporte exclusivement à la géométrie descriptive.

*1re partie.* — Après avoir défini les mathématiques appliquées conformément aux conceptions modernes, l'auteur s'occupe d'en fixer les limites dans l'enseignement technique. Elles ne doivent pas être spécialisées à outrance en vue d'un enseignement particulier et elles ne peuvent pas empiéter sur l'enseignement universitaire. Elles doivent contribuer à donner au technicien une solide culture générale, lui permettant de résoudre avec facilité les problèmes de sa carrière.

Pour les méthodes d'enseignement, M. Ott préconise, et à juste raison, les idées de M. John Perry, lesquelles ont eu un grand succès dans l'enseignement technique moyen en Angleterre : le maître ne peut pas se contenter d'un exposé académique, il doit avoir recours à l'intuition, aux laboratoires, aux procédés graphiques ; il doit amener l'élève à travailler beaucoup par voie de questions, de problèmes et d'exercices sérieusement contrôlés. En parlant de laboratoires, l'auteur entend principalement ceux de physique, d'électrotechnique et de construction mécanique. Il recommande en outre l'introduction d'exercices de laboratoire de mécanique théorique.

Le chapitre consacré à la préparation des maîtres est intéressant. En Allemagne, l'enseignement des mathématiques appliquées est exclusivement confié à des ingénieurs diplômés ayant une pratique minimale de trois ans dans l'industrie. Mais la culture pédagogique de ces maîtres est nulle, car ils n'ont suivi aucun cours de cette nature pendant leurs études universitaires. D'un autre côté, les maîtres de l'enseignement général sont obligés de faire un stage d'une année dans une école avant d'obtenir un poste définitif. Comme il est impossible d'appliquer une telle mesure à des ingénieurs sortant de l'industrie, on doit se demander de quelle manière on comblera cette lacune sérieuse qui existe dans leur préparation. Cette question, comme nous le montre fort bien l'auteur, a été maintes fois discutée sans recevoir de réponse définitive. Pour le moment les ingénieurs engagés dans l'enseignement reçoivent au début un nombre très limité de leçons, avec l'obligation de suivre les classes de divers collègues afin d'acquérir l'expérience pédagogique nécessaire. En outre ces maîtres

[1] Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland, Band IV, Heft 2. — 1 fasc. 8°, 158 p.; 4 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

doivent continuer leur perfectionnement dans des cours de vacances organisés spécialement pour eux dans diverses universités.

2me *partie*. — Celle-ci est de toutes la plus importante. Elle est entièrement consacrée à la mécanique technique. Elle débute par l'exposé des heures réservées pour cette branche dans les écoles d'Etat pendant les quatre ou cinq semestres d'études prévus. Ces heures varient de 17 à 36. Viennent ensuite quelques programmes détaillés. Ceux-ci sont analogues à ceux que nous avons en Suisse. Plus loin l'auteur consacre quelques pages à la préparation des élèves admis dans les technicums. Nous pouvons remarquer en passant qu'on exige une pratique de deux ans dans l'industrie avant l'admission au Technicum. Les connaissances exigées sont très variables. Chaque école a d'autres conditions. En outre, les élèves forment des classes très peu homogènes. La même constatation est à faire dans les écoles techniques suisses.

Nous ne pouvons pas suivre l'auteur dans tous les détails qu'il donne sur les divers chapitres de la mécanique. Nous nous contenterons de dire qu'il insiste d'une manière toute particulière sur l'emploi des méthodes intuitives et expérimentales pour la perception des principes fondamentaux de la mécanique (pages 17 et suiv.).

Avec Meyer, il dit que : « le sens inné de la mécanique peut être détruit pour toujours par un enseignement abstrait mal exposé ». Le chapitre dans lequel il traite des ouvrages d'enseignement relatifs à la mécanique est un exposé bibliographique des plus intéressant, et chaque lecteur, pédagogue ou technicien, le consultera avec plaisir.

3e *partie*. — Sous la dénomination de méthodes graphiques dans les mathématiques appliquées, l'auteur vise principalement la statique graphique. La nature même des matières traitées impose une méthode de travail pédagogique qui est partout la même, à peu de choses près. Ici encore l'auteur donne une liste bibliographique très complète des ouvrages à consulter dans cette matière. Cette partie se termine par divers articles consacrés à des questions particulières : polygone funiculaire, mécanisme bielle-manivelle, distributions, régulateurs, etc.

4e *partie*. — En parlant de la géométrie descriptive dans l'enseignement technique, l'auteur n'entend pas seulement la partie mathématique pure qui traite du point, des lignes, des surfaces et des corps, mais il comprend toutes les méthodes de représentation s'appliquant aux objets techniques ». La géométrie descriptive doit être le langage des techniciens », dit-il. Cet enseignement se répartit sur 2 ou 3 semestres avec un total de 10 à 14 heures. Il englobe le dessin de géométrie, le dessin de projection, la construction des courbes techniques et la géométrie descriptive théorique, le tout avec le plus grand nombre possible d'applications pratiques.

Comme dans les parties précédentes l'auteur donne un exposé des méthodes employées ainsi qu'une liste bibliographique complète des ouvrages utilisés ou recommandés. A côté de cela, il insiste encore sur les détails d'exécution et sur l'emploi rationnel des modèles.

En parlant des exemples techniques à introduire dans cet enseignement, l'auteur nous semble cependant avoir négligé la valeur de certains exemples généraux et abstraits.

Nous sommes parfaitement d'accord que le dessin de projection peut et doit être illustré avec de beaux exemples habilement choisis dans la menuiserie, la construction ou la mécanique. Nous reconnaissons parfaitement

que les exemples d'ombres empruntés à l'architecture sont plus intéressants qu'une juxtaposition de corps géométriques. Nous sommes aussi d'avis que des pénétrations simples et des développements empruntés à la construction des chaudières sont plus avantageux que des pénétrations géométriques sèches. Cependant nous trouvons que le dessin de projection ne peut, ni ne doit se transformer en dessin d'architecture ou en dessin de machines, car un maître, quelle que soit sa préparation ne peut pas traiter avec assurance des questions qui ne relèvent plus de son métier. D'autre part le dessin de machines n'est plus de la géométrie descriptive.

En géométrie descriptive il y a des questions comme les traces de droites ou de plans, les intersections de plans, les intersections de droites avec des plans ou d'autres surfaces, les pénétrations quelconques, etc., qui demandent d'être traitées par des méthodes générales et qui ne peuvent plus être résolues avantageusement avec des objets techniques. L'objet géométrique général et abstrait prend alors un caractère plus simple et plus concret pour les élèves.

Ceci dit, nous pouvons terminer en faisant ressortir que le rapport de M. Ott est un beau livre, bien conçu, malgré certains passages un peu trop longs, son travail sera consulté avec plaisir par toutes les personnes qui s'intéressent à l'enseignement technique moyen.

L. Crelier (Bienne).

## ILES BRITANNIQUES

### N° 21. — La préparation mathématique des ingénieurs à Cambridge.

*The relation of mathematics to engineering at Cambridge*,[1] by Mr. B. Hopkinson, Professor of Mechanism and Applied Mecanics in the University of Cambridge. — On entend souvent dire que dans les travaux de l'ingénieur l'expérience pratique joue le rôle principal et que les déductions tirées d'expériences de laboratoire n'ont qu'une utilité relative. Il est vrai que dans la pratique de son art, l'ingénieur fait le plus souvent appel à son expérience personnelle et qu'il n'utilise au fond qu'un petit nombre de notions théoriques très simples. Mais si l'on envisage la science de l'ingénieur (Engineering Science) en tant que branche d'étude ou de recherche à l'Université, le rôle de l'analyse mathématique devient plus important.

Il faut distinguer entre la science de l'ingénieur et la physique pure. Dans sa recherche des lois, le physicien peut diriger les expériences à son gré; il dispose, jusqu'à un certain point, des conditions dans lesquelles il opère, il s'efforce de rendre ces conditions aussi simples que possible, de façon à pouvoir tirer ses déductions plus facilement. L'ingénieur lui, est en rapport plus direct avec la nature elle-même, il est tenu d'étudier le phénomène tel qu'il se présente et dans des conditions si complexes qu'il n'est plus possible de tenir compte intégralement de toutes les circonstances en jeu. Il est donc obligé de procéder par approximation et de négliger un certain nombre de données pour faciliter l'analyse du phénomène. Or, si l'on veut pouvoir accorder quelque crédit aux résultats de l'analyse, il importe de faire un choix judicieux des données lui servant de base. C'est là un des points essentiels de la science de l'ingénieur.

[1] 13 p.: Price 1 1/2 d.; Wyman & Sons, Londres.

Déjà antérieurement à 1903, époque à laquelle l'auteur du présent rapport fut chargé de la direction de l'Ecole d'ingénieurs de Cambridge, cet établissement se caractérisait par le fait que l'enseignement n'y constituait pas simplement une préparation à telle ou telle profession particulière, mais contribuait encore, dans un sens plus large, au développement général des étudiants. Cependant l'Ecole était placée, en quelque sorte sur un pied spécial, en ce sens qu'elle ne participait pas d'une façon directe à l'activité intellectuelle générale de l'Université et des Collèges de Cambridge. Les élèves ne profitaient pas suffisamment de l'avantage qui leur était offert de poursuivre leurs études dans un milieu de travail et de recherches, et les mathématiques pures de l'Ecole de Mathématiques de Cambridge n'étaient que d'une utilité très relative aux étudiants de l'Ecole d'Ingénieurs. Depuis une dizaine d'années, il n'en est plus de même ; une relation plus intime s'est établie entre les deux Ecoles, et actuellement les étudiants ingénieurs étudient les mathématiques générales et la mécanique élémentaire avec des professeurs de Collèges. Ces faits ont une grande signification pour toute personne ayant quelque connaissance de la vie intellectuelle de Cambridge, ils impliquent que les études d'ingénieurs y ont pris pied d'une façon effective, qu'elles y ont conquis pour ainsi dire droit de cité.

Actuellement l'organisation est en résumé la suivante : La première année est consacrée à l'étude des bases mathématiques nécessaires et des éléments de mécanique théorique, de dessin et de physique expérimentale. La seconde et la troisième année se passent à l'étude des branches de l'ingénieur proprement dites ; mais auparavant, les étudiants doivent passer un examen de mathématiques élémentaires et de mécanique (Qualifying Examination) pour permettre l'élimination des candidats incapables. L'introduction de cet examen a permis de définir avec plus de précision la nature et les limites de l'enseignement mathématique propre aux ingénieurs ; les professeurs de Collèges ont pu s'y conformer et disposer leurs cours selon les exigences requises. Une fois ce « Qualifying Examination » passé, les candidats peuvent poursuivre leurs études et se préparer aux diplômes (Mechanical Sciences Tripos, Engineering Tripos).

Le « Mathematical Tripos » a été en 1907 l'objet d'une heureuse réforme. Autrefois l'étudiant consacrait souvent trois années à la préparation de cet examen et une seule à celle du diplôme d'ingénieur proprement dit. Il passait évidemment trop de temps sur des abstractions et pas assez sur des réalités. Actuellement, la première partie du « Mathematical Tripos » est un examen de première année, qui dispense du « Qualifying Examination ». L'auteur formule encore un certain nombre de critiques sur le système d'examens en vigueur ; il voudrait entre autres que cette première partie du « Mathematical Tripos » portât sur un plus grand nombre de sujets. En appendice on trouvera les programmes et les questions relatives à divers examens.

## N° 22. — L'Algèbre dans l'enseignement moyen.

*The Teaching of Algebra in Schools,*[1] by Mr. S. Barard, Assistant Master at Rugby School. — Ce rapport a pour objet :

[1] 21 p.; Price 2 d. Wyman & Sons, Londres.

1. D'illustrer les nouvelles méthodes d'enseignement de l'algèbre par des citations tirées d'une demi-douzaine de manuels les plus récents d'algèbre élémentaire.

2. De comparer le système d'enseignement actuellement en vigueur avec un système basé sur les idées modernes concernant les nombres.

3. De critiquer brièvement les idées exprimées par Mr. Godfrey dans son rapport sur « The Algebra Syllabus in the Secondary School.[1] »

L'auteur répartit les élèves en trois catégories :

*a)* Les élèves ordinaires, ceux par exemple qui envisagent les mathématiques comme partie de l'éducation générale.

*b)* Les élèves pratiques parmi lesquels on peut placer ceux qui se destinent à une vocation militaire ou qui ont l'intention de devenir ingénieurs ou de se spécialiser en sciences.

*c)* Les futurs mathématiciens spécialistes qui, à partir de 16 à 17 ans, consacrent la plus grande partie de leur temps aux mathématiques.

Le but poursuivi dans l'enseignement de l'algèbre doit dépendre de la classe d'étudiants auxquels on s'adresse. S'il s'agit d'élèves ordinaires, on cherche à obtenir avant tout une certaine discipline mentale ; dans le cas d'élèves pratiques, par contre, on se place à un point de vue utilitaire. Mais dans l'un et l'autre cas cet enseignement ne doit pas simplement consister dans l'énumération d'un ensemble de règles et dans l'exécution d'un certain nombre d'exercices surannés comme c'est malheureusement souvent le cas ; on devrait accorder une plus grande importance aux principes et au développement logique des idées.

La plupart des manuels d'algèbre élémentaires renferment de nombreuses négligences soit dans les définitions soit dans les raisonnements. L'auteur passe en revue les principales, avec citations à l'appui et propose diverses modifications. Il constate aussi que les plans d'études devraient être revisés ; trop de temps se passe encore sur des sujets sans importance et le contact avec la vie réelle est encore insuffisamment établi. Voici quels seraient les points principaux de cette réforme :

1. Le plan d'études devrait être élaboré en ayant en vue les élèves de force un peu supérieure à la moyenne.

2. Les étapes variées qui servent d'intermédiaires entre l'arithmétique et l'algèbre devraient être étudiées séparément.

3. L'enseignement devrait être réglé de façon à conduire le plus rapidement et le plus naturellement possible au calcul infinitésimal.

L'auteur critique enfin quelques points exprimés par Mr. Godfrey dans son rapport sur « The Algebra Syllabus in the Secondary School ». Ce dernier s'élève par exemple contre ceux qui considèrent la discipline mentale comme le but principal de l'éducation mathématique ; cependant il serait difficile d'évoquer d'autres raisons en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques aux élèves ordinaires. Le plan d'études indiqué par Mr. Godfrey suffirait, dit-il, à occuper le non spécialiste jusqu'à la fin de son éducation mathématique à l'école, et il constituerait un acheminement au calcul infinitésimal. L'auteur n'est pas de cet avis, il estime qu'un élève très ordinaire pourrait terminer ce programme à l'âge de 16 ans, et l'expérience lui a montré que, jusqu'à 19 ans et en y consacrant le temps habituel, un élève

[1] Le N° 5 des « Special Reports on the Teaching of Mathematics in the United Kingdom ». Voir l'*Ens. math.* du 15 mars 1912.

de force moyenne peut parcourir un champ d'algèbre beaucoup plus considérable et acquérir en même temps de bonnes connaissances de géométrie, de trigonométrie et de mécanique.

## N° 23. — Sur la préparation scientifique du candidat à l'enseignement.

*Research and Advanced Study as a training for Mathematical Teachers*[1], by Mr. G. H. Bryan, Professor of Pure and Applied Mathematics in the University College of North Wales. — Actuellement, on commence à reconnaître en Angleterre l'importance des recherches mathématiques, non seulement en ce qui concerne les résultats scientifiques auxquels elles peuvent conduire, mais aussi au point de vue purement éducatif. Les futurs professeurs qui désirent être vraiment à la hauteur de leur tâche devraient, après avoir obtenu leurs diplômes, consacrer une certaine période, disons une année, à l'étude de certains domaines spéciaux et à diverses recherches. Jusqu'à présent cependant, on a peu fait pour encourager les étudiants à se livrer à ces recherches mathématiques, contrairement à ce qui se passe pour d'autres branches comme la physique et la chimie. Dans son rapport, l'auteur expose les causes probables de ce désintéressement et fait diverses propositions ayant pour but de remédier à cet état de chose.

Contentons-nous d'en indiquer brièvement les points principaux :

1. Il est désirable que les recherches mathématiques forment une partie de la préparation des maîtres de mathématiques aussi bien que pour les autres branches de la science ; les autorités que cette question concerne devraient en prendre considération.

2. Certains étudiants pourront craindre d'entreprendre des recherches sur telle ou telle question de mathématiques, car cela exige généralement un travail antérieur considérable. Pour parer à cet inconvénient, il faut insister sur la valeur d'études postérieures au diplôme, en vue d'une préparation à ces recherches, études qui garderaient un caractère distinctif des recherches proprement dites.

3. Un effort devrait être fait afin d'obtenir des listes de sujets de recherches d'un accès facile.

4. Pour un étudiant ordinaire qui désire retirer de ses recherches des avantages au point de vue éducatif, il importe de choisir des sujets n'impliquant pas nécessairement la découverte de nouveaux théorèmes, par exemple la collaboration à un travail original d'un spécialiste, investigations dans certains domaines déjà connus, comme l'histoire des mathématiques et de ses diverses branches, démonstrations de théorèmes connus par de nouvelles méthodes, travaux numériques concernant des problèmes pratiques.

5. Le candidat en mathématiques doit pouvoir lire les ouvrages français et allemands ; ces langues doivent donc faire partie de son champ d'étude.

6. Les cours de mathématiques en vue du diplôme devraient comprendre une certaine période consacrée exclusivement à l'étude des développements modernes de cette science en plus d'un cours général d'étude préliminaire.

7. L'examen concernant le cours général devrait être disposé de façon à pouvoir vraiment juger de la capacité générale et de l'intelligence du candidat et à décourager tout travail où la mémoire joue le rôle principal (« bookwork scribbling »).

---

[1] 21 p. : Price 1 $^1/_2$ d. Wyman & Sons, Londres.

8. Pendant la période d'étude spéciale, des séries de conférences devraient être données par d'éminents spécialistes.

9. Le système américain de « colloquia » pourrait être introduit avantageusement en Angleterre.

L'auteur trouve qu'actuellement l'étude des mathématiques occupe en Angleterre une position absolument fausse. Durant ces dernières années, on s'est rendu compte de la valeur d'un entraînement mathématique pour les étudiants en physique et pour les futurs ingénieurs, mais bien peu réalisent l'importance de ce qui peut se faire dans les mathématiques elles-mêmes en dehors du champ de leurs applications.

J.-P. Dumur (Genève).

---

## Cours universitaires.

Année 1913-1914.

# ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

**Columbia University** (New-York). — Prof. C. J. Keyser : Modern theories in geometry, 3 ; History and significance of central mathematical concepts, 3. — Prof. T. S. Fiske : Differential equations, 3 (I s.) ; Theory of functions of a real variable, 3. — Prof. F. N. Cole : Theory of functions of a complex variable, 3 ; Theory of groups, 3. — Prof. James Maclay : Theory of numbers, 3 ; Elliptic functions, 3. — Prof. D. E. Smith : History of mathematics, 3. — Prof. Edward Kasner : Seminar in differential geometry, 3 (I s.). — Prof. W. B. Fite : Infinite series, 3 (II s.). — Prof. H.-E. Hawkes : Higher algebra, 3 (I s.). — Dr H. W. Reddick : Differential equations, 3 (II s.). — Dr N.-J. Lennes : Theory of point sets, 3.

**Cornell University** (Ithaca). — Prof. J. McMahon : Fourier series and spherical harmonics, 3 ; Insurance and probabilities, 3. — Prof. J. I. Hutchinson : Elliptic functions, 2. — Prof. V. Snyder : Geometry on an algebraic surface, 2. — Prof. F. R. Sharpe : Differential equations, 2 ; Vector analysis, 3. — Prof. W. B. Carver : Projective geometry, 3. — Prof. D. C. Gillespie : Advanced calculus, 3. — Dr C. F. Craig : Theory of linear differential equations, 3. — Dr F. W. Owens : Foundations of geometry, 3. — Dr J. V. McKelvey : Advanced analytic geometry, 3. — Dr L. L. Silverman : Theory of numbers, 3 (II t.). — Dr W. A. Hurvitz : Theory of finite groups, 3 (I t.) ; Algebraic equations, 3 (II t.).

**Harvard University** (Cambridge, Mass.). — Prof. B. O. Peirce : Potential functions, 2 (first half-year). — Prof. W. F. Osgood : Advanced calculus, 3 ; Dynamics, II, 3 ; Theory of functions, II, 3 (second half-year) ; Theory of functions, I, 3, with Prof. Bôcher ; Prof. Bôcher : Fourier's series, Bessel's and Legendre's functions, 3 (II s.). — Prof. C. L. Bouton : Differential equations, with Lie's theory, 3 ; Introduction to modern geometry and modern algebra, 3, with M. Graustein. — Prof. J. L. Coolidge : Probability, 3 ; Algebraic plane curves, 3. — Prof. G. D. Birkhoff : Infinite series and products, 3 (I s.) ; Problem of three bodies, 3. — Dr D. Jackson : Distribution of primes, 3 (II s.). — Dr F. J. Dohmen : History of mathematics, 3 (I s.). — M. W. C. Graustein : Advanced algebra, 3 (I s.) ; Differential geometry, 3 (II s.) — Various courses in reading and research are also offered on special

topics, and Prof. Birkhoff and Dr Jackson will conduct a fortnightly seminar in analysis.

**Indiana University** (Bloomington). — Prof. S. C. Davisson : Theory of functions, 2 ; Ordinary differential equations, 3 (*a*, *w*). — Prof. D. A. Rothrock : Differential geometry, 3. — Prof. U. S. Hanna : Theory of groups of substitutions, 2. — Prof. R. D. Carmichael : Theory of ordinary differential equations, 3 ; Bessel, Laplace, and Lamé functions, 3 ; Difference equations, 2. — M. K. P. Williams : Fourier series and integrals, 3 (*s*). — All courses continue throughout the year, except those marked *a* = autumn, *w* = winter, *s* = spring.

**Johns Hopkins University** (Baltimore). — Prof. F. Morley : Higher geometry, 3 (first half year) ; Theory of functions, 3 (second half year). — Prof. A. B. Coble : Discontinuous groups, 2. — Dr A. Cohen : Differential geometry, 2 ; Theory of functions, 2. — M. H. P. Bateman : Theory of the potential, 1.

**University of Pennsylvania** (Philadelphia). — Prof. E. S. Crawley : Higher plane curves, 3. — Prof. G. E. Fisher : Differential equations, 3 ; Theory of functions of a complex variable, 3. — Prof. I. J. Schwatt : Definite integrals, 3. — Prof. G. H. Hallett : Theory of abstract groups, 3 ; Introduction to higher algebra, 3. — Prof. F. H. Safford : Mathematical theory of elasticity, 3 ; Partial differential equations, 3. — Prof. M. J. Babb : History of mathematics, 2 ; Theory of statistics, 2. — Prof. G. G. Chambers : Synthetic projective geometry, II, 3. — Prof. O. E. Glenn : Theory of invariants, 3. — Dr H. H. Mitchell : Theory of numbers, 3. — Dr R. L. Moore : Theory of point sets, with applications, 3. — Dr F. W. Beal : Differential geometry, 3.

**Yale University** (New Haven, Conn.). — Prof. J. Pierpont : Theory of functions of a complex variable, 2 ; Modern analytic geometry, 3 ; Theory of differential equations, 2 ; Non-euclidean geometry, 2. — Prof. P. F. Smith : Differential geometry, 2 (II t.) ; Continuous groups, 2 (II t.). — Prof. E. W. Brown : Advanced calculus and differential equations, 3 ; Statics and dynamics, 2 ; Advanced and theoretical dynamics, 2 ; Periodic orbits, 2. — Prof. H. L. Longley : Integral equations with applications, 2 ; Potential theory and harmonic analysis, 2. — Prof. Wilson : Theory of functions of real variables, 2. — Dr C. C. Conwell : Theory of finite groups, 2. — Dr H. H. Leib : Advanced algebra, 2. — Dr T. MacNeish : Integration of differential equations ; Synthetic projective geometry, 2. — Dr E. J. Miles : Calculus of variations, 2. — Dr Tracey : Analytic geometry, 2.

## ITALIE[1]

**Bologna** ; *Università*. — Burgatti : Teoria matematica dell'elasticità, 3. — Donati : Termodinamica nelle sue attinenze coll'elettromagnetismo e colla teoria delle radiazioni, 3. — Enriques : Teoria delle funzioni algebriche, 3. — Pincherle : Teoria delle funzioni di variabile reale, integrale di Lebesgue, teoremi di esistenza ; Teoria elementare delle funzioni analitiche ; funzioni algebriche e loro integrali, 3.

[1] Les cours fondamentaux, ayant à peu près le même programme partout, ne figurent pas dans la liste. Ce sont les cours d'analyse algébrique et infinitésimale, de géométrie analytique, projective, descriptive, de mécanique rationnelle et de géodésie.

**Catania**; *Università*. — Daniele : Elettricità e magnetismo con speciale riguardo al punto di vista energetico, 3. — De Franchis : Geometria sopra le curve algebriche secondo l'indirizzo trascendente, 4. — Severini : Complementi di calcolo infinitesimale, 1 ; Equazioni integrali ed integro-differenziali, 3. — Pennacchietti : Idrodinamica, 4.

**Genova**; *Università*. — Levi : Equazioni differenziali e integrali, 4. — Loria : Geometria sintetica pura, 3. — Tedone : Capitoli scelti dalla teoria del potenziale e dell'integrazione dell'equazione di Laplace, 3.

**Napoli**; *Università*. — Amodeo : Storia delle scienze matematiche : L'epoca di Newton e Leibniz, 3. — Del Re : Analisi ad *n* dimensioni di Grassmann con applicazioni alla Geometria ed alla Meccanica, 4 1/2. — Marcolongo : Meccanica analitica : Integrali algebrici dei problemi del moto di un punto 0 di un sistema di punti ; Problema dei tre corpi, 3. — Montesano : Sistemi lineari di superficie ; Corrispondenze birazionali nello spazio, 4 1/2. — Pascal : Capitoli scelti di analisi ; Equazioni differenziali, 3. — Pinto : Teoria della propagazione del calore, 4 1/2.

**Padova**; *Università*. — d'Arcais : Funzioni di variabile complessa ; Calcolo delle variazioni, 4. — Gazzaniga : Teoria dei numeri, 3. — Levi-Civita : Teoria statistico-cinetiche con applicazione ai quanti, 4 1/2. — Ricci . Calcolo differenziale assoluto ; Potenziale ; Elasticità, 4. — Severi : Geometria differenziale, 4. — Signorini : Teoria matematica dell'elasticità con applicazioni tecniche, 3. — Veronese : Fondamenti della geometria e questioni che vi si connettono, 4.

**Palermo**; *Università*. — Bagnera : Teoria delle funzioni automorfe ; Funzioni modulari, 3. — Gebbia : Elettricità e magnetismo, 4 1/2. — Guccia : Teoria generale delle curve e delle superficie algebriche, 4 1/2. — Venturi : Potenziale ; Forma dei pianeti ; Maree, 4 1/2.

**Pavia**; *Università*. — Berzolari : Trasformazioni birazionali nel piano e nello spazio ; Applicazioni, 3. — Cisotti : Potenziale ; Propagazione del calore, 3. — Gerbaldi : Funzioni di variabile complessa ; Funzioni ellittiche, 3. — Vivanti : Teoria dei gruppi di trasformazioni, 3.

**Pisa**; *Università*. — Bertini : Geometria sopra una curva algebrica, 3. — Bianchi : Curve, superficie e spazi curvi a tre dimensioni, 4 1/2. — Dini : Complementi di analisi infinitesimale ; Equazioni integrali, 4 1/2. — Maggi : Potenziale ; Formazione e proprietà delle equazioni del movimento elastico : Applicazione all'ottica teorica ; Formazione e proprietà delle equazioni del campo elettromagnetico ; Teoria elettromagnetica della luce, 4 1/2. — Pizzetti : Formole d'interpolazione ; Fondamenti d'astronomia sferica ; Teoria meccanica della figura dei pianeti, 4 1/2.

**Roma**; *Università*. — Amoroso : Teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche, 3. — Bisconcini : Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, 3. — Castelnuovo : Questioni connesse alle matematiche elementari ; Funzioni abeliane, 3. — Silla : Elasticità con applicazioni tecniche, 3. — Volterra : Termodinamica, 3 ; Problemi di meccanica studiati come applicazione delle funzioni di linee e della relativa analisi, 3.

**Torino**; *Università*. — Boggio : Dinamica analitica, 3. — Fubini : Equazioni alle derivate ordinarie : risultati classici e risultati moderni, 3. — Sannia : Superficie rigate ; Studio delle congruenze e dei complessi di raggi mediante coppie di forme differenziali quadratiche che li individuano, 2. — Segre : Capitoli scelti di geometria a più dimensioni, 3. — Somigliana : Elettricità e ottica, 3.

# BIBLIOGRAPHIE

**Mathematische Bibliothek.** Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementar-Mathematik für Schule und Leben, herausgegeben von Dr. W. Lietzmann und Dr. A. Witting. Nos 5 à 12. — Petits volumes cartonnés de 50 à 70 p., à M. 0,80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Nous avons déjà signalé cette intéressante collection de monographies qui est destinée à répandre le goût des choses mathématiques dans le public des gens cultivés n'ayant pas poursuivi leurs études mathématiques. Ces petits volumes seront également bien accueillis des maîtres de l'enseignement élémentaire et des élèves des écoles moyennes. Voici les objets exposés dans les volumes 5 à 12 :

5. H. E. Timerding, *Die Fallgesetze, ihre Geschichte und ihre Bedeutung.* Exposé historique des lois de la chute des corps.

6. M. Zacharias, *Einführung in die projektive Geometrie.* Introduction à la Géométrie projective.

7. H. Wieleitner, *Die sieben Rechnungsarten, mit allgemeinen Zahlen.* Les sept opérations.

8. P. Meth, *Theorie der Planetenbewegung.* Le mouvement des planètes.

9. A. Witting, *Einführung in die Infinitesimalrechnung.* Introduction au Calcul infinitésimal.

10. W. Lietzmann u. V. Trier, *Wo steckt der Fehler?* Trugschlüsse u. Schülerfehler. — Les auteurs ont réuni dans ce volume les paradoxes et erreurs mathématiques qu'il peut être intéressant à exposer dans l'enseignement à titre de *récréations mathématiques.*

11. P. Zühlke, *Konstruktionen in begrenzter Ebene.* Constructions à effectuer dans une portion limitée du plan. L'auteur montre comment on peut résoudre les problèmes de construction lorsque le procédé ordinaire ne peut pas être exécuté dans les limites de l'épure.

12. E. Beutel, *Die Quadratur des Kreises.* Exposé historique du problème de la quadrature du cercle.

W. Burnside. — **Theory of Groups of finite Order.** 2e édition. — 1 vol. in-8° relié, 512 p. ; 15 sh. ; Cambridge University Press.

La première édition de ce remarquable traité remonte à 1897. Depuis ce moment, la théorie des groupes d'ordre fini a fait d'importants progrès, auxquels l'auteur lui-même a largement contribué. Il a donc été conduit à remanier et à compléter plusieurs chapitres.

L'ouvrage magistral de M. Burnside est suffisamment connu de tous ceux qui s'occupent de la théorie des groupes pour que nous puissions nous dispenser d'en faire une analyse détaillée. Bornons-nous donc à en recom-

mander l'étude à ceux qui désirent approfondir cette importante théorie. Voici les principaux objets étudiés par l'auteur :

On permutation. — The definition of a group. — Properties of a group which are independent of its mode of representation. — On the Composition-series of a groups. — On the isomorphism of a group with itself. — On abelian Groups. — On Groups whose Orders are the powers of Primes. — On Sylow's theorem. — On permutation-groups ; transitive and intransitive groups ; primitive and imprimitive groups. — On the representation of a group of finite order as a permutation-group. — On group of linear substitutions ; reducible and irreducible groups. — On the representation of a group of finite order as a group of linear substitutions. — On Group-characteristics. — Some applications of the theory of groups of linear substitutions and of Group-characteristics. — On the invariants of groups of linear substitutions. — On the Graphical representation of a group. — On congruence groups. — Index of technical terms. — Index of authors quoted.

J. A. de Séguier. — **Théorie de groupes finis. Éléments de la théorie des groupes de substitutions.** — 1 vol. in 8°, x-228 p. ; 10 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Tandis que M. Burnside vient de publier une nouvelle édition de son traité, M. l'abbé de Séguier nous donne un second volume de sa théorie des groupes finis. Le premier volume, paru en 1904, était consacré à la théorie des groupes abstraits. Le présent volume, intitulé « Eléments de la théorie de substitutions », est consacré aux substitutions qu'on pourrait appeler naturelles, dit l'auteur. Ce sont celles d'un nombre fini d'objets dont l'ordre est simple.

Toutefois, comme il est souvent presque indispensable d'introduire entre ces objets, outre l'ordre simple, un ordre multiple (en les assimilant à des points dont les coordonnées varient dans un champ de Galois), l'auteur a dû entrer dans le domaine des groupes linéaires modulaires. Une étude plus approfondie de ces groupes, jointe à la détermination des groupes résolubles, fera l'objet d'une étude ultérieure.

La théorie générale des équations ne pouvait être séparée de celle des substitutions, dont elle est l'expression immédiate. Pour en dégager l'objet principal, l'équation irréductible, et pour arriver à la formation effective d'équations symétriques ou alternées à coefficients rationnels *constants*, M. de Séguier s'est arrêté d'abord assez longuement aux notions de divisibilité et de réductibilité. Mais l'étude des équations spéciales qui se rencontrent en géométrie et dans la théorie des transcendantes a été, elle aussi, réservée.

Le présent volume se trouve ainsi limité aux objets suivants :

I. — Substitutions. — II. Groupes de substitutions. Théorèmes généraux. — III. Représentation des groupes par des groupes de substitutions. — IV. Groupes de degré $n$ et de classe $n$-$1$. Groupes linéaires. — V. Groupes de degré $kp$, $p + \alpha$, $2p + \alpha$.

A. Flamant. — **Mécanique générale.** — Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. 2e édition, revue et augmentée. — 1 vol. gr. in-8°, 620 p. ; 20 fr. Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège.

Ce traité de « Mécanique générale », est destiné aux ingénieurs. Il correspond au cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures de Paris. C'est dire que l'ouvrage se limite aux principes essentiels de la mécanique, en laissant de côté les parties plus élevées, réservées plus spécialement aux cours de mécanique rationnelle dans les Facultés des sciences. Ainsi l'auteur a laissé de côté les méthodes de Lagrange, de Jacobi et de Hamilton, dont on peut se passer dans la résolution des problèmes usuels.

Cette seconde édition ne diffère de la première que par quelques modifications en général peu importantes et par quelques additions, notamment une petite note sur la bicyclette.

Il est intéressant de connaître l'ordre adopté par l'auteur dans la distribution des chapitres :

*Première partie.* Notions géométriques. Des systèmes de lignes. Des moments. Centre de gravité et moments d'inertie.

*Deuxième partie.* Cinématique. Etude générale du mouvement d'un point. Détermination du mouvement. Des systèmes invariables. Des mouvements simultanés et relatifs. Lois générales du mouvement des systèmes.

*Troisième partie.* Mécanique. Des lois physiques du mouvement. Théorèmes généraux de la mécanique. Des forces vives et du travail. De l'équilibre et des machines simples. Mécanismes. — Index alphabétique.

John Perry. — **Mécanique appliquée**, ouvrage traduit sur la 9e édition anglaise par E. Davaux. Avec des applications et un appendice sur la mécanique des corps déformables. *Tome I:* L'énergie mécanique. — 1 vol. in-8°, 400 p.; 10 fr.; Hermann & fils, Paris.

L'auteur accompagne le titre de l'ouvrage de la mention « à l'usage des élèves qui peuvent travailler expérimentalement et faire des exercices numériques et graphiques ». C'est précisément ce qui caractérise la méthode de Perry, professeur au Royal College of Science de South Kensington, Londres. On sait le rôle important joué par Perry dans le mouvement de réforme de l'enseignement technique anglais, à ses divers degrés. Il préconise l'enseignement concret, expérimental, basé sur l'intuition et l'expérience. Il ne veut pas, disent MM. Cosserat dans leur Préface, qu'on donne aux élèves cette préparation exclusivement théorique, dont l'insuffisance leur inspire plus tard une sorte d'éloignement pour les vérités positives de la science. »

Tous ceux qui étudient la Mécanique appliquée ou qui sont appelés à l'enseigner, examineront avec intérêt et profit l'ouvrage du professeur Perry.

Ce premier volume est consacré à l'étude générale, selon les méthodes pratiques de l'auteur, *des diverses formes de l'énergie mécanique.*

Introduction. — Vecteurs. Mouvement relatif. — Travail et énergie. — Frottement. — Rendement. — Machines simples. — Méthodes analytiques et graphiques élémentaires. — Applications de la statique graphique. — Machines hydrauliques. — Généralités sur les machines. — L'énergie cinétique. Matériaux de construction. — Cisaillement et torsion. — Théorie plus difficile. — Appendice.

Dans le dernier chapitre, MM. E. et F. Cosserat ont modifié ou ajouté quelques paragraphes, afin de mettre le lecteur au courant des derniers progrès de la Mécanique des corps déformables.

A. R. Forsyth. — **Lehrbuch der Differentialgleichungen.** Mit den Auflösungen der Aufgaben von Herrn Maser. Zweite Auflage nach der 3ten des englischen Originals besorgt und mit einem Anhang von Zusätzen versehen von W. Jacobsthal. — 1 vol. in-8°, 921 p.; 20 M.; Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Les ouvrages de M. Forsyth ont pris place depuis longtemps au nombre des traités classiques. C'est le cas notamment de celui qu'il a consacré aux équations différentielles, dont le traité anglais a déjà trois éditions. La traduction allemande vient d'avoir une seconde édition Elle est publiée par M. Jacobsthal d'après la troisième édition anglaise, avec de nombreuses annotations.

On sait que le traité de M. Forsyth comprend non seulement les équations différentielles ordinaires, mais aussi les équations aux dérivées partielles. Ce qui donne une valeur toute particulière à ce volume, ce sont les nombreux exercices et problèmes qui accompagnent l'exposé théorique. Les problèmes proposés dans le texte sont résolus à la fin dans un appendice. Sous cette nouvelle forme, le traité de M. Forsyth va continuer à rendre de grands services à tous ceux qui abordent l'étude des équations différentielles et leurs applications.

H. Liebmann. — **Nichteuklidische Geometrie.** (Sammlung Schubert XLIX), zweite neubearbeitete Auflage. — 1 vol. 8°, VI-222 p., M. 6.50 ; G. J. Gœschen, Leipzig.

Bien que très complet dans son genre, ce livre cependant ne touche qu'indirectement aux problèmes d'ordre philosophique ou historique ; il ne faudrait donc pas y chercher une histoire critique des controverses que soulève l'existence des géométries non-euclidiennes. M. Liebmann s'est borné à donner un exposé substantiel, mais purement mathématique de ces dernières.

Il commence par étudier le postulat des parallèles et par énumérer les propositions qui en sont indépendantes. Cette introduction achevée, il passe en revue tout ce qui dans la géométrie hyperbolique concerne les constructions élémentaires, la trigonométrie et les intégrations, puis il montre comment cette géométrie peut être analytiquement interprétée dans le plan euclidien. Il expose ensuite les théorèmes que comportent les géométries sphérique et elliptique. Enfin « comme les concepts fondamentaux de la dynamique d'un point, masse, force et vitesse, sont indépendants du postulat des parallèles » (p. 199), M. Liebmann termine son livre en donnant les équations fondamentales de la mécanique non-euclidienne, y compris ce qui touche au principe de relativité.

Cet exposé très clair et bien ordonné rendra service à tous ceux qui s'occupent des problèmes non-euclidiens. Signalons une erreur de signe au milieu de la page 80. Le numérateur sous le signe radical doit s'écrire $e^a + e^{-a} - e^a + e^{-a}$ et non $e^a + e^{-a} - e^a - e^{-a}$.

Arnold Reymond (Neuchâtel).

H. Poincaré. — **Leçons sur les hypothèses cosmogoniques** professées à la Sorbonne, rédigées par H. Vergne. 2e édition avec un portrait en héliogravure et une **Notice sur Henri Poincaré** par Ernest Lebon. — 1 vol. in-8°, 294 p.; 12 fr.; Hermann & fils, Paris.

Cette seconde édition des leçons sur les hypothèses cosmogoniques pro-

fessées à la Sorbonne par H. Poincaré, est conforme à la première. L'analyse détaillée que nous avons donnée de l'ouvrage l'an dernier (*Ens. math.*, 15 mars 1912, pp. 167-168), nous dispense d'y revenir longuement.

L'ouvrage est augmenté d'une belle notice sur H. Poincaré par E. Lebon ; il contient un remarquable portrait en héliogravure. La notice comprend deux parties : Dans la première, intitulée « Sur la vie de H Poincaré », l'auteur trace un portrait du grand géomètre en faisant ressortir les qualités intellectuelles et morales qui caractérisent la vie aussi simple que belle de Poincaré. La seconde partie est consacrée à l'œuvre scientifique si féconde et si puissante. M. Lebon s'est attaché surtout à mettre en lumière les idées directrices des travaux de Poincaré. Sa notice constitue un excellent guide à tous ceux qui voudront aborder quelque partie du champ si vaste exploré par le regretté savant.

A. Sainte-Laguë. — **Notions de mathématiques**, avec préface de M. Koenigs. — 1 vol. in-8°, vii-512 p. ; 7 fr. A. Hermann et fils, Paris.

On ne saurait mieux caractériser le but de cet ouvrage que ne le fait M. Koenigs dans son intéressante *Préface :*

« L'esprit dans lequel a été conçu le présent ouvrage, la manière dont son exécution a été conduite plairont à ceux qui ont le souci de voir les mathématiques continuer à servir de base au développement de nos connaissances. Ce développement est tel aujourd'hui, surtout dans le domaine de la mécanique et de la physique, il excite tellement les aspirations et les ambitions de notre moderne jeunesse que l'on aurait grand tort de ne point se préoccuper de constituer un enseignement des mathématiques plus adapté aux exigences pratiques.

« Disons tout de suite que ce qui doit caractériser un tel enseignement ce sont moins ses programmes que sa méthode. Un enseignement abstrait, dogmatique, qui ne montre les choses que sous leurs formes logiques est pratiquement inopérant. Au contraire, l'éveil de l'intuition, l'examen direct des choses, le recours occasionnel à l'expérience sont éminemment propres à préparer les esprits à traiter mathématiquement les contingences, sans exclure le souci d'une correcte application du raisonnement.

« Un enseignement de ce genre est devenu nécessaire ; il doit être l'œuvre de nos meilleurs maîtres, car leur savoir et leur expérience les garantiront mieux que d'autres des solécismes mathématiques de l'à-peu près et de l'imprécision. Car la précision est au moins aussi nécessaire à celui qui veut faire aboutir une formule à un résultat numérique qu'à celui qui se contente d'y voir un résultat logique.

« Nous devons donc louer hautement M. de Sainte-Laguë d'avoir entrepris cette tâche. Sous le nom de Mathématiques générales, on a constitué en France, depuis quelques années, un programme d'enseignement qui, pratiqué bien entendu dans le sens que nous venons d'indiquer, peut et doit rendre les plus grands services. Mais, pour beaucoup, les lacunes de leur savoir concernent des matières plus élémentaires que celles de cet enseignement déjà relevé. Le présent livre leur offrira le moyen de combler ces lacunes, de consolider leurs connaissances élémentaires et les initiera à des formes de pensées, à des modes de conception qui les rapprocheront eux-mêmes des applications.

« Nous nous reprocherions de ne pas attirer spécialement l'attention sur

les exercices dont certains sont très originalement posés ; leur choix judicieux est de nature à concourir le plus utilement au but général de l'ouvrage. »

Voici les principaux objets étudiés dans cet ouvrage :

*Arithmétique :* Nombres entiers. Divisibilité. Nombres premiers. — Fractions. Racines. — Mesure des grandeurs. — Erreurs. Calculs numériques.

*Algèbre :* Nombres positifs ou négatifs. — Calcul algébrique. — Equations et problèmes du 1er degré ; id. du 2e degré. — Progressions et logarithmes. — Fonctions et dérivées.

*Trigonométrie* plane et trigonométrie sphérique.

*Géométrie :* Droites et plans. — Parallèles. — Circonférence et sphère. — Relations métriques. — Longueurs, aires et volumes. — Constructions graphiques. — Géométrie descriptive. — Méthodes en géométrie.

*Cinématique. — Appendice :* Exercices. Tables diverses. Formules et résultats.

---

# BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

## 1. Publications périodiques :

**Annali di Matematica pura et applicata.** — Série III. Milan.

*Tome XIX, fasc. 3 et 4.* — Calapso : Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro transformazioni. — (Continuazione e fine). Parte Settima ed Ottava. — N. Nielsen : Sur les transcendantes élémentaires et les nombres de Bernoulli et d'Euler. — Ranum : On the Projective Differential Geometry of N-dimensional Spreads Generated by $\infty^1$ Flats. — Bianchi : Sui sistemi obliqui di Weingarten.

*Tome XX,* dédié à la mémoire de Lagrange. — L'Académie royale des Sciences de Turin a décidé de publier un volume en commémoration du 10 avril 1913, *centième anniversaire de la mort de* Lagrange, qui fut un de ses membres fondateurs. La publication a été confiée aux *Annali Matematica* et formera les volumes XX et XXI de cette collection. Elle comprendra la réunion de mémoires mathématiques écrits en l'honneur de Lagrange par des mathématiciens de tous les pays.

Le premier de ces volumes contient les mémoires suivants : G. Loria : G. L. Lagrange nella vita e nelle opere. — E. Landau : Ueber die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate. — M. Abraham : Le equazioni di Lagrange nella nuova meccanica. — P. Appell : Les équations du mouvement d'un fluide parfait déduites de la considération de l'énergie d'accélération. — E. Pascal : Sopra una classe di equazioni differenziali di gradon e di ordine n-1 da considerarsi come estensioni delle equazioni di Riccati. — G. Vivanti : Sul calcolo delle variazioni degli integrali multipli. — A. V. Bäcklund : Einiges über Kugelkomplexe. — F. Enriques : Intorno alla risoluzione razignole di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili.

— A. Hurwitz : Ueber die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls. — T. Levi-Civita : Nuovo sistema canonico di elementi ellitici. — O. Hölder : Neues Verfahren zur Herleitung der Differentialgleichung für das relative Extremum eines Integrals. — H. A. Lorentz : Sur un théorème général de l'optique. — P. Stäckel : Ueber die Rektifikation algebraischer Kurven. — F. Severi : Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1. a specie di una varieta algebrica. — G. Fubini : Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali. — O. Bolza : Ueber zwei Euler'sche Aufgaben aus der Variationsrechnung.

Le second volume comprendra des mémoires de : Borel. — Bortolotti. — Carathéodory. — E. E. Levi. — Forsyth. — Hadamard. — Hahn. — Kœbe. — Lamb. — Lauricella. — Pincherle. — Schur. — Stekloff. — Stéphanos. — Wilczynski.

**Bulletin de la Société française de Philosophie,** Librairie Arm. Colin, Paris.

*12e année* (1912). — Le Temps, l'Espace et la Causalité dans la physique moderne. Thèse : M. Langevin. Discussion : MM. Borel, Brunschvicg, Darlu, Le Roy, Milhaud, J. Perrin, Rey. — L'Enseignement de la Philosophie dans les classes de Mathématiques spéciales. Thèse de M. Le Roy. Discussion : MM. Bailly, Bougle, A. Cahen, Cresson, Drouin, L. Poincaré. — Vocabulaire Philosophique, fasc. nº 15 : O à Personnel. Texte par M. André Lalande. — Bibliographie de la Philosophie française pour l'année 1911.

*13e année* (1913). — L'idée de la Vérité Mathématique. Thèse : M. Brunschvicg. Discussion : MM. E. Cahen, Dufumier, Lalande, Le Roy, Meyerson, Milhaud.

**Compte rendu de l'Académie des Sciences de Paris.**

*Lundi 9 décembre 1912.* — J. Taffanel et H. Dautriche : Sur la propagation de l'onde explosive dans les solides. — Decombe : Dissipation et discontinuité de l'énergie. — Lemeray : Sur un théorème de M. Einstein.

*23 décembre.* — G. Darboux ; Sur les surfaces de translation. — Th. Egoroff : Sur l'intégration des fonctions mesurables. — P. Montel : Sur l'existence des dérivées. — W. H. Young : Sur les séries de Fourier convergentes presque partout. — S. Lattès : Sur la réduction des substitutions linéaires. — Nörlund : Sur les équations linéaires aux différences finies. — N. Lusin : Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy.

*30 décembre.* — G. Remoundos : Le théorème de M. Picard et les fonctions algébroïdes. — A. Korn : Sur les potentiels d'un volume attirant dont la densité satisfait à l'équation de Laplace.

*6 janvier 1913.* — A. Demoulin : Une propriété générale des lignes tracées sur une surface. — A. Rosenblatt : Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité $p_g \geqq 2(p_a + 2)$. — Ch. Muntz : Solution directe de l'équation séculaire et de quelques problèmes analogues transcendants. — L. Fejer : La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple. — G. Giraud : Sur une classe de transcendantes ayant un théorème de multiplication. — Nörland : Sur les équations linéaires aux

différences finies. — A. Kœnigs : Construction des centres de courbure et des plans principaux de l'enveloppe d'une surface solidaire d'un cylindre qui roule sans glisser sur un autre. — H. Villat : Sur l'écoulement des fluides pesants

*13 janvier.* — P. E. Gay : Sur les transformations les plus générales des équations aux dérivées partielles du second ordre. — M. Janet : Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

*20 janvier.* — G. Giraud : Sur certaines équations fonctionnelles et sur les transformations permutables. — Nörlund : Sur le problème de Riemann dans la théorie des équations aux différences finies. — L. Bachelier : Les probabilités semi-uniformes. — Et. Delassus : Les diverses formes du principe de d'Alembert et les équations générales du mouvement des systèmes soumis à des liaisons d'un ordre quelconque. — P. Duhem : Sur la stabilité adiabatique de l'équilibre. — E. Borel : La théorie de la relativité et la cinématique.

*27 janvier.* — F. Severi : Les correspondances algébriques existant sur les courbes d'un système linéaire tracées sur une surface. — A. Rosenblatt : Sur les surfaces algébriques que possèdent un faisceau irrationnel de courbes de genre 2. — V. Koslitzin : Quelques remarques sur les systèmes complets de fonctions orthogonales. — A Tonolo : Sur le potentiel d'une ligne analytique.

*3 février.* — G. Tzitzeica : Sur les réseaux dérivés. — D. Pompeiu : Sur une application du calcul fonctionnel à la théorie des fonctions. — J. Peres : Détermination de toutes les fonctions permutables de première espèce avec une fonction donnée. — A. Bilimowitch : Sur les équations du mouvement des systèmes conservatifs non holonomes.

*10 février.* — Mlle S. Tillinger : Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par une série de Taylor. — J. Le Roux : Sur la détermination des fonctions harmoniques. — Th. De Donder : Sur un théorème de Jacobi. — H. Villat : Sur la détermination des problèmes d'hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides. — P. Duhem : Sur deux inégalités fondamentales de la thermodynamique. — Gernez : Tracé et usage des cartes pour la navigation orthodromique construites sur les plans tangents aux pôles. — C. Stœrmer : Sur un problème important dans la physique cosmique.

*17 février.* — M. Gevrey : Sur la nature des solutions de certaines équations aux dérivées partielles. — A. Pchéborski : Sur quelques polynômes qui s'écartent le moins possible de zéro dans un intervalle donné. — Valiron : Sur les fonctions entières d'ordre nul. — P. Appell : Sur l'équilibre de fils dont les éléments s'attirent ou se repoussent en fonction de la distance. — U. Cisotti : Sur les mouvements rigides d'une surface de tourbillon. — C. Stœrmer : Sur un problème mécanique et ses applications à la physique cosmique.

*24 février.* — E. Bompiani : Sur les configurations de Laplace. — G. Sannia : Propriétés nouvelles des caractéristiques des équations partielles linéaires du premier ordre à deux variables. — Th. De Donder : Sur le théorème d'indépendance de Hilbert. — P Appell : Equation fonctionnelle sur l'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses parties. — L. Crussard : Sur la propagation et l'altération des ondes de choc. — P. Duhem : Sur la stabilité de l'équilibre thermique.

*3 mars.* — M. Tzitzeica : Sur les réseaux réciproquement dérivés. —

J. Le Roux : Sur la détermination des fonctions harmoniques. Application du carré. — Mlle Th. Tarnarider : Sur la meilleure approximation de $(X)^{2s+1}$ par des polynômes de degrés indéfiniment croissants. — J. Chapelon : Sur les nombres de classes des formes quadratiques binaires positives. — Et. Delassus : Sur l'équilibre et les petits mouvements des systèmes soumis à des liaisons d'ordre quelconque.

*10 mars*. — J. Clairin : Sur les invariants des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. — V. Karpen : Sur le vol des oiseaux dit « vol à voile ». — L. de Boissoudy : — Sur la loi du rayonnement noir et la théorie des quanta.

*17 mars*. — L. Autonne : Sur les matrices hypohermitiennes et les unitaires. — Ch. Müntz : Sur la solution des équations séculaires et des équations intégrales. — G. Remoundos : Sur les familles des fonctions algébroïdes. — Th. de Donder : Sur le théorème d'indépendance de Hilbert. — Farid Boulad Bey : Sur la disjonction des variables dans les équations représentables par des monogrammes à points alignés. — C. Bourlet : Appareil de mesure de vibrations des corps solides en mouvement. — E. Guillaume : Sur l'extension des équations mécaniques de M. Appell à la physique des milieux continus.

*25 mars*. — G. Darboux : Sur les surfaces minima engendrées par un cercle variable. — L. Decombe : Théorie électronique de la gravitation.

*31 mars 1913*. — G. Darboux : Sur les surfaces minima engendrées par un cercle variable. — E. Picard : Sur une classe de transcendantes généralisant les fonctions elliptiques et les fonctions abéliennes. — L. Lichtenstein : Sur les fonctions fondamentales des équations différentielles linéaires du second ordre et sur le développement d'une fonction arbitraire. Application de la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables. — G. Polya : Sur un théorème de Laguerre. — M. Barré : Sur une série de surfaces dont une famille de lignes de courbure est constituée par les hélices indéformables.

## 2. Livres nouveaux :

**Berichte und Mitteilungen**, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. — No VIII : P. Stäckel : Nachruf auf Peter Treutlein. — W. Lietzmann : Der internationale Mathematikerkongress in Cambridge. — 1 fasc. in-8o, 58 p. ; M. 1,60. — No IX : H. Dressler : Mathematische Lehrmittelsammlungen, insbesondere für höhere Schulen. — 1 fasc. in-8o, 31 p. ; 1 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

**Catalogue international de la littérature scientifique**, publié par une commission internationale sous la direction de M. H.-F. Morley. — A. *Mathématiques ;* No 11. — 1 vol. in-8o, 196 p ; Fr. 18,75 ; Gauthier-Villars, Paris.

**L'Enseignement mathématique en Suisse.** Rapports publiés sous la direction de H. Fehr. — *Annexe :* Reform-Vorschläge und Anregungen aus den Berichten über den mathematischen Unterricht in der Schweiz. — Réformes à accomplir dans l'Enseignement mathématique en Suisse. — Riforme da compiere nell'insegnamento delle matematiche nella Svizzera. — 1 fasc. in-8o, 34 p. ; Fr. 0,50 ; Georg & Cie, Bâle et Genève.

G. K. Barth. — **Der Lützower und Pestalozzianer W. H. Ackermann** aus Auerbach i. V. Lehrer an der Musterschule in Frankfurt a. M. — 1 vol. in-4°, VIII-138 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

O. A. Bergholz. — **Die Lösung des Fermatschen Problems** $x^n + y^n = z^n$. 1 fasc. in-8°, 19 p. ; 1 M. — Erläuterung und Ergänzung : Kennzeichnung der $n$-Potenz-Differenzen als Impotenzen. 1 fasc. in-8°, 32 p. ; 1,50 M. — Substitutionsbeweis des grossen Fermatschen Satzes auf Grund der Formel für $(a + b)^2$. 1 fasc. in-8°, 22 p. ; 1,50 M. — H. S. Art'l, Dessau.

E. Beutel. — **Die Quadratur des Kreises.** — (*Mathematische Bibliothek*. N° 12). — 1 vol. in-8°, 75 p. ; 0,80 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Dumont. — **Cours d'Arithmétique théorique et pratique,** suivi d'une note sur les Théories logiques des Nombres. — 1 vol. in-8°, XVI-501 p., 6 fr. ; A. De Boeck, Bruxelles.

A. Einstein u. M. Grossmann. — **Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation.** I. Physikalischer Teil, von A. Einstein (Zurich). II. Mathematischer Teil, von M. Grossmann (Zurich). — 1 fasc. in-8°, 38 p. ; B. G Teubner, Leipzig.

F. G.-M. — **Manuel de Géométrie** (d'après les programmes de 1911 et 1912). — 1 vol. in-12 de 590 p. et 829 fig. ; Mame, Tours et J. de Gigord, Paris.

E. Fabry. — **Démonstration du théorème de Fermat.** — 1 vol. in-8°, 22 p. ; Fr. 1,50 ; A. Hermann & fils, Paris.

P. B. Fischer. — **Anschauungsmittel im mathematischen Unterricht.** Eine Zusammenstellung der vorhandenen Lehrmittel im Rechnen, in der reinen und angewandten Mathematik. — 1 fasc. in-8°, 40 p. ; 0,60 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Willy Freise. — **Behandlung der Reihen im Unterricht.** (Beilage zum Bericht über das Schuljahr 1912-1913 der Ober-Realschule Göttingen). — 1 fasc. in-8°, 108 p. ; E. A. Huth, Göttingen.

C. Guichard. — **Problèmes de mécanique et cours de cinématique.** Conférences faites en 1912 aux candidats au certificat de Mécanique Rationelle. Rédaction de MM. Dautry et Deschamps. — 1 vol. in-8°, 156 p., 6 fr. ; A. Hermann & fils, Paris.

J. L. S. Hatton. — **The Principles of projective Geometry** applied to the straight line and conic. — 1 vol. in-8°, 366 p., 10 sh. 6 d. ; University Press. Cambridge.

D. Hilbert. — **Grundlagen der Geometrie.** — (Collection *Wissenschaft und Hypothese*). 4e édition revue et augmentée. — 1 vol. in-16 ; VI-258 p., relié, 6 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Höfler. — **Didaktik der Himmelskunde und der astronomischen Geographie** (Band II der didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen). — 1 vol. in-8°, XII-414 p. ; 11 M., relié 12 M., B. G. Teubner, Leipzig.

Siegf. Jakobi. — **Sammlung arithmetischer Aufgaben,** nebst Lehrbuch der Arithmetik für höhere Maschinenbauschulen und verwandte technische Lehranstalten. — (Teubners Unterrichtsbücher für Maschinentechnische Lehranstalten N° 7). — 1 vol. in-8°, VI-122 p., cartonné, 1,60 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Kempe. — **Der grosze Fermatsche Satz,** 2te verbesserte Auflage. — 1 fasc., 22 p. ; W. Versluys, Amsterdam.

W. Killing et H. Hovestadt. — **Handbuch des Mathematischen Unter-**

**richts.** II. Band. — 1 vol. in-8°, x-472 p., 10 M.; relié, 11 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

W. LIETZMANN et V. TRIER. — **Wo steckt der Fehler? Trugschlüsse und Schülerfehler.** — (*Mathematische Bibliothek*, N° 10). 1 vol. in-8°, 57 p., 0,80 M.: B. G. Teubner, Leipzig.

R. v. LILIENTHAL. — **Vorlesungen über Differentialgeometrie.** II. Band Flächentheorie I. Teil. — 1 vol. in-8°, VIII-270 p., 12 M.; relié, 13 M.: B. G. Teubner, Leipzig.

G. LORIA. — **Vorlesungen über darstellende Geometrie.** Deutsche Ausgabe von Prof. Fr. SCHÜTTE. II. Teil : Anwendungen auf Ebenflächige Gebilde, Kurven und Flächen. — 1 vol. in-8°, XII-294 p., 11 M., relié, 12 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

J. PERRY. — **Drehkreisel,** Volkstümlicher Vortrag, gehalten in einer Versammlung der « British Association » in Leeds. Uebersetzt von Prof. A. WALZEL. — 2° édition; 1 vol. in-12; relié M. 2,40; B. G. Teubner, Leipzig.

M. PLANCK. — **Leçons de Thermodynamique,** avec une conférence à la Société chimique de Berlin sur le Théorème de Nernst et l'hypothèse des Quanta. Ouvrage traduit sur la troisième édition allemande (augmentée) par R. CHEVASSUS. — 1 vol. in-8°, 311 p., 12 fr.: A. Hermann & fils, Paris.

D. RIABOUCHINSKY. — **La fonction** $|x|$. — Essai d'un calcul des valeurs absolues. — 1 broch. in-4°, 28 p.; Konchniroff & C^ie^, Moscou.

Paul TANNERY. — **Mémoires scientifiques** publiés par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen. II, Sciences exactes dans l'antiquité, 2^e^ volume. — 1 vol. in-4°, XXI-555 p.; Fr. 15; Gauthier-Villars, Paris.

P. VOLKMANN. — **Fragen des Physikalischen Schulunterrichts,** vier Vorträge. — 1 vol. in-8°, XVI-65 p., 2 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

H. VOLLPRECHT. — **Das Rechnen, eine Vorbereitung zur allgemeinen Arithmetik.** Regeln und Formen des Rechnens, Vergleiche mit der allgemeinen Arithmetik und Hinweise auf Geometrie und Physik. Hilfs- und Uebungsbuch für Lehrer und Schüler der mittleren und unteren Klassen der höheren Lehranstalten, der Progymnasien und Vorbereitungschulen. — 2^te^, vermehrte und verbesserte Auflage. 1 vol. in-8°, 48 p., 0,80 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

A. VOSS. — **Ueber das Wesen der Mathematik,** Rede gehalten am 11. März 1908 in der öffentl. Sitzung der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. 2^te^ Auflage. — 1 vol. in-8°, 123 p., 4 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

C. WARGNY. — **Historia de las Matematicas.** — 1 vol. in-8°, 375 p., 6 S.; Cervantes, Santiago.

H. WEYL. — **Die Idee der Riemannschen Fläche.** — (Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen.) — 1 vol. in-8°, x-169 p.; 7 M., relié 8 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

P. ZÜHLKE. — **Konstruktionen in begrenzter Ebene.** — (*Mathematische Bibliothek*, N° 11). 1 vol. in-8°, 40 p., 0,80 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

# LE CONTENU DU CERCLE ET DE LA SPHÈRE
## COMPARÉ A CELUI
# D'AUTRES FORMES GÉOMÉTRIQUES.

**Introduction.** — Il est universellement connu, que parmi toutes les formes géométriques limitées, ayant même valeur du contour, ce sont dans le plan le cercle et dans l'espace la sphère qui offrent le contenu maximum. Toutefois, lorsque dernièrement on vint me demander une démonstration mathématique rigoureuse de ces principes populaires, je m'aperçus qu'il ne s'en trouve aucune dans les traités modernes de géométrie qui soit à l'abri d'objections fondées.

Les recherches faites à ce sujet, ont permis de constater que cette question, depuis longtemps déjà et jusqu'à l'époque actuelle, a été traitée comme exemple d'application du calcul des variations [1]. Cependant pour démontrer ces propriétés si simples du cercle et de la sphère, il n'est nullement nécessaire d'avoir recours à des procédés aussi recherchés ; il suffit d'utiliser à cet effet les principes de la géométrie courante.

A cet égard il y a lieu de considérer deux mémoires importants publiés en 1842 par le professeur STEINER de l'Académie de Berlin : « Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général ». (*Journal für die reine und angewandte Mathematik,* vol. 24, pp. 93 et 189).

Ces mémoires remarquables par le nombre des problèmes proposés, des solutions données et des méthodes de démonstration

---

[1] *Pour l'aire du cercle :* M. NAVIER : Résumé des leçons d'analyse données à l'école polytechnique. Paris 1856. V. Dalmont, II vol. p. 208. — M. COURNOT : Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. Paris 1857. L. Hachette, II vol. p. 132. — Em. CZUBER : Differential u. Integralrechnung. Leipzig 1906, II vol. p. 460. — Ces calculs conduisent à l'équation du cercle.

*Pour le volume de la sphère :* C. BOSSUT : Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris an VI (1798). Impr. de la République, II vol. p. 470, n° 25. — L.-A. SOHNKE : Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung. Dr H. AMSTEIN, H.-W. Schmidt, Halle 1877, p. 295. — H.-A. SCHWARZ : Beweis des Satzes, dass die Kugel Kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens. *Gesammelte mathem. Abhandlungen.* 1890. II vol. p. 327. — Voir aussi : *Nachr. der K. Ges. der Wissenschaften u. der Georg. Aug. Univ. zu Göttingen,* 1884, p. 1-13. Ces calculs prouvent que la forme cherchée doit jouir de certaines propriétés, dont jouit aussi la sphère.

diverses qu'ils contiennent, manquent cependant parfois de clarté ; ils ne sont pas toujours complets et à l'abri de toute critique ainsi qu'on le trouve mentionné dans des publications postérieures, à savoir :

F. Edler « Vervollständigung der Steiner'schen elementargeometrischen Beweise für den Satz, dass der Kreis grösseren Flächeninhalt besitzt als jede andere ebene Figur gleichgrossen Umfanges ». *Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften u. der Georg Aug. Universität zu Göttingen.* Göttingen 1882 Dietrich. Seite 73 [1].

R. Sturm : Bemerkungen u. Zusätze zu Steiner's Aufsätzen über Maximum u. Minimum. « *Journal für die reine u. angewandte Mathematik* », 1884, vol. 96, p. 36 [2].

E. Rouché et Ch. de Comberousse : Traité de Géométrie, 7e édit., Paris 1900, p. 365, t. I et p. 234, t. II [3].

R. Sturm : Maxima u. Minima in der elementaren Geometrie. Leipzig und Berlin 1910, p. 31 [4].

Ces compléments, ainsi que les excellents mémoires de Steiner concernent une foule de problèmes de maxima et minima ; ici au contraire c'est uniquement le problème du cercle et de la sphère qui nous occupe.

Sans vouloir critiquer en détail les publications remarquables de mes devanciers, je dois cependant regretter qu'ils n'aient pas prouvé tout d'abord que les formes géométriques cherchées, tant dans le plan que dans l'espace, doivent présenter partout des contours arrondis convexes et être dépourvues de points singuliers, ces derniers pouvant entraver les déductions obtenues, soit par la géométrie courante, soit par le calcul différentiel. J'ai reconnu que cette démonstration préalable une fois établie, on en peut déduire facilement la forme circulaire et la forme sphérique, en n'invoquant que les principes connus de la courbure des lignes et des surfaces.

On a objecté aussi à toutes les publications antérieures, qu'elles ne démontrent nullement l'existence d'un maximum maximorum tant en grandeur qu'en forme précise ; c'est là un point important qu'il faut élucider et ma méthode nouvelle s'y prête très bien.

---

[1] L'auteur expose un procédé spécial pour transformer par un nombre limité d'opérations, un polygone irrégulier en un polygone régulier d'un plus grand nombre de côtés, de façon à diminuer le rapport du périmètre à l'aire qu'il contient.

[2] On trouve ici une critique étendue des mémoires de Steiner en tant qu'ils concernent les problèmes dans le plan. L'auteur tient compte aussi des publications antérieures de Steiner ; il y ajoute des développements complémentaires.

[3] Cet excellent traité reproduit pour les figures planes la démonstration de Steiner (triangle rectangle inscrit) ; il donne une démonstration élégante pour la sphère en prouvant que toutes les normales à la surface cherchée doivent concourir en un même point, tous ces rayons ayant même longueur.

[4] L'auteur traite le problème du cercle en prouvant que dans un quadrilatère inscrit dans le contour, un sommet mobile doit toujours rester sur le cercle passant par les trois autres.

J'admets comme axiome que soit en plan, soit dans l'espace, par toutes les modifications que l'on peut faire subir à un contour fermé, de grandeur limitée donnée, afin d'en agrandir le contenu, on ne peut élever celui-ci au delà de toutes limites, et par conséquent que ce contenu ne pourra varier qu'entre zéro (ligne repliée sur elle-même, surface repliée sur elle-même) et une certaine limite supérieure que j'appellerai *le maximum absolu.* Supposer le contraire c'est admettre que le quotient (contenu) : (contour) peut devenir infiniment grand, ou en d'autres termes, inversement : *qu'un contenu donné, quelque grand qu'il soit, peut être limité par un contour d'étendue nulle*, ce qui est absurde.

Il s'agit maintenant d'examiner si, et comment, on pourra atteindre ce maximum absolu, non seulement *en grandeur* mais aussi *en forme précise;* c'est à ce dernier égard qu'il pourrait y avoir doute.

On peut supposer l'existence, soit d'un maximum unique, soit de plusieurs maxima équivalents de formes différentes [1], soit encore d'une infinité de maxima équivalents de formes diverses [2] — soit enfin d'un maximum absolu précisé en grandeur mais non en forme. Il est indifférent qu'on arrive à un pareil maximum par un nombre limité de transformations ou par un nombre infini d'approximations successives [3].

Dans les démonstrations qui suivent, je ne poursuis pas de pareilles distinctions; l'idée dominante est tout autre : nous étudions les conditions que doivent remplir les formes cherchées pour pouvoir constituer un maximum s'il existe; nous trouvons que seuls le cercle dans le plan et la sphère dans l'espace remplissent ces conditions.

Considérons pour simplifier le cas d'un contour dans le plan (on raisonnerait de même pour les surfaces dans l'espace). Nous trouvons que ce contour, tant qu'il n'est pas dépourvu de tout point singulier, de toute irrégularité de courbure (pointe, creux, bosse, etc.) tant qu'il n'est pas entièrement circulaire en un mot, — peut toujours être déformé de façon que l'on obtienne un agrandissement du contenu. En supprimant ainsi toutes les irrégularités de courbure, par approximations successives, nous arrivons au contour circulaire qui seul résiste à tous ces procédés [4].

---

[1] *Par exemple :* des figures symétriques dans le plan ou dans l'espace.

[2] *Par exemple :* Tous les triangles à aire maxima inscrits dans une ellipse donnée ; ce sont les projections d'un triangle équilatéral mobile restant inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection ; ils sont de forme variable.

[3] *Par exemple :* Un triangle irrégulier dans lequel, tout en conservant la longueur du périmètre, on remplace successivement deux côtés inégaux par deux côtés égaux, puis l'un d'eux et le troisième par deux côtés égaux et ainsi de suite... jusqu'à la limite qui est le triangle équilatéral à aire maxima.

[4] Nos transformations font subir à chaque fois au contour, non seulement un agrandissement du contenu mais aussi une diminution simultanée de la longueur du périmètre. Pour maintenir celle-ci non altérée, il faudrait donc faire suivre chaque opération d'un agrandissement de toute la figure, par voie de similitude.

Mais objectera-t-on peut-être, il n'est pas démontré que par d'autres procédés que ceux mentionnés, on ne puisse arriver à un contour de contenu encore plus grand ? Cela est impossible car, ou ce nouveau contour serait circulaire ou il ne le serait pas. Dans le premier cas il serait identique au cercle déjà trouvé, car deux cercles ayant même périmètre sont identiques. Dans le deuxième cas on pourrait appliquer à ce nouveau contour nos procédés de transformation jusqu'à le ramener à être circulaire et alors, après tous les agrandissements de contenu ainsi obtenus, on serait ramené de nouveau à un cercle de contenu supérieur à celui du cercle déjà trouvé, tout en ayant même périmètre, ce qui est impossible. Donc enfin puisqu'il est impossible d'imaginer un contour isopérimétrique ayant un contenu supérieur à celui du cercle, celui-ci constitue *en grandeur et en forme le maximum absolu et unique* cherché, et ma méthode, consistant à supprimer successivement toutes les irrégularités de courbure par des amputations de plus en plus restreintes, établit simultanément *la limite de grandeur* et la *limite de forme.*

Pour la forme sphérique je ne donne que ma démonstration spéciale car j'estime qu'elle est tellement préférable aux exposés antérieurs, que ces derniers ne seront plus guère utilisés à l'avenir. Par contre, pour la forme circulaire dont on s'occupe bien plus souvent, j'ajoute à mon procédé spécial, deux autres démonstrations. La première (triangle rectangle), utilisée également par Steiner, représente la solution la plus simple ; la seconde (polygones réguliers) conduit directement à la solution cherchée, sans un exposé préalable ; je l'ai établie dans ce but spécial.

**I. — Parmi toutes les courbes planes fermées de même périmètre, la courbe circulaire est celle qui limite la plus grande surface.**

(1) Lorsqu'une droite AB (fig. 1) divise en deux parties égales la longueur ACBD d'un contour fermé renfermant une aire maximum, elle doit aussi diviser l'aire limitée par ce contour en deux parties égales. Supposons dans le cas contraire, que l'aire ACB, par exemple, soit supérieure à l'aire ADB et faisons tourner le contour ACB autour de AB comme axe pour le rabattre en sa position symétrique AC′B; alors l'aire totale ACBC′A dont le périmètre n'a pas changé, sera supérieure à l'aire de la figure primitivement considérée; celle-ci ne pourrait donc pas représenter un maximum.

(2) Le contour cherché ne doit contenir aucune cavité ou pointe rentrante. Considérons dans le contour ABCD (fig. 2) une cavité A et une pointe B dirigées vers l'intérieur. Dans les deux cas il est possible de mener une sécante découpant à l'intérieur une partie du contour de façon à agrandir l'aire tout en diminuant simultanément la longueur du contour. La figure considérée tout d'abord ne satisferait donc pas aux conditions posées.

(3) Le contour cherché ne doit pas non plus présenter des bosses

ou pointes dirigées vers l'extérieur. Considérons en effet (fig. 2) les pointes saillantes D et C. Dans le cas de D ainsi que dans le cas d'une bosse, il y a raccordement concave aux abords, ce qui d'après (2) doit être exclu. Dans le cas de C il y a raccordement convexe ; menons par un point E voisin de C la droite EF bissectrice à la fois pour le contour et l'aire comprise et faisant en E un certain angle avec le contour. (Si cet angle était en particulier un angle droit, on choisirait sur l'arc convexe ou rectiligne EC un autre point E'). Remplaçons maintenant la moité EDAF du contour par le rabattement symétrique de ECBF autour de EF comme axe, ce qui dans la nouvelle figure totale ne change ni la longueur du contour ni la valeur de l'aire qu'il comprend. Entre le point C et son symétrique C' par rapport à EF il existe alors un contour concave et la figure, d'après (2), ne peut constituer un maximum.

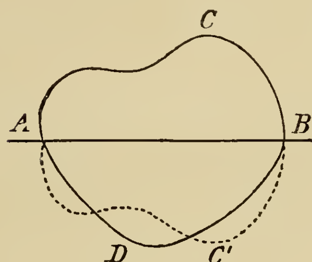


Fig. 1.

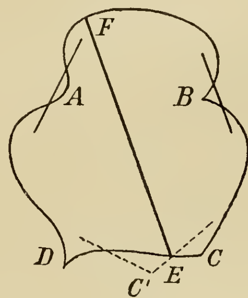


Fig. 2.

On pourrait, il est vrai, objecter que l'arc convexe EC étant tel qu'en chaque point il reste normal à la bissectrice qu'on y fait passer, la démonstration ci-dessus serait en défaut. Mais alors il suffirait de faire passer le point E' voisin du point C un peu au delà de celui-ci. Comme en C il y a rupture brusque de courbure, la conception de la bissectrice toujours normale au contour devient inadmissible.

(4) Le contour cherché ne doit contenir aucune partie rectiligne. Ceci résulte de la démonstration (3) ci-dessus dans laquelle il suffit de considérer (fig. 2) la partie EC du contour comme formée par une ligne droite. De plus, dans ce cas l'objection mentionnée ci-dessus disparaît d'elle-même, car si en E la bissectrice EF était normale à EC elle ne pourrait plus l'être en tout autre point E' de EC, deux bissectrices ne pouvant jamais être parallèles.

(5) Il résulte de ce qui précède que le contour cherché doit présenter partout une courbure continue, convexe et dépourvue de points singuliers. Cette courbure ne peut croître ou décroître

continuellement en intensité, autrement le contour ne pourrait être une courbe fermée ; elle sera donc alternativement croissante ou décroissante à moins qu'elle ne reste constante. Considérons (fig. 3) une bissectrice AB et supposons que le point A décrive la totalité du contour. Dans toutes les positions de AB cette droite devra toujours rester normale à la courbe au point A, car autrement en appliquant la démonstration du n° (3) donnée (fig. 2) pour le point C, on prouverait que la courbe ne convient pas pour le maximum cherché. La bissectrice AB devra pour les mêmes raisons rester aussi normale à la courbe en sa seconde extrémité B; ce sera donc une droite toujours doublement normale à la courbe. La bissectrice AB, en exécutant son mouvement de rotation, roule sur la développée du contour.

Cette développée doit être une courbe fermée ; elle doit présenter un point de rebroussement pour chaque maximum ou minimum de courbure du contour. Il résulte encore de là que AB doit conserver une longueur constante, car ce qui se déroule d'un côté s'enroule de l'autre. La possibilité d'une pareille conception se démontre par un exemple :

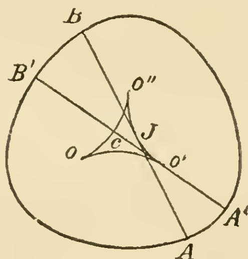


Fig. 3.

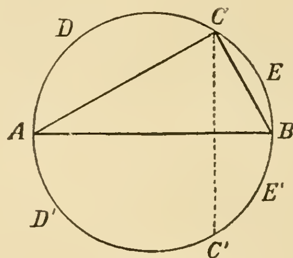


Fig. 4.

Concevons que la développée se compose de trois arcs de cercle égaux OO', O'O'', O''O (fig. 3) tangents deux à deux. Sur le milieu J de l'arc O'O'' posons le milieu de la droite AB, qui roulant ensuite sur cette développée quasi triangulaire, engendre le contour développant. A chaque maximum de courbure d'un côté, correspond un minimum de courbure de l'autre côté, comme le fait voir la position A'B' de la droite mobile. On peut concevoir une infinité de pareilles figures, même de courbure irrégulière, dans lesquelles toutefois la développée devra toujours présenter un nombre impair de points de rebroussement et entre ceux-ci des arcs de même longueur, à défaut de quoi ce qui précède ne serait pas possible[1].

[1] On peut, pour s'en convaincre, essayer la construction (fig. 3) avec 4 arcs de cercle égaux pour la développée. On reconnaît de suite que l'on obtient ainsi plusieurs dévelop-

(6) Le contour doit forcément être de forme circulaire. En effet, si une forme du contour, telle qu'elle vient d'être décrite, est admissible géométriquement, nous y rencontrons cependant, dans le cas du problème actuel, une impossibilité, qui ne disparaît que si la développée considérée se réduit à un point unique, à défaut de quoi la droite AB ne pourrait pas rester bissectrice dans toutes ses positions. Lorsque de fait, le point J de contact avoisine l'un des points de rebroussement, comme pour A'B', l'un des rayons vecteurs développants est plus grand que l'autre, donc l'accroissement de l'aire d'un côté ne peut être égal à la diminution de l'autre côté. Donc enfin la développée OO'O'' doit forcément se réduire à un point unique et nous arrivons ainsi immédiatement au développement du contour circulaire, c. q. f. d.

(7) Au lieu d'établir, comme ci-dessus (5) et (6) la forme circulaire du contour cherché, en considérant le mouvement de rotation d'une bissectrice doublement normale, on peut arriver à la même conclusion à l'aide de la démonstration suivante déjà utilisée dans les mémoires de Steiner et qui est certainement la plus simple[1].

Considérons (fig. 4) une bissectrice AB et un point C pris à volonté sur le contour; menons les droites CA et CB. Dans le triangle ACB l'angle en C doit être un angle droit, car s'il ne l'était pas, on pourrait agrandir la demi-surface ABECD sans changer la longueur du contour curviligne en remplaçant cet angle par un angle droit, tout en laissant sur les côtés AC et BC les segments courbes qu'ils sous-tendent. En remplaçant ensuite la deuxième moitié ABE'C'D' du contour par la figure symétrique de la première prise par rapport à AB, on aurait augmenté l'aire de la figure totale, sans changer la valeur du contour.

Ces modifications de forme introduisant même en A, C, B, C' des points singuliers dans le contour on pourrait encore y appliquer les procédés mentionnés au (2), etc. Le contour doit donc forcément être circulaire.

(8) Au lieu d'utiliser les deux démonstrations ci-dessus, qui s'appuient sur notre exposé préliminaire, on peut arriver sans celui-ci, directement à la conclusion voulue, à l'aide d'une démonstration que nous avons établie, en considérant des polygones réguliers d'un nombre infini de côtés.

---

pantes au lieu d'une seule, tandis que dans le cas d'un nombre impair de rebroussements, comme ci-dessus, les deux extrémités de AB décrivent une seule et même courbe. Il suffit pour cela que les arcs de développée aient même longueur, mais il n'est pas nécessaire qu'ils soient circulaires ni même qu'ils soient tangents entre eux. Ce qu'il importe de remarquer, c'est que dans ces conditions, après une révolution complète de la droite AB, le point B se trouve exactement à la place où se trouvait précédemment le point A, tandis que dans le cas d'un nombre pair de rebroussements, ce serait le point A qui serait revenu sur lui-même.

[1] Notre première démonstration spéciale, offre toutefois l'avantage de pouvoir être utilisée de nouveau plus loin, pour notre démonstration concernant la forme sphérique.

Si (fig. 5) deux côtés adjacents AC′ et BC′ d'un polygone sont inégaux on peut remplacer le contour AC′B par un autre ACB de même longueur, à côtés égaux et qui renferme une plus grande surface[1], de façon que :

$$AC + CB = AC' + C'B \text{ et surf. } ACB > \text{surf. } AC'B$$

Menons la droite CH parallèle à AB et prolongeons AC de sa propre longueur jusqu'au point D qui est alors le symétrique de B par rapport à CH. Joignons ce point D au point C″ où AC′ coupe CH et joignons C″B en sorte que C″D = C″B. On voit sur la figure que :

$$AC'' + C''B = AC'' + C''D > AD = AC + CB\ .$$

Donc le contour AC″B étant plus grand que le contour ACB, le point C′ où il doit y avoir égalité, se trouve forcément au-dessous de la droite CH et la surface ACB surpasse la surface AC′B de la surface BC′C″.

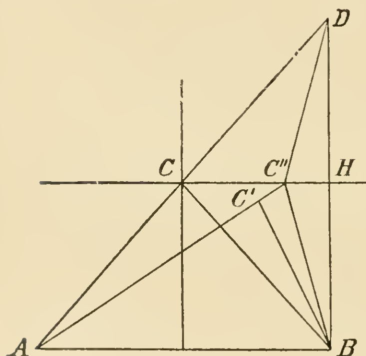


Fig. 5.

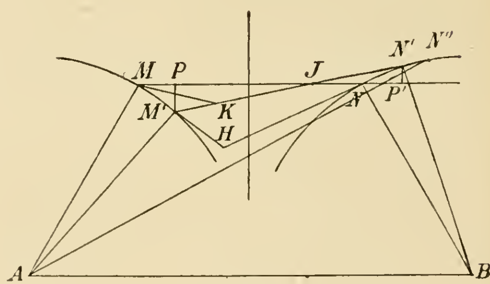


Fig. 6.

Lorsque AC′ tend vers AC l'aire BC′C″ tend vers zéro.

Si d'autre part (fig. 6) dans un polygone ayant tous ses côtés égaux à $r$, deux angles voisins AM′N′ et BN′M′ sont inégaux, on peut déformer le contour AM′N′B en un autre AMNB à côtés de même longueur, à angles égaux et comprenant une surface plus grande. Soit J le point d'intersection des droites MN et M′N′. Il s'agit de prouver qu'en passant de AM′N′B à AMNB l'agrandissement AMJM′A surpasse la diminution BNJN′B.

[1] Le lieu géométrique des points C′ est une ellipse ayant A et B comme foyers et C comme sommet du petit axe. La hauteur du point C au-dessus de AB est donc maxima et ceci suffirait pour démontrer la proposition.

Remarquons d'abord que $MM' > NN'$ car si l'on avait $MM' \leq NN'$ il faudrait que $M'N'$ fut plus grand que $MN$ ce qui se démontre comme suit : les droites $MM'$ et $NN'$ se coupent en $H$ ; l'angle $NMH$ est plus grand que l'angle de $MN$ avec la tangente en $M$ au cercle décrit avec $A$ comme centre et $r$ comme rayon. L'angle $MNH$ est plus petit que l'angle de $MN$ avec la tangente en $N$ au cercle décrit de $B$ comme centre et $r$ comme rayon. $MN$ faisant avec les tangentes mentionnées des angles égaux, on a donc $NMH > MNH$. Abaissons $M'P$ et $N'P'$ perpendiculaires sur $MN$ ; alors on aurait (même dans le cas où $MM' = NN'$) forcément : $NP' > MP$ d'où résulte $M'N' > PP' > MN$ contrairement à $M'N' = MN$. Donc il faut que $MM' > NN'$ et surf. $AMM' >$ surf. $BNN'$.

Menons maintenant $MK$ de telle façon que l'on ait pour les angles l'égalité $JMK = JN'N$. Le point $K$ doit se trouver sur $JM'$ car l'angle $JMH$ est plus grand que $JNH$ et à plus forte raison plus grand que $JN'N$. Par suite de la similitude des triangles $MJK$ et $N'JN$ et des inégalités $MK > MM' > NN'$ on aura pour les surfaces $MJM' > MJK > N'JN$ et ceci complète la démonstration qu'il fallait donner pour $AMJM'A > BNJN'B$.

Lorsque $M'N'$ tend vers $MN$, cette inégalité tend vers une égalité, pour laquelle les deux termes tendent vers zéro. Si l'on pousse la déformation en sens inverse, on atteint la limite où la ligne brisée $AM'N'$ devient une ligne droite $AN''$. Il n'y a pas lieu d'aller au delà puisqu'alors la diminution de l'aire comprise devient manifeste.

(9) Parmi tous les polygones ayant un périmètre de longueur donné et un nombre de côtés donné, le polygone régulier comprend la plus grande surface et entre deux polygones réguliers ayant un périmètre de longueur donné, celui qui a le plus grand nombre de côtés comprend aussi la plus grande surface.

Le premier énoncé résulte immédiatement de ce qui a été démontré au n° 8, car il faut, d'après cela, dans le polygone considéré, que tous les côtés soient égaux et que tous les angles soient égaux. Le second énoncé résulte de ce que le polygone d'un plus petit nombre de côtés peut toujours être considéré comme un polygone irrégulier d'un plus grand nombre de côtés.

(10) Le contour cherché, renfermant la plus grande surface à égalité de périmètre, doit être circulaire. On peut en effet toujours inscrire dans le contour considéré un polygone ayant $m$ côtés égaux à $r$. On prendra à cet effet les $m$ côtés $r$ assez petits pour qu'en les portant sur le contour, le polygone ne se ferme pas ; puis on fera croître $r$ d'une manière continue jusqu'à ce que la ligne polygonale se ferme. Le polygone alors inscrit devra être un polygone régulier, autrement en le déformant de manière qu'il devienne régulier, tout en laissant les segments

curvilignes attachés à ses côtés, on agrandirait l'aire comprise sans changer la longueur du contour. Si l'on suppose maintenant que le nombre $m$ des côtés croisse jusqu'à l'infini, les polygones réguliers s'assimilant alors de plus en plus au contour considéré, qui doit les contenir tous, on en conclut que ce dernier doit être un cercle.

Cette troisième démonstration, moins simple que les deux précédentes, offre cependant l'avantage de conduire directement à la conclusion sans s'appuyer sur notre exposé préliminaire. Elle nous fait indirectement connaître aussi certaines propriétés des polygones, auxquelles il convient d'ajouter encore la suivante :

Parmi tous les polygones de périmètre donné, formés par une suite de $m$ côtés de longueurs quelconques, également données, celui qui est inscriptible dans un cercle contient la plus grande surface. On peut en effet porter la suite de $m$ côtés sur une circonférence d'un rayon suffisamment grand pour que la ligne polygonale ne se ferme pas. On fera ensuite décroître le rayon d'une manière continue jusqu'à ce qu'il y ait fermeture ; le polygone sera alors inscrit.

Portant maintenant les $m$ côtés de ce polygone sur les côtés respectifs du premier polygone, avec les segments circulaires qu'ils sous-tendent, on obtiendra une figure à contour curviligne, ayant une surface totale moins grande que celle du cercle. Retranchant de part et d'autre les segments circulaires, il reste les deux polygones à comparer, dont celui qui est inscriptible contient la plus grande surface.

(11) Les propriétés du cercle entier se généralisent pour le segment circulaire comme suit :

Lorsqu'une ouverture entre deux points d'un contour fermé pour le reste, doit être close par une ligne de longueur donnée, c'est le segment circulaire dont l'arc possède cette longueur, qui contient la plus grande surface, car l'aire du cercle entier auquel ce segment appartient, ne pourrait qu'être diminuée si on le remplaçait par tout autre contour de même longueur.

II. — **De toutes les formes géométriques d'un corps limité de toute part dans l'espace, la forme sphérique est celle qui, à égalité de grandeur de l'enveloppe, renferme le plus grand volume.**

(12) Toute section plane AB (fig. 7) pratiquée à travers un corps solide, renferme une surface moins grande que la surface de chacune des calottes détachées dans le corps. Considérons d'abord la calotte supérieure dont la surface peut être entièrement projetée sur la section AB. Menons à travers la calotte ACB un grand nombre de plans parallèles entre eux, perpendiculaires à la section AB, et divisant cette calotte en disques minces. Menons ensuite un second système de plans parallèles, perpendiculaires aux disques et à la section AB, lesquels divisent les disques en un

grand nombre de prismes minces (ou plutôt troncs de prismes) à base rectangulaire. Chacun de ces prismes projette une petite parcelle de la surface de calotte sur la base rectangulaire dans la section AB. Le nombre de prismes projetants devenant infiniment grand, les parcelles de la calotte peuvent être considérées comme de petits parallélogrammes toujours plus grands que leur projection sur la section AB, s'ils ne possèdent pas, comme dans le cas de parallélisme, une valeur au moins égale. Tout le long du contour de la section AB les parcelles de calotte seront triangulaires en général, mais la conclusion reste la même.

Dans la seconde calotte détachée AA′C′B′B la surface surpasse à plus forte raison celle de la section AB, puisque déjà la portion A′C′B′ qui se projette sur la section AB est plus grande que la surface de celle-ci, d'après ce qui précède.

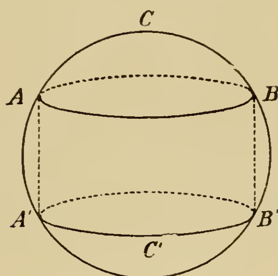



Fig. 7.

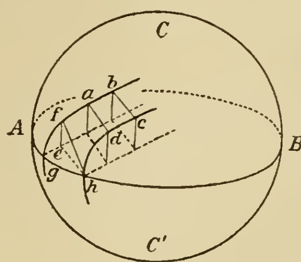



Fig. 8.

(13) Considérons (fig. 8) dans un corps solide, la calotte ACB détachée par une section plane AB et supposons que l'on prolonge toutes les ordonnées de cette calotte, perpendiculaires à la section, d'une quantité égale à leur propre longueur; il en résultera une nouvelle surface AC′B symétrique de ACB par rapport à la section AB. Nous allons démontrer que le corps AC′B possède exactement la même valeur de surface enveloppe et la même valeur de volume que son symétrique ACB.

Menons à travers le corps ACB un grand nombre de plans parallèles entre eux, perpendiculaires à la section AB et divisant ce corps en disques minces. Menons ensuite un second système de plans parallèles perpendiculaires aux disques et à la section AB, lesquels divisent les disques en un grand nombre de prismes minces (ou plutôt troncs de prismes) à base rectangulaire dans la section AB. Le nombre des prismes projetants devenant infiniment grand, les parcelles de la surface peuvent être considérées comme de petits parallélogrammes. Considérons (fig. 8) l'un de ces parallélogrammes *abcd*; celui-ci sera reproduit exactement dans la

surface symétrique AC′B, car les longueurs des quatre côtés et des diagonales sont les mêmes de part et d'autre.

Sur l'extrémité du disque considéré *bghc* il y aura, au lieu d'un parallélogramme, un triangle *ghf* qui sera également reproduit dans la figure symétrique, car les longueurs des trois côtés restent les mêmes. Donc on conclut que les surfaces enveloppes des deux corps symétriques ACB et AC′B ont la même valeur.

D'autre part le volume de l'un des troncs de prisme, par exemple, celui provenant de *abcd*, s'obtient en multipliant l'ordonnée du centre de *abcd* par la surface de la base rectangulaire. Ces deux facteurs se trouvent reproduits dans le tronc de prisme symétrique ; il en est donc de même pour le volume. Enfin vers l'extrémité du disque il y a, au lieu d'un tronc de prisme, une petite pyramide *fegh* dont le volume s'obtient en multipliant la base triangulaire *egh* par le tiers de *fe*. Ces facteurs étant reproduits dans la pyramide symétrique il en est encore de même du volume. Donc en somme les deux corps symétriques ACB et AC′B ont des volumes de valeur égale.

(14) Toute section plane qui dans le corps de forme cherchée divise la surface enveloppe en deux parties de valeur égale, doit aussi diviser le volume du corps en deux parties de valeur égale. Dans le cas contraire, en effet, on pourrait remplacer la moindre partie par la figure construite symétriquement sur la section avec l'autre partie d'après (13) et on aurait ainsi obtenu un volume encore plus grand sans changer la valeur totale de l'enveloppe, ce qui doit être exclu en principe.

(15) La forme du corps cherchée ne doit présenter aucune cavité, rigole, arête vive ou pointe dirigées vers l'intérieur. Dans le cas d'une cavité proprement dite, on trouvera toujours un point de la surface, pour lequel celle-ci est concave dans toutes les directions, le plan tangent dans le voisinage restant entièrement compris à l'intérieur. Alors toute section plane parallèle à ce plan et très voisine, détache une calotte de surface tombant à l'intérieur et de ce fait amoindrit la valeur de l'enveloppe tout en augmentant le volume compris (12). Dans le cas d'une rigole, il y a concavité dans le sens transversal, tandis que dans le sens longitudinal (fig. 9) il peut y avoir convexité. On pourrait bien en pareil cas, considérer l'extrémité de la rigole où généralement il y aura concavité ; mais il se pourrait que la rigole n'ait pas d'extrémité, en revenant en forme annulaire sur elle-même ; il se pourrait encore que vers

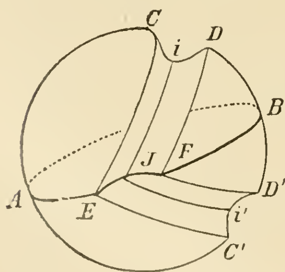


Fig. 9.

l'extrémité il y ait raccordement convexe avec la surface arrondie. En pareil cas coupons la surface (fig. 9) par un plan bissecteur AEFB faisant avec la rigole un certain angle DFB et remplaçons la partie inférieure du corps par la figure symétrique de la partie supérieure ACDB, ce qui (13) ne change ni la valeur de l'enveloppe ni celle du volume compris. La rigole CEFD et la rigole symétrique C′EFD′ se coupent suivant un profil concave EF. Entre le point J où les talwegs de rigoles se rencontrent et le point E il y a sûrement une arête vive rentrante, concave, où l'on peut à l'aide d'une section plane, détacher une calotte tombant à l'intérieur, ce qui amoindrit la valeur de l'enveloppe tout en augmentant celle du volume.

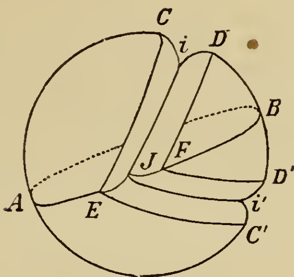


Fig. 10.

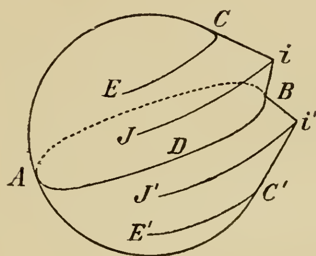


Fig. 11.

Considérons maintenant le cas (fig. 10) où la rigole ne présenterait aucune concavité, ni dans un sens ni dans l'autre, étant formée de talus convexes ou plans, qui se coupent suivant une arête vive *i*J convexe et se raccordent en CE et DF avec le reste de la surface. Menons comme ci-devant à travers le corps un plan bissecteur AEFB coupant la rigole suivant un angle aigu DFB et remplaçons la partie inférieure du corps par la figure symétrique à la partie supérieure (13). La rigole CEFD et la rigole symétrique C′EFD′ se coupent suivant l'arête vive EF et les arêtes vives *i*J et *i*′J se rencontrent en J où il s'est formé une pointe rentrante, que l'on peut couper par une section plane très voisine, de façon à détacher une calotte tombant à l'intérieur, ce qui amoindrit la valeur de l'enveloppe tout en agrandissant celle du volume.

La démonstration que nous venons de donner serait applicable à toute arête vive ou pointe rentrant dans la surface de l'enveloppe.

(16) La forme de corps cherchée ne doit présenter ni bosses, ni bourrelets, ni arêtes vives ou pointes dirigées vers l'extérieur. En tant qu'il s'agit de bosses, bourrelets ou autres parties saillantes, dépourvues d'arêtes vives ou pointes, on remarquera qu'une pareille excroissance, si elle ne forme partie de la surface même,

sera toujours raccordée avec elle par des parties concaves et doit de ce fait (15) rester exclue.

Considérons maintenant (fig. 11) le cas d'une arête vive *i*J reliée en CE par un raccordement convexe avec la surface. Menons parallèlement à la tangente en un point *i* de l'arête *i*J et dans le voisinage, un plan bissecteur AB qui coupe la surface du corps *i*JBD en biais. (Si ce plan sécant était par hasard normal à la surface dans le voisinage du point B, on prendrait entre BD et *i* un autre plan sécant bissecteur B'D' qui ne le serait pas). Remplaçons ensuite la partie inférieure du corps par la figure symétrique de la partie supérieure (13) ce qui ne modifie en rien la valeur de l'enveloppe et du volume compris. Il s'est formé alors entre l'arête *i*J et l'arête symétrique *i'*J' une rigole rentrante, ce qui (15) doit rester exclu.

On pourrait, il est vrai, objecter que la surface du corps entre BD et *i*J étant telle que les plans bissecteurs B'D' menés dans cet intervalle parallèlement à la tangente en *i*, rencontrent cette surface toujours normalement, la démonstration ci-dessus serait en défaut. Mais en pareil cas il suffirait de faire passer le plan sécant B'D' un peu au delà de la tangente en *i*. Puisqu'en ce point il y a rupture brusque de courbure, la conception du plan bissecteur toujours normal à la surface est alors inadmissible.

La démonstration donnée ci-dessus pour le cas d'une arête vive à raccordements convexes, serait également applicable au cas d'une pointe raccordée de la même façon.

(17) La forme de corps cherchée ne doit contenir aucune ligne droite ni aucune surface plane. Ceci résulte de la démonstration (16) pourvu que dans la figure (11) on considère B*i* comme une ligne droite ou B*i*J comme une surface plane. En outre, si dans cette figure le plan bissecteur BD était normal à la droite ou au plan en B, tout autre plan bissecteur B'D' entre B et *i* ne le serait plus, puisqu'il ne peut y avoir deux plans bissecteurs parallèles.

Il résulte de tout ce qui précède que la forme de corps cherchée doit être partout continue, arrondie, convexe et dépourvue de points singuliers.

(18) Tout plan bissecteur, doit en chaque point de la courbe de section, être normal au plan tangent à la surface en ce point. En effet si cela n'était pas, on pourrait, en procédant d'après (15) et (16), remplacer l'une des moitiés du corps par la figure symétrique de l'autre et établir ainsi une rigole, permettant de diminuer l'enveloppe tout en augmentant le volume compris.

(19) La forme de corps cherchée doit être la forme sphérique. En effet, menons à travers le corps (fig. 12) le plan bissecteur XX' pris à volonté puis perpendiculairement à celui-ci le plan bissecteur ZZ' qui coupe le premier suivant YY', enfin perpendiculairement à cette droite le plan bissecteur XZX'Z', qui

coupe cette ligne en O et le premier plan bissecteur mentionné XX′, suivant la droite XOX′. Nous avons établi ainsi les trois axes rectangulaires usuels et nous allons prouver que la première section XYX′Y′ menée tout d'abord, à volonté, doit être circulaire.

Supposons (fig. 12) que le plan bissecteur XZX′Z′ se meuve de façon à rester toujours perpendiculaire au plan XYX′Y′ et de façon que le point X fasse un tour complet sur la périphérie de cette section. En une position quelconque X″ de ce point, la droite X″X‴, suivant laquelle se coupent les deux plans, doit d'après (18) être toujours normale à la courbe XX″X′ et il en est

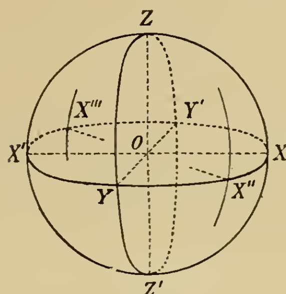


Fig. 12.

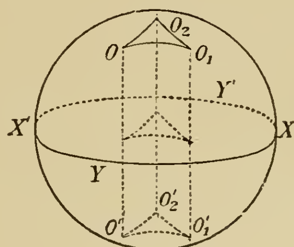


Fig. 13.

de même pour le second point d'intersection X‴. Nous sommes ainsi ramenés absolument à ce qui a été dit au n° (5) (fig. 3) quant au mouvement de rotation de la droite doublement normale, roulant sur la développée de la courbe de section ; toutefois ici on ne peut affirmer pour le moment, que cette droite mobile soit bissectrice de la section XX″X′X‴. Pour tout le reste rien n'est changé : la droite X″X‴ conserve une longueur constante ; elle roule sur une développée à nombre impair de rebroussements... etc. Pour simplifier nous admettrons comme dans la (fig. 3) qu'il n'y en ait que trois ; ce qui suit s'appliquerait tout aussi bien à un nombre supérieur.

La droite X″X‴ roule donc dans le plan XX″X′X‴ sur une développée quasi triangulaire. Le plan bissecteur mobile roule sur une surface cylindrique normale au plan XX″X′X‴ et ayant cette développée quasi triangulaire comme base. Ce cylindre coupe la surface du corps (fig. 13) suivant deux contours quasi triangulaires $OO_1O_2$ et $O'O'_1O'_2$. Chaque point d'un pareil contour $OO_1O_2$ correspond à une position du plan bissecteur mobile et à une ligne de contact du cylindre, normale au plan XYX′Y′. Il faut donc, d'après (18), qu'en chacun de ces points (fig. 13) du contour $OO_1O_2$, le plan tangent à la surface du corps, soit parallèle au

plan XYX'Y'. Ceci ne serait possible que si le contour $OO_1O_2$ était dans un plan, ou si à l'intérieur la surface était concave. L'un et l'autre cas doivent, d'après (15) (16) (17), être exclus et cette impossibilité ne disparaît que si la développée quasi triangulaire (fig. 12) dans le plan XYX'Y' se réduit à un point unique le cylindre de roulement se réduisant alors à un axe de rotation. Le mouvement de la droite X''X''' engendre donc un cercle.

Le plan bissecteur XYX'Y', ayant été pris à volonté, on en conclut que tout plan bissecteur coupe le corps suivant un cercle. Ceci s'applique en particulier au plan bissecteur mobile qui, tournant autour d'un diamètre, engendre alors une sphère, c. q. f. d.

(20) Spécialement, quant à la forme à adopter pour calottes de chaudières, têtes de bouées, corps d'aérostats... etc., on peut généraliser facilement pour la calotte sphérique ce qui vient d'être démontré pour la sphère entière ; à savoir :

Parmi toutes les formes de surface d'une étendue donnée, pouvant constituer la clôture d'une ouverture circulaire, la calotte sphérique possédant cette étendue offre le contenu maximum, car le volume de la sphère entière à laquelle appartient cette calotte, ne pourrait être que diminué, si on la remplaçait par tout autre surface de clôture ayant même étendue.

Max Edler v. Leber (Vienne, Autriche).

---

# SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA THÉORIE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

La théorie des intégrales abéliennes, à laquelle se rattachaient, au siècle passé, tant de grands noms depuis Abel à Weierstrass, maintenant que l'on est arrivé à trouver sa vraie forme, simple, élégante et toute naturelle, n'attire guère l'attention que d'un très petit nombre de mathématiciens. A quoi cela tient-il ?

En laissant de côté les causes subjectives, comme les préjugés, par exemple, et en passant directement aux causes objectives, on les trouve dans la marche historique du développement de cette théorie. Le génie d'Abel a brillamment commencé la théorie des intégrales qui portent maintenant son nom immortel, en analysant les divers cas particuliers de son célèbre théorème, directement,

avec les moyens très simples d'analyse de son temps[1]. Arraché à la science par une mort prématurée, il a laissé à d'autres le développement ultérieur de la théorie. Plusieurs savants allemands ont pris, par la suite, des routes très diverses pour constituer une théorie des intégrales abéliennes, en partant chacun du domaine des mathématiques dont il s'occupait plus spécialement. L'analyse mathématique possède maintenant cinq méthodes principales; en voici la liste disposée dans l'ordre chronologique de leur apparition : 1. Göpel et Rosenhain. — 2. Riemann. — 3. Clebsch et Gordan. — 4. Weierstrass. — 5. Dedekind et Weber.

1. — Après que Jacobi, arrivé par l'étude des développements des fonctions elliptiques en séries à la fonction thêta d'une variable, eut montré dans ses leçons comment on peut, inversement, en partant de la fonction thêta arriver aux fonctions et intégrales elliptiques, cette voie inverse fut suivie, non sans succès, par Göpel et Rosenhain (chacun indépendamment de l'autre), en étendant la définition de la thêta-fonction au cas de deux variables. Ils résolvaient ainsi le problème de Jacobi dans le cas des intégrales hyperelliptiques de la 1re classe. Mais par cette méthode *inverse* il n'est pas facile d'arriver, dans le cas général, aux intégrales abéliennes, comme on en peut juger par l'ouvrage de M. Schottky[2]. Les difficultés « techniques », comme disait Weierstrass, restent encore très grandes, malgré les recherches ultérieures de divers savants distingués.

2. — S'occupant de la physique mathématique, Riemann était conduit naturellement à sa théorie générale des fonctions d'une variable complexe, par laquelle une telle fonction est définie complètement en vertu du principe de Dirichlet, lorsqu'on donne la manière dont elle devient infinie en certains points d'une surface et ses valeurs sur le contour de celle-ci. Je pense que c'est pour mettre à l'épreuve sa théorie générale des fonctions, qu'il l'a appliquée aux intégrales abéliennes prises suivant les courbes tracées sur une surface spéciale, portant son nom, appropriée à représenter uniformément l'ensemble de toutes les valeurs d'une fonction algébrique donnée. Ces surfaces de Riemann, qui arrêtent parfois les commençants, sont cependant dans la nature même des fonctions algébriques : Cauchy n'en était pas loin, car il faisait des coupures suivant des lignes, menées des points de ramification vers le contour de la surface considérée. Il ne lui restait qu'à rejoindre les bords des différents feuillets à la manière de Riemann. Les surfaces de Riemann resteront toujours dans la théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, comme un moyen simple et précis d'indiquer brièvement la suite con-

---

[1] V. Mémoire XII dans ses « Œuvres » (nouvelle édition), t. I.

[2] Schottky, *Abriss einer Theorie der Abelschen Funktionen von drei Variabeln*. Leipzig, 1880.

tinue des valeurs de la fonction que l'on considère. Mais ce qui est étrange ici, c'est de s'appuyer sur le principe de Dirichlet pour démontrer l'existence de ce qu'on peut trouver à l'aide des opérations algébriques, c'est ce qui est d'après L. Kronecker : « der beste Existenzbeweis ». Cette méthode n'est ni la plus directe ni la plus naturelle. Du reste, la théorie des thêta-fonctions chez Riemann ne ressort pas des propriétés des intégrales abéliennes ; ces fonctions sont trouvées par généralisation de celle de Jacobi, comme l'avaient fait auparavant Göpel et Rosenhain, de sorte que la théorie de Riemann est fondée sur deux bases différentes, n'ayant aucun lien entre elles. Il n'en est pas ainsi dans la théorie des fonctions elliptiques, qui n'en sont que le cas le plus simple. L'artificiel de la théorie de Riemann ne l'a pourtant pas empêchée d'avoir un grand succès, qui dure jusqu'à nos jours, quoique les défauts principaux de cette théorie — le synthétisme d'exposition et ses deux bases étrangères sans aucun lien entre elles, — aient été signalés déjà par Clebsch et Gordan neuf ans après et les aient poussé à construire la théorie des intégrales abéliennes sur une autre base, comme ils l'expliquent dans la préface de leur « Theorie der Abelschen Funktionen ».

3. — Clebsch et Gordan furent les premiers qui abordèrent en 1866 la théorie des intégrales abéliennes par la voie directe, en partant de la vraie source des propriétés de ces intégrales, de l'équation fondamentale qui définit l'irrationalité dont elles dépendent. Ils réussirent à tirer la théorie des thêta-fonctions de celle des intégrales abéliennes, en ramenant la résolution du problème de Jacobi, à l'aide du théorème d'Abel relatif aux intégrales abéliennes de troisième espèce, à l'étude des fonctions auxiliaires

$$\mathrm{T}_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x_i \\ c_i \end{pmatrix}_1^p = \sum_{i=1}^{p} \int_{c_i}^{x_i} d\,\Pi_{\xi\eta} \,.$$

Cependant cette étude s'est montrée très pénible, d'une part, parce qu'ils n'ont pas changé les variables indépendantes en celles qu'indique le problème de Jacobi (comme l'ont fait depuis H. Weber, M. Nœther et K. Weierstrass), et, d'autre part, parce que, s'occupant beaucoup de la théorie des courbes, de celle des formes et de l'arithmétique supérieure, elle ne nous paraît ni naturelle ni simple. En partant de la vraie source — de l'équation fondamentale, elle ne suit pas la voie directe vers les fonctions-thêta, auxquelles de plus elle n'arrive pas, — mais dévie de cette route tantôt dans l'arithmétique, tantôt dans la géométrie. La notion même de « diviseur » ne nous paraît ni claire ni naturelle mais tout à fait étrangère.

On voit, par cet aperçu rapide, que chacune des cinq méthodes

de la théorie possède des inconvénients, plus ou moins grands, grâce auxquels la théorie des intégrales abéliennes est devenue très difficile à apprendre et en même temps ne donne pas soit par les restrictions, soit par des complications, une satisfaction complète au lecteur, tout en exigeant de lui beaucoup de travail superflu l'entraînant dans des régions étrangères à la théorie. Mais le même aperçu indique aussi dans quelle direction il faut chercher la vraie théorie : c'est Weierstrass qui s'en est le plus rapproché ; mais M. Nœther dans la partie algébrique a fait encore un pas important en avant, en rendant à l'algèbre ce qui est son droit et son devoir.

La vraie théorie doit partir de l'équation irréductible fondamentale, définissant l'irrationalité tout à fait générale, dont dépend l'intégrale abélienne considérée, et étudier par les moyens algébriques la fonction implicite $y$ de $x$, définie par cette équation, et son discriminant, lequel joue ici un rôle important ; elle doit donner le moyen de déterminer le genre de cette fonction au moyen d'opérations rationnelles. C'est ici qu'on est conduit naturellement à la surface de Riemann la plus simple et la plus générale, dont le secours dans cette théorie est précieux. Puis elle doit étudier des fonctions rationnelles de $x$ et $y$, qui figurent dans les intégrales abéliennes, et parmi elles plus spécialement les fonctions adjointes des trois espèces, et montrer la réduction de la fonction générale à ces dernières — autrement dit — sa décomposition en éléments simples (l'analogue de celle des fractions rationnelles) ; ensuite en déduire l'identité fondamentale de Weierstrass ; donner aussi les moyens rationnels pour trouver les adjointes. Alors la partie transcendante sera bien préparée et ne présentera pas de difficultés. (C'est Weierstrass qui le premier a exprimé la pensée que l'étude circonstanciée des fonctions algébriques doit précéder l'étude de leurs intégrales). On aura de suite les deux formes de la décomposition en éléments simples de l'intégrale abélienne générale. En intégrant l'identité fondamentale suivant les courbes fermées $A_h$ et $B_h$ ($h = 1, 2, \ldots, p$), on arrive aux relations entre les périodes des intégrales de première et de deuxième espèce de Weierstrass et de Riemann, qui jouent un grand rôle dans cette théorie ; en intégrant suivant une courbe non fermée, on arrive aux fonctions primaires. De là un pas vers la décomposition d'une fonction algébrique en produit de fonctions primaires, dont le célèbre théorème d'Abel n'est qu'un simple corollaire d'après Weierstrass. Ce théorème, appliqué aux intégrales de première espèce, conduit naturellement aux problèmes algébriques qui ont transporté les considérations et le langage géométriques dans la théorie des intégrales abéliennes, en adoptant aussi pour leurs différentielles la forme homogène d'Aronhold. De cette manière ils ont fait dépendre la théorie des inté-

grales abéliennes de celle des courbes algébriques. Si du cas simple, considéré par eux, où la courbe fondamentale n'a d'autres singularités que des points doubles et des points de rebroussement, on passe au cas général des singularités quelconques, on doit quitter l'étude des intégrales pour aborder l'étude des théories géométriques de rang plus élevé (comme on peut le voir par le livre de Clebsch-Lindemann). C'est ce que Clebsch prévoyait déjà en 1870, lorsqu'il disait à M. P. Mansion que « malgré les apparences contraires, sa méthode et celle de Riemann avaient moins d'avenir que celle de Weierstrass »[1], c'est-à-dire qu'il ne pensait pas qu'on pouvait aller très loin dans le développement de la théorie des intégrales abéliennes ni par sa méthode, ni par celle de Riemann, mais que cela réussirait probablement par la méthode de Weierstrass.

Cependant H. Weber a poussé la théorie de Riemann en ses deux mémoires (tome 70 du Journal de Crelle) vers celle de Clebsch, très perfectionnée par M. Nœther (dans la partie algébrique d'abord avec M. Brill), qui l'a rapprochée à son tour beaucoup de celle de Weierstrass, c'est-à-dire dans la direction prévue par Clebsch.

4. — La théorie de Weierstrass aurait plus de droit que toutes celles considérées ci-dessus au titre de vraie théorie, car elle part de la vraie source — de l'équation fondamentale tout à fait générale, traite la partie algébrique avant la partie transcendante, et déduit d'une manière très simple et naturelle toute la théorie, d'une identité algébrique, — s'il ne la subordonnait pas à sa théorie générale des fonctions analytiques, en employant toujours dans ses démonstrations les développements en séries convenables pour l'endroit considéré de l'image algébrique (algebraisches Gebilde), ce qui n'est pas un mal au point de vue de l'unité de l'exposition, mais la rend souvent longue et lourde. Il vaudrait mieux démontrer geometrica geometrice, algebraica algebraice, analytica analytice, comme on le voit, en confrontant les recherches de M. Nœther dans ses 4 notes d'Erlangen (1884), avec les leçons de Weierstrass ; c'est ce que j'ai eu le bonheur de faire la même année au séminaire mathématique de l'Université de Leipzig. C'est là que m'est venue alors une première idée d'une nouvelle exposition de la théorie des intégrales abéliennes.

5. — La théorie de Dedekind et Weber étant alors (1884) représentée par leur mémoire, l'est maintenant avec tous les développements pour la partie algébrique (avec les applications à la théorie des courbes algébriques) et pour la partie transcendante jusqu'à l'introduction des thêtas exclusivement, dans le livre de MM. K. Hensel et G. Landsberg. Intéressante et conçue d'un point de

[1] V. *Revue des Questions scientifiques*, 20 octobre 1912, troisième série, t. XXII, p. 606.

vue élevé, elle subordonne la théorie des intégrales abéliennes aux conceptions de Jacobi. Appliquée aux intégrales de deuxième espèce et de troisième espèce, elle conduit naturellement, comme l'ont montré d'une part Clebsch et M. Nœther et d'autre part Weierstrass, à une fonction intermédiaire, menant à la définition simple de la fonction thêta, par la considération d'un cas particulier du théorème d'Abel, définition de laquelle on tire aisément ses propriétés principales et son développement en série d'exponentielles. Dans cet ordre tout se trouve à sa place, comme résultat naturel de ce qui le précède; c'est l'ordre qui répond à l'état actuel de la science, et c'est celui qu'il est recommandable de suivre maintenant dans l'enseignement, si l'on veut attirer à l'étude de cette belle théorie le plus grand nombre possible d'étudiants. Cette voie naturelle et simple malgré une généralité complète, est la plus brève, la plus élégante, et par conséquent la plus capable de donner satisfaction en préparant plus vite aux questions plus élevées et plus difficiles que des éléments qu'il est temps à tous les mathématiciens de connaître, comme cela était le cas au siècle passé pour les intégrales elliptiques.

C'est pour faciliter la réforme dans l'enseignement des éléments de la théorie des intégrales abéliennes, — réforme demandée par l'état actuel de la science, — que j'ai composé mon livre sous le même titre[1].

M. Tikhomandritsky (St-Pétersbourg).

---

[1] *Eléments de la théorie des intégrales abéliennes.* Nouvelle édition, revue, corrigée, complétée de notes et en partie refaite entièrement. St-Pétersbourg, 1911 (8° de XV-286 p.), à la librairie de *Eggers & Ce*, St-Pétersbourg (Russie), Moïka, 42. [Nous analyserons cet ouvrage dans un prochain numéro. — *Réd.*]

# PRI LA FUNKCIA EKVACIO
## $f(x+y) = f(x) + f(y)$

1. — Jam de longe, Cauchy pruvis ke *kontinua* funkcio $f(x)$ kiu verigas la funkcian ekvacion

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

kiuj ajn estu la nombroj $x$, $y$, necese estas homogena, unuagrada funkcio $f(x) \equiv Ax$.

Poste, oni pruvis la saman teoremon, farinte hipotezojn pli larĝajn ol la kontinueco de $f(x)$ [1]. Ekzemple, S[ro] Darboux nur supozis ke $f(x)$ havas superrandon sur finita segmento.

2. — Nun mi intencas *pruvi la saman teoremon, nur supozante ke* f(x) *estas analitike esprimebla sur iu finita segmento.* Tio signifas, laŭ S[ro] Lebesgue, ke ĝi povas esti konstruata per finita nombro aŭ komputebla aro da adicioj, multiplikoj, allimiradoj faritaj sinsekve laŭ difinita leĝo, komence per la varianto kaj konstantoj. Tiu nocio estas ĝeneralega [2].

Mi utilos la econ, montratan de S[ro] Lebesgue [3], ke ĉiu analitike esprimebla funkcio $f(x)$ estas « mezurebla », t.e. ke la punktoj kie $a \leq f(x) < b$, formas aron mezureblan kiuj ajn estu la nombroj $a$, $b$. Aliparte, aro E da punktoj sur $(a, b)$ estas mezurebla, kiam $b - a$ estas la sumo de la malsuperrando (nomata mezuro de E) de la tuta longeco de aro de segmentoj entenantaj E, kaj de la simila nombro kiu koncernas la aron de la punktoj de $(a, b)$ kiuj ne apartenas al E.

3. — Do, ni nur supozas nun ke $f(x)$ estas mezurebla funkcio sur $(a, b)$, kiu ĉie verigas la funkcian ekvacion

$$f(x) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

[1] Vidu ekzemple S. Pincherle, *Calcul fonctionnel*, Encyclopédie des Sciences mathématiques, éd. franç.

[2] Ekzemple, la funkcio kiu estas nula kiam la varianto estas racionala, kaj egalas unu alie, estas analitike esprimebla, egalante

$$\lim_{m=\infty} \left[ \lim_{n=\infty} (\cos m!\, x)^{2n} \right].$$

[3] H. Lebesgue. *Sur les fonctions représentables analytiquement.* Journal de Mathématiques, 1908.

Oni tuj vidas, ke $f(0) = 0$, kaj, per klasika metodo ke

(2) $$f(rx) = rf(x)$$

kiam $r$ estas racionala nombro ($> 0, < 0, = 0$). Nun se $f(x)$ ne estas la evidenta solvo $f(x) \equiv 0$ de (1), ekzistas certe nombro $c \neq 0$, tia ke $f(c) \neq 0$. Oni do havas

$$f(x) = \frac{x}{c} f(c)$$

kiam $\frac{x}{c}$ estas racionala. Se ni skribas $X = \frac{x}{c}$, $A = \frac{f(c)}{c}$ la funkcio

$$F(X) = f(cX) - Xf(c) = f(x) - Ax$$

estas evidente funkcio mezurebla, kiu verigas la funkcian ekvacion

$$F(X + Y) = F(X) + F(Y)$$

kiel $f(x)$, *sed kiu estas nula kiam* X *estas racionala.*

La teoremo estos pruvita kiam mi estos montrinta ke $F(X)$ estas ĉie nula.

4. — En kontraŭa okazo, kiam ekzistus nombro $X_0 \neq 0$, por kiu $F(X_0) \neq 0$, ni rimarkigos unue, ke en tre mallonga segmento, $F(X)$ alproksimiĝas al iu ajn nombro. Pli precize, estu $k$ iu nombro, kaj estu $\varepsilon$, $\eta$ du nombroj pozitivaj: ekzistas certe nombro X tia ke, ekzemple

(3) $$0 < X < \eta \,, \qquad k - \varepsilon < F(X) < k \,.$$

Fakte, ni povas elekti racionalan nombron $r$ tiel ke

$$k - \varepsilon < r \,.\, F(X_0) < k \,.$$

Poste; ni povas elekti racionalan nombron $r'$, por kiu

(5) $$- rX_0 < r' < - rX_0 + \eta \,.$$

Nun

$$F(r' + rX_0) = F(r') + F(rX_0) = rF(X_0) \,.$$

Kaj sufiĉas preni $X = r' + rX_0$ por ricevi (3)[1].

5. — Ni nun uzu la hipotezon ke $F(X)$ estas mezurebla en $(a, b)$. La aro $E_{\alpha,\beta}$ kie, en $(a, b)$, $\alpha \leq F(X) < \beta$ havas do mezuron, ni nomu ĝin $mE_{\alpha,\beta}$. Ni estas tuj montronte ke

(6) $$E_{n,\, n+1} = E_{p,\, p+1} \,,$$

kiuj ajn estu $n$, $p$.

---

[1] Samtempe la malegalecoj (3) pruvas ke, se, laŭ la hipotezo de S^ro^ DARBOUX, $f(x)$ — mezurebla aŭ ne — havas randojn finitajn, $F(X) \equiv 0$, do $f(x) \equiv Ax$.

Tio suficos por pruvi la teoremon, ĉar, ĉiu punkto de $(a, b)$ apartenas al unu el la aroj $E_{n, n+1}$ kie $n$ estas entjero, kaj sekve

$$b - a = (mE_{0,1} + mE_{-1,0}) + (mE_{1,2} + mE_{-2,-1}) + \cdots$$
$$+ (mE_{n,n+1} + mE_{-n-1,-n}) + \cdots .$$

Sed, ĉar ĉiuj parentezoj estas egalaj, laŭ (6), la dekstra membro do, ne povus konverĝi al $(b - a)$.

6. — Por ricevi (6), ni rimarku, ke laŭ (3), kiu ajn estu la entjero $q > 0$, oni povas trovi $X_q$ tiel ke

$$0 < X_q < \frac{1}{q}, \qquad p - n - \frac{1}{q} < F(X_q) < p - n .$$

Kiam $X_q$ ne ŝanĝas, kaj, aliparte, X trakuras $E_{n, n+1}$, la punktoj $Y = X + X_q$ trakuras aron mezureblan G sur kiu

$$a < Y < b + \frac{1}{q} \qquad p - \frac{1}{q} < F(X) < p + 1 .$$

Ni nomu H, K, la aroj de la punktoj de G sur kiuj

$$a < Y < b ; \qquad b \leqq Y \leqq b + \frac{1}{q} .$$

La unua estas parto de la mezurebla aro $E_{p-\frac{1}{q}, p+1}$, la dua estas parto de la segmento $\left(b, b + \frac{1}{q}\right)$. Do

$$mE_{n, n+1} = mG \leqq mE_{p-\frac{1}{q}, p+1} + \frac{1}{q}$$

aŭ

(7) $$mE_{n, n+1} - mE_{p, p+1} \leqq mE_{p-\frac{1}{q}, p} + \frac{1}{q} .$$

La nombroj $n$, $p$ ne dependas de $q$. Kiam $q$ kreskas senfine, la dua membro de (7) konverĝas ankaŭ al nulo[1]. Do,

$$mE_{n, n+1} \leqq mE_{p, p+1} .$$

[1] Ni skribis ke $E_{p-\frac{1}{q}, p}$ konverĝas al nulo kun $\frac{1}{q}$, ĉar $E_{p-\frac{1}{2}, p}$ estas sumo de

$$E_{p-\frac{1}{2}, p-\frac{1}{3}}, \quad E_{p-\frac{1}{3}, p-\frac{1}{4}}, \quad \ldots \quad E_{p-\frac{1}{q}, p-\frac{1}{q+1}}, \ldots$$

do la rajo

$$mE_{p-\frac{1}{2}, p-\frac{1}{3}} + mE_{p-\frac{1}{3}, p-\frac{1}{4}} + \cdots + mE_{p-\frac{1}{q}, p-\frac{1}{q+1}}, \ldots$$

konverĝas kaj la resto $E_{p-\frac{1}{q}, p}$ de la rajo devas konverĝi al nulo kun $\frac{1}{q}$.

Same

$$mE_{p,\,p+1} \leq mE_{n,\,n+1}$$

fine

$$mE_{p,\,p+1} = mE_{n,\,n+1} \,.$$

7. — Mi jam alie pruvis[1], ke la kontinuaj funkcioj kiuj verigas la funkcian ekvacion

$$(8) \qquad f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}) - \sum_1 f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n}) + \sum_2 f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_{n-1}}) + \dots + (-1)^{n+1} f(0) = 0$$

estas $n$-gradaj polinomoj, — kaj reciproke[2]. La pruvo starigis sur la teoremo de Cauchy pri la funkcia ekvacio (1). Oni nun vidas ke la teoremo, supre citita, koncerne (8), estos ankoraŭ vera kiam oni ne plu supozas ke $f(x)$ estas kontinua, sed ke ĝi estas mezurebla — aŭ analitike esprimebla — en iu segmento eĉ tre malgranda, aŭ ankaŭ, ke ĝi estas randebla en tiu-ĉi segmento.

M. Fréchet (Poitiers).

---

[1] Une définition fonctionnelle des Polynômes (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1909, 4i série, t. IX).

[2] La skribsigno $\sum_p$ signifas la sumon de ĉiuj $f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_p})$ kie $i_1, i_2, \dots i_p$ estas ia kombinaĵo el la nombroj $1, 2, \dots, n+1$.

# COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

*Congrès de l'enseignement mathématique; Paris, 6-8 avril 1914.*

---

## TRAVAUX PRÉPARATOIRES

La Commission Internationale de l'Enseignement mathématique se réunira à Paris, du 6 au 8 avril 1914, en un Congrès qui aura principalement pour objet l'étude des deux questions suivantes concernant, l'une l'enseignement moyen, l'autre l'enseignement supérieur.

A. — *Les résultats obtenus dans l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement moyen.* Conférences et discussions. Rapporteur général : M. le Prof. E. Beke (Budapest).

Sans parler ici des essais antérieurs ou des tentatives isolées, nous rappelons que ces notions ont été introduites officiellement dans les programmes français des Lycées, en 1902, sous le titre de « *calcul des dérivées et des fonctions primitives* ». Le mouvement s'est ensuite propagé dans d'autres pays. En raison de l'importance de la question, le Comité central a estimé, qu'après une expérience de plus de dix ans, il convenait d'examiner les méthodes suivies et les résultats obtenus dans les divers pays.

La discussion sera basée sur un rapport général qui va être rédigé par M. le professeur E. Beke (Budapest), avec le concours d'une sous-commission comprenant des représentants des principaux pays. Les renseignements nécessaires seront réunis à l'aide d'un questionnaire, dont on trouvera ci-après le texte dans les quatre langues adoptées par les Congrès internationaux de mathématiciens.

B. — La seconde question donnera un aperçu *de la place et du rôle des mathématiques dans l'enseignement technique supérieur*. Rapporteur général : M. le Prof. P. STAECKEL.

Le questionnaire ci-dessous donne dès maintenant une idée du plan général de la discussion. Le rapport sera établi par M. le Prof. P. STAECKEL (Heidelberg), qui a enseigné successivement dans les Ecoles techniques supérieures de Hanovre et de Carlsruhe. Comme pour la question A, une sous-commission fournira au rapporteur les renseignements concernant les principaux pays.

Il va sans dire qu'il n'était pas possible d'élaborer un questionnaire s'adaptant exactement aux établissements des divers pays. Chaque délégation prendra dans ces deux questionnaires ce qu'elle juge utile, en le rédigeant éventuellement à nouveau suivant l'organisation locale.

Le programme général du Congrès de Paris, ainsi que les deux questionnaires ont été arrêtés par le Comité central dans une réunion tenue à Heidelberg du 21 au 23 juillet 1913 et à laquelle assistaient en outre les rapporteurs, MM. BEKE et STAECKEL, et M. C. BOURLET, qui avait bien voulu accepter de se charger de l'organisation matérielle du Congrès.

Un accident tragique vient de nous priver de notre éminent collègue français. M. Carlo BOURLET a succombé, le 12 août, à Annecy, aux suites d'un accident. Sa mort sera vivement ressentie dans notre Commission, qui perd en lui l'un de ses membres les plus actifs et les plus distingués. Que MM. les membres de la Sous-Commission française reçoivent ici l'expression de notre profonde sympathie.

Par suite de la mort subite de M. Bourlet, les travaux préparatoires concernant l'organisation du Congrès subiront nécessairement quelque retard ; le programme détaillé ne pourra être publié qu'à la fin de l'automne. Toutefois nous pouvons annoncer dès maintenant qu'en dehors des réunions préparatoires destinées aux membres de la Commission et des sous-commissions A et B, le programme prévoit :

1) *deux séances publiques* consacrées, l'une à l'objet A, l'autre à l'objet B ;

2° *des séances de discussions* réservées aux membres du Congrès. Les conditions de l'inscription en qualité de congressiste seront annoncées dans le programme général.

Août 1913. Pour le Comité central :
*Le Président,* F. KLEIN, Gœttingue;
*Le Secrétaire-général,* H. FEHR, Genève.

## QUESTIONNAIRE A

### Questionnaire pour la Sous-Commission A sur l'introduction des premières notions de Calcul différentiel et intégral dans les Ecoles moyennes.

*Remarques préliminaires.* — 1. Le Comité central pose ces questions de manière à être renseigné sur les matières et la méthode d'exposition de cet important chapitre du plan d'études de l'enseignement moyen. Il tient à rappeler à nouveau qu'il ne prend pas parti pour une tendance déterminée, mais qu'il se propose avant tout de mettre en lumière les divers points de vue et les résultats obtenus.

2. — Nous entendons par écoles moyennes les établissements de l'enseignement secondaire supérieur désignés sous les noms de lycées, gymnases classiques ou réaux, ou établissements similaires des divers pays. Il serait utile d'avoir aussi des renseignements sur ce qui se fait dans les écoles normales d'instituteurs, s'il y a lieu.

I. — *Dans quelle mesure a-t-on introduit les premiers éléments de Calcul différentiel et intégral dans les écoles moyennes de votre pays ?*

Nous désirons notamment être renseignés sur les points suivants :

*a)* Le Calcul différentiel est-il limité aux fonctions d'une variable ou considère-t-on aussi des fonctions de plusieurs variables ?

*b)* Quelles sont les fonctions auxquelles on applique le Calcul différentiel ?

*c)* Fait-on du Calcul intégral ? si oui, suivant quel programme ?

*d)* Expose-t-on le théorème de Taylor ?

*e)* Résout-on des équations différentielles simples ? Lesquelles ?

II. — *Quel est le degré de rigueur dont on fait usage dans l'introduction des concepts fondamentaux et dans les démonstrations ?*

*a)* Se contente-t-on d'une introduction géométrique au Calcul

différentiel, sans adopter d'une façon expresse la notion de limite, ou utilise-t-on cette notion ? Dans l'affirmative, est-ce que l'on présente une démonstration rigoureuse, ou envisage-t-on comme évidents des théorèmes tels que celui-ci : $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$ ?

*b)* Fait-on usage des différentielles ? Dans l'affirmative présente-t-on le Calcul différentiel comme une sorte de calcul approximatif, ou calcule-t-on avec des infiniment petits comme avec des grandeurs existant effectivement ?

*c)* Dans le théorème de Taylor tient-on compte du reste, ou non ?

*d)* Signale-t-on l'existence de fonctions non dérivables ?

*e)* La notion de nombre irrationnel est-elle présentée sous une forme rigoureuse, ou se contente-t-on de parler seulement occasionnellement des nombres irrationnels, par exemple à l'occasion du calcul des racines ?

III. — *Quelles sont les considérations méthodiques que l'on suit dans l'introduction au Calcul différentiel et intégral ?*

*a)* Cette introduction est-elle déjà préparée dans les classes précédentes par une étude appropriée des fonctions simples et de leur représentation graphique, de manière que ces nouvelles matières ne constituent pas un supplément au programme, mais comme un chapitre qui se rattache étroitement à ce qui a déjà été vu.

*b)* Emploie-t-on la notation différentielle de Leibniz, ou bien les dérivées et les intégrales sont-elles désignées autrement ?

*c)* Commence-t-on l'exposé par le Calcul différentiel ou par le Calcul intégral, ou étudie-t-on simultanément les deux ?

*d)* L'intégrale est-elle présentée comme limite d'une somme (intégrale définie) ou comme fonction primitive (intégrale indéfinie) ? Si l'on fait les deux, dans quel ordre et dans quel lien expose-t-on ces deux notions ?

*e)* Fait-on usage d'un manuel ? Quels sont les ouvrages caractéristiques dont on tient compte ? (Indication complète du titre, de l'éditeur et de l'édition).

IV. — *Quelles sont les applications du Calcul différentiel et intégral que l'on donne dans ce premier enseignement ?* Telles questions d'analyse, de géométrie ou de physique utilisant la notion de limite et qui, par leur importance, se trouvaient déjà partiellement ou entièrement introduites dans l'enseignement, sont-elles maintenant attachées directement à l'étude du Calcul différentiel et intégral, de manière à obtenir un exposé plus économique des matières à étudier ?

Nous signalons notamment les points suivants :

*a)* La théorie des maxima et minima.

*b)* Si l'on étudie la série de Taylor, quelles sont les fonctions dont on fait le développement en série entière ?

*c)* Au cas où l'on tient compte du reste dans la série de Taylor, fait-on usage des séries entières pour l'interpolation, l'extrapolation ou pour le Calcul des erreurs ?

*d)* Au cas où l'on étudie le Calcul intégral, applique-t-on celui-ci au calcul des aires (par exemple de la parabole, de l'ellipse) et au calcul des volumes ?

*e)* Pour quels concepts fondamentaux de la Mécanique, (vitesse, accélération, travail, moment d'inertie, etc.) fait-on usage du Calcul différentiel et intégral ?

*f)* De la même manière en Physique, en particulier pour l'optique (courbes enveloppes, etc) et en Électrodynamique (lignes de force, etc).

V. — *L'introduction du Calcul différentiel et intégral a-t-elle amené un allègement du plan d'études en supprimant d'autres théories ? Dans l'affirmative, de quelle manière ?*

VI. — *Quels sont les résultats obtenus par l'introduction du Calcul différentiel et intégral ? Est-elle reconnue comme une réforme nécessaire ? Dans quelle mesure rencontre-t-elle de l'approbation ou de l'opposition ?* En particulier quelle est l'opinion des représentants des mathématiques et de la physique ?

Si vous avez à signaler d'autres observations ou remarques concernant l'enseignement du Calcul différentiel et intégral, veuillez en faire mention dans votre réponse à cette place.

Quels sont les passages des rapports publiés par votre sous-commission concernant la question de l'enseignement du Calcul différentiel et intégral ?

N. B. — On est prié d'adresser les réponses à ce questionnaire, avant le 1er décembre 1913, au Rapporteur général, M. le Professeur E. Beke, Bimbó uteza, 26, Budapest, II. — Prière de n'écrire que d'un seul côté de la feuille.

Le rapport sera présenté au Congrès de Paris en août 1914.

## Fragebogen für die Subkommission A betreffend die Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung in die höheren Schulen.

*Vorbemerkungen.* 1. — Das Zentralkomitee stellt diese Fragen, darunter mehrere Grenzfragen, um im Einzelnen zu erfahren, welcher Stoff aus der Diff. und Integralrechnung durchgenommen und in welcher Weise bei der Behandlung dieses neuen, für die mathematische Reform wichtigsten Gegenstandes verfahren wird. Das Zentralkomitee will nicht unterlassen, wiederholt zu erklären, dass es selbst nicht einen bestimmten Standpunkt bei diesen Fragen zu vertreten hat, sondern nur die wirklich vorliegenden Verhältnisse klar zu stellen wünscht.

2. — Unter höheren Schulen verstehen wir zunächst die Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen, Lyzeen und ähnlichen Schulen der verschiedenen Länder. Es ist auch erwünscht, über Seminare für Volksschullehrer (Ecoles normales primaires) etwaige Auskunft zu bekommen.

I. — *In welchem Umfange hat man Differential- und Integralrechnung in dem Lande, über das Sie berichten, in die höheren Schulen eingeführt ?*

Es ist jeweilig anzugeben, in welchen Arten von höheren Schulen (gymnasiale, reale) die genannten Gebiete betrieben werden ; und zwar, ob nach amtlichem Lehrplan oder in der Weise, dass es dem Lehrer anheimgestellt bleibt (in diesem letzteren Falle ist Angabe des ungefähren Prozentsatzes der Schulen, in denen die Infinitesimalrechnung betrieben wird, erwünscht). Werden alle Schüler in diesen Gebieten unterrichtet oder nur einige irgendwie ausgewählte Schüler ?

Insbesondere sind die Fragen zu beantworten :

*a)* Begnügt man sich in der Differentialrechnung mit Funktionen einer Variablen oder werden auch Funktionen mehrerer Variablen behandelt ?

*b)* Auf welche Funktionen wird die Differentialrechnung angewandt ?

*c)* Wird Integralrechnung getrieben ? Wenn ja, in welchem Umfange ?

*d)* Wird der Taylorsche Satz behandelt ?

*e)* Werden einfache Differentialgleichungen gelöst ? Welche ?

II. — *Welcher Grad von Strenge wird bei der Einführung und Behandlung der Begriffe erstrebt ?*

*a)* Begnügt man sich mit einer geometrischen Einführung in die Differentialrechnung, ohne den Grenzbegriff ausdrücklich zu benutzen, oder wird der Grenzbegriff benutzt? Wenn ja, wird eine strenge Beweisführung versucht, oder nimmt man Sätze wie $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$ als selbstverständlich an ?

*b)* Werden Differentiale benutzt ? Wenn ja, wird die Differentialrechnung ohne strenge Ableitung im einzelnen als eine Art Approximationsrechnung behandelt oder wird mit unendlich kleinen Grössen in methaphysischer Weise wie mit wirklich existierenden Grössen gerechnet ?

*c)* Wird beim Taylorschen Satz das Restglied berücksichtigt oder nicht ?

*d)* Wird darauf hingewiesen, dass es auch nicht differenzierbare Funktionen gibt ?

*e)* Wird eine strenge Einführung in den Begriff der Irrationalzahl gegeben oder begnügt man sich damit, bei Gelegenheit (Wurzelrechnung) von irrationalen Zahlen zu sprechen ?

III. — *Welche methodische Gesichtspunkte werden bei der Einführung der Differential- und Integralrechnung befolgt?*

*a)* Wird der Einführung durch eine geeignete Lehre der Funktionen und der graphischen Darstellungen schon in mittleren Klassen vorgearbeitet, so dass der neue Stoff nicht als eine Ergänzung dem bisherigen Lehrstoff angefügt, sondern in den früheren Lehrstoff eingearbeitet wird?

*b)* Werden die Leibnizschen Symbole benutzt, oder werden die Differentialquotienten und Integrale in irgend einer Weise umschrieben und wie?

*c)* Was wird zuerst behandelt, Differentialrechnung oder Integralrechnung, oder werden beide gleichzeitig gebracht?

*d)* Wird das Integral als Grenze einer Summe (bestimmtes Integral) oder als primitive Funktion (unbestimmtes Integral) eingeführt, und wenn beides, in welcher Reihenfolge und in welchem Zusammenhang miteinander?

*e)* Wird ein Lehrbuch beim Unterricht in der Differential- und Integralrechnung benutzt? Welches sind die charakteristischen Lehrbücher, die hier in Betracht kommen? (Genaue Angabe von Titel, Verlag und Auflage!)

IV. — *Welchen Geltungsbereich gibt man der Differential- und Integralrechnung?* Werden solche Fragen der Analysis, der Geometrie oder der Physik, die den Grenzbegriff benutzen, und die wegen ihrer Wichtigkeit schon immer, oder doch vielfach, dem Schulunterricht eingefügt waren, jetzt an die zusammenhängende Lehre der Differential- und Integralrechnung angeschlossen, sodass damit eine ökonomischere Behandlung des bisherigen Lehrstoffes herbeigeführt wird? Insbesondere :

*a)* Die Lehre von den Maximis und Minimis?

*b)* Im Falle, dass die Taylorsche Reihe behandelt wird, welche Funktionen werden in Potenzreihen entwickelt?

*c)* Im Falle, dass die Taylorsche Reihe mit Restglied behandelt wird, werden die Potenzreihen zur Inter- und Extrapolation und zur Fehlerrechnung benutzt?

*d)* Im Falle, dass die Integralrechnung behandelt wird, wird sie zur Flächenberechnung (z. B. der Parabel, Ellipse) und zur Inhaltsberechnung benutzt?

*e)* Bei welchen Grundbegriffen der Mechanik (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Arbeit, Trägheitsmoment u. s. f.) wird die Differential- und Integralrechnung benutzt?

*f)* Entsprechend für die Physik, also für die Optik (Umhüllungskurven u. s. f.), für die Elektrodynamik (Kraftlinien u. s. f.)

V. — *Ist bei der Einführung der Differential- und Integralrechnung in den Unterricht eine Entlastung des Lehrstoffes von anderen Stoffen eingetreten? Wenn ja, von welchen?*

VI. — *Welches sind die Ergebnisse der Einführung der Differen-*

*tial und Integralrechnung? Empfindet man sie als einen entschiedenen Fortschritt? In welchem Masse findet sie Zustimmung und Widerspruch im allgemeinen?* Wie im besonderen stellen sich die Vertreter der Mathematik und auch der Physik in dieser Hinsicht?

Sollten Sie noch von anderen eigenartigen und befolgenswerten Einzelheiten des Unterrichtsganges in der Differential- und Integralrechnung Kenntnis haben, so wird ersucht, solche in Ihrem Referate zu erwähnen.

An welchen Stellen der IMUK-Abhandlungen Ihres Landes findet man zusammenhängende Ausführungen über die Frage der Differential- und Integralrechnung?

N. B. — Man bittet dringend, die Antwort auf den Fragebogen bis spätestens zum 1. Dezember 1913 an den Haupt-Berichterstatter Herrn Prof. Dr. E. BEKE, Bimbó utcza, 26, Budapest II, zu senden. — Es wird gebeten, bei den Antworten nur eine Seite der Bogen zu beschreiben.

Der Bericht wird im April 1914 zu Paris erstattet werden.

## Questions proposed by the Sub-Commission A, with regard to the position now occupied by the Elements of Differential & Integral Calculus in the programmes of Public & Secondary Schools.

*Note* 1. — The object of the Central Committee in formulating these inquiries has been solely that of acquiring information. The Committee does not itself take up any definite standpoint in the matter as to how far the teaching of the subject in the schools is desirable.

2. — By the term « Public & Secondary Schools » is to be understood those Day & Boarding Schools which correspond to the French Lycées & the German Gymnasia and Real-Gymnasia. Information is however also desired, whenever possible, with regard to what is being done in the Teachers' Training Colleges. The particular type or types of school in the district considered should always be mentioned, & it should be stated whether the Calculus is part of the official curriculum, or included, or not, at the option of the individual teacher. The percentage of schools in which the Calculus is taught should also be given. It should also be mentioned whether all the pupils are taught the subject, or only some of the more advanced ones.

I. — *How much of the Differential & Integral Calculus is taught in the Schools of the country under observation?*

In particular.

*a*) Is the Differential Calculus applied only to functions of a single variable, or are functions of several variables also treated?

*b*) To what specific functions is the Differential Calculus applied?

*c*) Is the Integral Calculus studied? If so, within what limits?

*d*) Is Taylor's Theorem discussed?

*e*) Are simple Differential Equations solved? If so, what?

II. — *How far is the treatment of the subject rigid, both as to the mode in which the fundamental concepts are introduced, & as to the demonstrations employed?*

*a*) Is it considered sufficient to introduce the notions of the Differential Calculus geometrically, without expressly using the idea of a limit, or is this idea explicitly employed? In the latter case, is there an attempt at a rigid presentation of the subject, or are theorems like $\text{Lt.}\,\frac{1}{a} = \frac{1}{\text{Lt.}\,a}$ taken for granted?

*b*) Are differentials used? If so, is the Differential Calculus employed as a sort of calculus of approximations, or are infinitely small quantities treated as if they were small quantities which really exist?

*c*) In Taylor's Theorem is the remainder considered, or not?

*d*) Is attention called to the fact that there are non-differentiable functions?

*e*) Is the idea of an irrational number logically & systematically introduced, or is it considered sufficient to speak incidentally of irrational numbers, for instance in the extraction of square roots?

III. — *How is the pupil introduced to the ideas of the Differential & Integral Calculus?*

*a*) Does he receive a preliminary training in the lower classes of the school, based on the study of appropriate simple functions & their graphs, so that the new matter appears to arise naturally out of the subjects already studied & not to constitute a supplementary course?

*b*) Is Leibniz's notation employed? If not, what symbols are used for the differential coefficient & integral?

*c*) Which is considered first, the Differential or the Integral Calculus, or are they taught simultaneously?

*d*) Is the integral introduced as the limit of a summation (definite integral), or as primitive function (inverse differential coefficient)? If in both senses, in what order & in what connection with one another are the two points of view considered?

*e*) Is a text-book used? If so, the exact title, publisher & edition should be quoted.

IV. — *What applications of the Differential & Integral Calculus are considered?*

What questions of analysis (Higher Algebra & Trigonometry),

geometry or physics involving the idea of a limit, otherwise wholly or partially present in the programmes of the schools are utilised to illustrate & explain the Differential & Integral Calculus, so that there may be an economy in the treatment of the subjects studied?

In particular

*a*) Is the Calculus applied to the theory of maxima & minima?

*b*) When Taylor's Theorem is considered, what are the functions whose developments in power series are obtained by means of it.

*c*) In the cases where the remainder form of Taylor's Theorem is discussed, are power series used for purposes of interpolation, extrapolation & the calculation of errors?

*d*) When the Integral Calculus is taught, is it applied to the calculation of areas (in the cases, for instance, of the parabola & ellipse), & of volumes?

*e*) In connection with what fundamental concepts of Mechanics (velocity, acceleration, work, moment of inertia, etc.) is use made of the Differential & Integral Calculus?

*f*) The corresponding questions for Physics, & in particular for Optics (curves envelopes, etc.) & for Electrodynamics (lines of force, etc.) should be answered.

V. — *Has the introduction of the Differential & Integral Calculus been at the expense of other branches of study? If so, of which?*

VI. — *What has been the result of the recent introduction of the Differential & Integral Calculus into the school programmes? Is the introduction felt to have been an inevitable advance? How far has it found support, or the contrary?* In particular what is the attitude of mathematicians & physicists towards the innovation?

Should any other details of interest concerning the teaching of the Differential & Integral Calculus have come to the knowledge of the observer, it is requested that they may be chronicled at this stage of the report.

A list should also be made of the passages in the reports published by the sub-commission in the country in question which relate to the teaching of the Differential & Integral Calculus.

N. B. — Answers to these questions are requested to be sent before December 1st, 1913, to the Reporter-in-Chief, Professor Dr. E. Beke, Bimbó utcza, 26, Budapest II. — Please only write on one side of the paper.

The Report is to be presented in April 1914 at Paris.

## Questionario per la Sottocommissione A concernente la introduzione degli elementi del calcolo differenziale e integrale nelle scuole medie.

*Osservazione preliminare.* — 1. Il Comitato Centrale propone le questioni seguenti. Il Comitato insiste nel dichiarare che esso non ha da sostenere una determinata tesi in proposito, ma desidera solo di porre in luce le questioni che effettivamente si presentano.

2. Per scuole medie intendiamo i licei classici e moderni, gli Istituti tecnici, e simili scuole. Si desidera qualche notizia anche sulle scuole normali.

I. — *Entro quali limiti viene introdotto l'insegnamento del calcolo differenziale e integrale nelle scuole medie del paese intorno al quale Ella riferisce?*

Si dichiarerà in quali scuole medie venga impartito l'insegnamento suddetto; se per effetto di un programma ufficiale, o per iniziativa lasciata all'insegnante; in quest'ultimo caso si desidera la percentuale delle scuole dove il calcolo infinitesimale viene insegnato). Vengono istruiti in questo argomento tutti gli allievi, o solo una parte di essi?

Questioni particolari:

*a)* L'insegnamento del calcolo differenziale è limitato alle funzioni di una sola variabile, o sono anche considerate funzioni di più variabili?

*b)* A quali funzioni viene applicato il calcolo differenziale?

*c)* È trattato il calcolo integrale? In caso affermativo, entro quali limiti?

*d)* Si espone il teorema di Taylor?

*e)* Vengono integrate semplici equazioni differenziali? Quali?

II. — *Qual grado di rigore è adottato nella introduzione e nella trattazione dei vari concetti?*

*a)* Si limita l'insegnante a introdurre il calcolo differenziale con considerazioni geometriche, senza adoperare espressamente il concetto di limite, o viene adoperato quest'ultimo concetto? In caso affermativo, si danno dimostrazioni rigorose, o si riguardano evidenti teoremi come questo: $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$?

*b)* Si adoperano i differenziali? In caso affermativo, viene trattato il calcolo differenziale come una specie di calcolo di approssimazione, senza giustificazione rigorosa dei particolari, o si opera sugli infinitesimi come su grandezze effettivamente esistenti?

*c)* È messo in evidenza il resto nello sviluppo di Taylor, oppur no?

*d)* Vien rilevato che esistono funzioni non derivabili?

*e)* È introdotto in forma rigorosa il concetto del numero irrazionale, o l'insegnante si limita a parlare di irrazionali quando l'occasione si presenta (estrazione di radice)?

III. — *Quale metodo vien seguito nella introduzione del calcolo differenziale e integrale?*

*a)* La introduzione è preceduta nelle classi inferiori da uno studio appropriata delle funzioni e della rappresentazione grafica, in guisa che i nuovi argomenti appariscano, non come una sovrapposizione al programma già svolto, ma come una continuazione di questo?

*b)* Sono adoperati i simboli di Leibniz, o le derivate e gli integrali vengono designati altrimenti, e come?

*c)* Viene trattato prima il calcolo differenziale o l'integrale? oppure sono svolti contemporaneamente?

*d)* L'integrale è introdotto come limite di una somma (integrale definito), o come funzione primitiva (integrale indefinito)? e se si parla dell'uno e dell'altro, in quale ordine e con quale connessione si considerano?

*e)* È usato un libro di testo per lo studio del calcolo differenziale e integrale? Quali trattati vengono adottati? (indicazione esatta dell'autore, del titolo, e dell'editore).

IV. — *Quali applicazioni si fanno del calcolo differenziale e integrale?* Quelle questioni di analisi, di geometria o di fisica, ove comparisce il concetto di limite, e che per la loro importanza appartenevano già costantemente o frequentemente al programma scolastico, vengono ora connesse colle teorie affini del calcolo differenziale e integrale, in guisa da ottenere una trattazione più economica della materia studiata? In particolare:

*a)* La teoria dei massimi e minimi?

*b)* Nel caso che si tratti la serie di Taylor, quali funzioni vengono sviluppate in serie?

*c)* Nel caso che si introduca il resto nello sviluppo di Taylor, sono adoperate le serie di potenze nella interpolazione od estrapolazione, o per il calcolo degli errori?

*d)* Nel caso che sia trattato il calcolo integrale, viene esso applicato al calcolo di aree (ad es., parabola, ellisse) e al calcolo di volumi?

*e)* Per quali concetti fondamentali della meccanica (velocità, accelerazione, lavoro, momento di inerzia, ecc.) è adoperato il calcolo differenziale?

*f)* Analoga domanda per la Fisica, in particolare per l'Ottica (curve inviluppo, ecc.), per l'Elettrodinamica (linee di forza, ecc).

V. — *Colla introduzione del calcolo differenziale e integrale*

*nell'insegnamento, fu possibile alleggerire il programma, sopprimendo altre teorie? se sì, quali?*

VI. — *Quali risultati si ebbero dall'introduzione del calcolo differenziale e integrale? Viene questa riconosciuta come un necessario progresso? In qual misura trova essa consenso od opposizione?* Quale opinione hanno in proposito i cultori di matematica e di fisica?

Il relatore, che avesse da segnalare altre particolarità importanti relative all'insegnamento del calcolo differenziale e integrale, voglia parlarne nel suo rapporto. Voglia altresì indicare in qual posto delle relazioni della Commissione Internazionale dell'Insegnamento Matematico del proprio paese si trovino notizie sopra la questione del calcolo differenziale e integrale.

N. B. — Si prega di scrivere sopro una faccia del foglio e di inviare le risposte al presente questionario, non più tardi del primo dicembre 1913, al Sig. Prof. D[r] E. Beke, Bimbó uteza, 26, Budapest, II.

## QUESTIONNAIRE B

### Questionnaire pour la Sous-commission B au sujet de la formation mathématique des Ingénieurs.

I. *Généralités.* — Comment la formation en vue d'une carrière d'Ingénieur est-elle organisée dans l'Enseignement supérieur? — L'entrée aux Ecoles supérieures est-elle précédée d'un enseignement particulier, comme les Mathématiques spéciales en France? — Existe-t-il des établissements particuliers (écoles techniques supérieures) pour l'instruction des élèves-ingénieurs, ou n'y a-t-il, dans ce but, que des subdivisions spéciales dans les Universités, ou bien les deux modes existent-ils simultanément? — Une partie de la formation, en particulier la formation mathématique est-elle commune avec d'autres étudiants, par exemple avec les étudiants en Mathématiques ou en Sciences naturelles?

II. *Nature de l'Enseignement.* — L'enseignement mathématique vise-t-il une formation générale et est-il identique pour les étudiants des diverses branches techniques, ou bien y a-t-il une séparation suivant les diverses branches et en même temps une adaptation de l'enseignement aux besoins particuliers de chaque catégorie?

III. *Scolarité.* — Combien de temps accorde-t-on à l'instruction mathématique des élèves-ingénieurs? — Existe-t-il des cours et travaux pratiques, bien définis par un programme détaillé, dont la fréquentation est obligatoire et contrôlée, ou bien l'enseignement

a-t-il pour base une liberté universitaire qui, dans certaines limites, laisse aux professeurs le choix des matières et des méthodes, aux élèves le choix des cours et la participation effective à l'enseignement? — Comment traite-t-on les exercices mathématiques?

IV. *Matières et méthodes.* — Jusqu'où pousse-t-on l'enseignements des mathématiques aux élèves-ingénieurs? (Dans quelles limites, par exemple, traite-on des équations différentielles?) — Jusqu'à quel point pousse-t-on la rigueur dans les définitions et les démonstrations? — Emploie-t-on des modèles et des appareils pour l'enseignement? — Les nouvelles méthodes d'approximation sont-elles prises en considération? — La formation des étudiants est-elle complétée, pour certaines catégories, par exemple pour les électriciens, par des cours spéciaux de Mathématiques supérieures? — La Géométrie analytique et l'Analyse supérieure sont-elles traitées séparément ou bien réunies en un grand cours unique qui embrasse tout le Calcul dans les Mathématiques supérieures? — Quelles sont la place et l'importance des méthodes graphiques dans l'enseignement mathématique? — Quel est le développement donné à l'enseignement de la Géométrie descriptive? — Y a-t-il un cours particulier de Mécanique analytique, ou bien la Mécanique est-elle enseignée aux élèves-ingénieurs sous forme de Mécanique appliquée? — Quels sont les rapports de l'Arpentage et de la Géodésie avec les Mathématiques?

V. *Livres.* — Quels sont les ouvrages d'enseignement en usage parmi les étudiants? (Caractériser les ouvrages suivant les points de vue indiqués à la question II.)

VI. *Corps enseignant.* — Les maîtres qui enseignent les mathématiques sont-ils mathématiciens de carrière? — Sont-ce des mathématiciens purs ou des mathématiciens ayant des connaissances dans une ou plusieurs branches de la Science appliquée? — Sont-ce des ingénieurs autodidactes qui, ne possédant que les connaissances mathématiques qu'ils ont reçues comme étudiants, ont complété eux-mêmes leur instruction?

VII. *Compléments.* — Au cas où vous jugeriez utile d'ajouter des remarques relatives à des sujets qui n'ont pas été signalés dans ce questionnaire, nous vous prions de les placer dans un septième paragraphe. — Veuillez également signaler, dans les publications de votre pays pour la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique, tous les articles qui ont trait à l'instruction mathématique des élèves-ingénieurs.

VIII. *Statistique.* — Prière de joindre, aux réponses à ce questionnaire, une liste des cours de Mathématiques pour les élèves-ingénieurs qui ont eu lieu dans les principaux établissements de votre pays pendant l'année dernière. (Nom du cours, nombre des heures du cours proprement dit ainsi que des travaux pratiques.)

N. B. — On est prié d'adresser la réponse à ce questionnaire *avant le 1er décembre 1913*, au Rapporteur général, M. le Professeur Stäckel, *Scheffelstr. 7, Heidelberg (Allemagne)*. — Prière de n'écrire que d'un seul côté de la feuille

Le rapport de la Sous-Commission B sera donné au Congrès à Paris en avril 1914.

## Fragebogen für die Subkommission B betreffend mathematische Ausbildung der Ingenieure.

I. *Allgemeines.* — Wie ist die Ausbildung für die höheren technischen Berufe in das höhere Unterrichtswesen eingegliedert? — Geht dem Besuch der Hochschule ein besonderer Unterrichtsgang voraus, wie die « Mathématiques spéciales » in Frankreich? — Sind besondere Anstalten (technische Hochschulen) für die Studierenden der Technik vorhanden, oder nur besondere Abteilungen an Universitäten, oder beides zugleich? — Erfolgt ein Teil der Ausbildung, im besonderen der mathematischen Ausbildung, gemeinsam mit anderen Studierenden, etwa der Mathematik oder der Naturwissenschaften?

II. *Zweck und Ziel des Unterrichts.* — Bezweckt der mathematische Unterricht eine allgemeine mathematische Ausbildung und hat für die Studierenden der verschiedenen technischen Fächer dieselbe Gestalt, oder findet eine Trennung nach Fachrichtungen und zugleich eine Anpassung des Unterrichts an die besonderen Bedürfnisse der einzelnen Fachrichtungen statt?

III. *Art des Unterrichts.* — Wieviel Zeit ist dem mathematischen Unterricht der Ingenieure zugemessen? — Sind bestimmte mathematische Vorlesungen und Uebungen auf Grund eines ausführlichen Programms vorgeschrieben, deren regelmässiger Besuch gefordert und kontrolliert wird, oder gilt der Grundsatz der akademischen Freiheit, der in gewissen Grenzen den Professoren die Wahl und die Behandlungsweise des Stoffes, den Studierenden die Wahl der Vorlesungen und die wirkliche Teilnahme am Unterricht anheimstellt? — In welcher Weise werden die mathematischen Uebungen betrieben?

IV. *Stoff Methode und Ausdehnung des Unterrichts.* — Wie weit wird der mathematische Unterricht der Ingenieure geführt? (In welchem Umfange werden zum Beispiel Differentialgleichungen behandelt?) — Welche Forderungen stellt man an die Strenge bei der Begriffsbildung und Beweisführung? — Werden Modelle und Apparate für den Unterricht benutzt? — Finden die neueren Näherungsmethoden Berücksichtigung? — Wird die Ausbildung bei einzelnen Fächern, etwa der Elektrotechnik, durch besondere höhere Vorlesungen ergänzt? — Werden die analytische Geo-

metrie und die höhere Analysis als getrennte Fächer behandelt oder beide zu einer grossen einheitlichen Vorlesung zusammengefasst, die den gesamten rechnenden Teil der höheren Mathematik umfasst? — Welche Stellung nehmen im Unterricht die graphischen Methoden ein? — In welchem Umfange wird darstellende Geometrie gelehrt? — Gibt es besondere Vorlesungen über analytische Mechanik, oder wird die Mechanik nur von Ingenieuren als angewandte Mechanik vorgetragen? — Welche Beziehungen hat die niedere und höhere Geodäsie zur Mathematik?

V. *Lehrbücher.* — Welche Lehrbücher werden von den Studierenden benutzt? (Charakterisierung der Lehrbücher nach den in der Frage II dargelegten Gesichtspunkten.)

VI. *Lehrkörper.* — Sind die Dozenten der Mathematik Mathematiker von Fach? — Sind sie Mathematiker der abstrakten Richtung oder Mathematiker mit Erfahrungen auf einem oder mehreren Gebieten der Anwendungen? — Sind es Ingenieure, die ein besonderes Studium der Mathematik durchgemacht haben, oder Ingenieure, die lediglich mit den mathematischen Kenntnissen aus der eigenen Studienzeit ausgerüstet auf autodidaktische Weiterbildung angewiesen sind?

VII. *Weitere Auskunft.* — Sollten Sie Bemerkungen für nützlich halten, die in diesem Fragebogen nicht erwähnte Gegenstände betreffen, so werden Sie ersucht, diese unter Nummer VII vorzubringen. — An welchen Stellen der Imuk-Abhandlungen Ihres Landes findet man Ausführungen, die mit dem mathematischen Unterricht der Ingenieure in Beziehung stehen?

VIII. *Verzeichnis der mathematischen Vorlesungen.* — Es wird gebeten, dem Bericht ein Verzeichnis der mathematischen Vorlesungen für Ingenieure (Titel der Vorlesung, Anzahl der Stunden, Anzahl der zugehörigen Uebungsstunden) hinzuzufügen, die während des letzten Jahres an den hauptsächlichen Hochschulen gehalten worden sind.

Man bittet dringend, die Antwort auf den Fragebogen bis spätestens zum 1. Dezember 1913 an den Haupt-Berichterstatter Herrn Prof. Dr. P. Stäckel, Heidelberg, Scheffelstr. 7, zu senden.

Es wird gebeten, bei den Antworten nur eine Seite der Bogen zu beschreiben.

Der Bericht der Subkommission B wird im April 1914 zu Paris erstattet werden.

## The Mathematical Training of Engineers.
## Inquiries on behalf of Subcommittee B, of the International Commission on the Teaching of Mathematics.

I. *General Inquiry.* — How is the training for technical professions organized in the higher educational institutions of your

country? — Does entrance to these institutions require the completion of a special course, as the class of *mathématiques spéciales* in France? — Are there special higher technical schools (*technische Hochschulen, écoles techniques supérieures*) for the training of students for advanced technical work, or is this training given in special departments of the universities, or are both plans followed? — Is a part of the training, in particular the training in mathematics, given in the same classes attended by students in other lines, for example in mathematics and the natural sciences?

II. *Purpose.* — Is general training in mathematics the purpose of the instruction in this science, and is it the same for all students in the various technical branches, or is there tendency to differentiate the courses according to the peculiar needs of students in special technical departments?

III. *Nature of the Teaching.* — How much time is allotted to the work in mathematics in the training of the engineer? — Are definite lectures and exercises in mathematics prescribed as part of a fixed course of study, regular attendance being required, or does there prevail a spirit of academic freedom which, within certain limits, allows the instructor to select his material and treat it as he may think best, and the student to arrange his own course and determine the extent of his participation in the work?

IV. *Material, Method and Extent.* — In the training of the engineer, how far is the instruction in mathematics carried? (For example, the work in differential equations). — What attention is paid to the question of rigour in the treatment of the subject? — Are models and apparatus used? — Is attention paid to the use of the modern methods of approximation? — In the training of students in special technical lines, such as electrotechnics, does the work close with special courses in higher mathematics? — Are analytical geometry and higher analysis treated as separate subjects, or are the two combined in a single extended and unified course, and does this course include the computations of higher mathematics? — What is the status of graphical methods in the course? — What is the status of descriptive geometry? — Are there special courses in analytical mechanics, or is the work in mechanics given by engineers as a part of the course in applied mechanics? — What are the relations of elementary and advanced geodesy to mathematics?

V. *Textbooks.* — What textbooks are in the hands of the students? (Characterise these books from the standpoint of Question II.

VI. *The Teaching Body.* — Are the instructors in mathematics primarily mathematicians? — Are they devoted chiefly to pure mathematics, or are they interested principally in mathematics as

applied to one or more particular fields? — Are they engineers who have made a special study of mathematics, or are they self-taught engineers who, possessing only the knowledge of mathematics which they acquired as students, have carried on their further education independently?

VII. *Further Information.* — If there occur to you any points not covered in the above inquiry, which seem to you important to the investigation, kindly mention them under this heading (VII), giving such information as will be of assistance to the Committee. — The Committee would also like to have you add exact references to such parts of the report of the International Commission on the Teaching of Mathematics as relate to the mathematical training of engineers in your country.

VIII. *List of Courses.* — Please send a list of the courses in mathematics for engineers (title, number of hours of lectures, number of hours devoted to exercises) given in typical institutions in your country during the past year.

You are earnestly requested to send the reply to this Inquiry not later than December 1, 1913, to the Reporter-in-Chief Prof. P. Stäckel Scheffelstr. 7, Heidelberg. — Please only write on one side of the paper.

The report of Subcommittee B will be made at the Paris meeting, in April, 1914.

## Quesiti proposti alla Sotto-Commissione B circa la preparazione matematica degli ingegneri.

I. *Generalità.*— Come è organizzato l'avviamento all'ingegneria nell'istruzione superiore? L'ammissione alle scuole superiori è preceduta da corsi speciali come quello di « Mathématiques spéciales » in Francia? — Esistono apposite istituzioni (politecnici) per l'istruzione degli allievi ingegneri, o vi sono soltanto sezioni delle Università, aventi questo fine? oppure coesistono i due sistemi? — Una parte della preparazione, quella matematica in particolare, è comune con altre categorie di studenti, per es., di matematica pura o di scienze?

II. *Natura dell'insegnamento.* — L'insegnamento matematico ha indirizzo di coltura generale ed è identico per gli studenti dei diversi rami della tecnica, o è tenuto distinto, onde potersi meglio adattare ai bisogni particolari di ciascun ramo?

III. *Ordine degli studi.* — Quanto tempo è dedicato alla preparazione matematica degli allievi-ingegneri? — Esistono corsi ed esercitazioni pratiche con programma ben definito, obbligatori per gli studenti, sotto controllo di prove finali o d'altre sanzioni, o vige invece il principio della libertà universitaria, lasciandosi

ai professori la formulazione dei programmi e la scelta dei metodi, agli allievi libertà nella scelta dei corsi e nella effettiva frequenza alle lezioni? — Come sono organizzate le esercitazioni matematiche?

IV. *Materie e metodi.* — Fino a qual punto arriva l'insegnamento delle matematiche destinato agli ingegneri? (per es., entro quali limiti è contenuta la trattazione delle equazioni differenziali?) — In che senso e in quale misura si intende il rigore nelle definizioni e nelle dimostrazioni? — Si fa uso di modelli e di apparecchi dimostrativi? — Trovano posto i nuovi metodi di approssimazione? — Sono istituiti corsi speciali di matematiche superiori a complemento della preparazione di certe categorie di studenti, per es., di quelli che si avviano all'elettrotecnica? — La geometria analitica e l'analisi sono impartite come insegnamenti separati o raccolte in un vasto e unico corso che abbraccia anche tutto il calcolo? — Quale è il posto e quale l'importanza dei metodi grafici nell'insegnamento matematico? — Quale lo sviluppo dato alla geometria descrittiva? — Esiste un corso specifico di meccanica analitica, ovvero la meccanica per gli allievi-ingegneri rimane inclusa in uno o più corsi di meccanica applicata? — Quali sono i rapporti della topografia e della geodesia colle matematiche?

V. *Libri.* — Quali sono i testi cui ricorrono gli studenti? (Caratterizzarli secondo i punti di vista indicati sub II).

VI. *Personale insegnante.* — Gli insegnanti di matematica sono dei matematici di professione? Matematici puri o competenti almeno in qualche ramo dell'indirizzo applicativo? Sono essi ingegneri che hanno anche fatto studi regolari di matematica, o ingegneri che hanno completato la loro coltura matematica per iniziativa personale, in base alle sole nozioni acquisite da studenti?

VII. *Complementi.* — Qualora Ella ritenga utile aggiungere qualche osservazione su argomenti non contemplati dal presente questionario, si compiaccia di farne cenno sub VII. Voglia ancora segnalare, fra le publicazioni (concernenti il Suo paese) della Commissione Internazionale per l'insegnamento matematico, tutti gli articoli che hanno attinenza alla preparazione matematica degli allievi-ingegneri.

VIII. *Statistica.* — Si prega di allegare alle risposte ai vari quesiti una lista dei corsi di matematica per gli allievi-ingegneri, tenuti (nel rispettivo stato) durante l'anno scolastico ultimo scorso. (Designazione del corso, numero delle ore settimanali così delle lezioni propriamente dette, come degli esercizi).

N. B. — Gli Autori sono pregati di scrivere sopra una faccia del foglio. — Si prega di rispondere *prima del primo dicembre 1913*, indirizzando al Relatore Generale, Prof. P. Stäckel, *Scheffelstr. 7, Heidelberg* (Germania).

# MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

## **Déterminations directes des projections des bissectrices d'un angle**
*en Géometrie descriptive dans le système de Monge.*

*(Extrait d'une lettre à M. Fehr).*

Gênes, 25 juillet 1913.

..... Dans son article publié dans l'*Enseignement mathématique* du 15 juillet 1913 (p. 329-332), M. Paterno a parfaitement raison de signaler les défauts qu'offre la détermination des bissectrices d'un angle à l'aide d'un rabattement suivi d'un relèvement. C'est une remarque que je fis dans un article désormais vieux (*Rette bisettrici e piani bisettori*, Period. di matem., III Sér., T. 2, 1904-05), dans lequel j'ai donné en même temps un procédé, pour atteindre le but indiqué, en m'appuyant sur cette propriété : les bissectrices des angles formés par deux droites $a$, $b$ qui se coupent sont les rayons communs à l'involution dont $a$, $b$ sont les rayons doubles et à l'involution circulaire qui a comme centre le point $ab$ et comme plan le plan $ab$. Ma méthode (que j'ai reproduit dans mes *Vorlesungen über darstellenden Geometrie,* I Tl., Leipzig 1905, pp. 54-57) a l'avantage de s'appliquer, *mutatis mutandis*, à la recherche des plans bissecteurs des dièdres formés par deux plans quelconques.

Gino Loria.

---

# CHRONIQUE

## Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

1. — Dans sa réunion tenue à Heidelberg, du 21 au 23 juillet 1913, le Comité central a élaboré le programme général du Congrès de l'Enseignement mathématique que la Commission tiendra à Paris du 6 au 8 avril 1914. La revue en donnera le texte complet dès qu'il aura été définitivement arrêté. Nous avons reproduit plus haut les questionnaires qui serviront de base aux conférences et discussions sur les deux objets principaux inscrits à l'ordre du jour du Congrès. Ce sont les suivants :

A. — *Les résultats obtenus dans l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement moyen.* — Rapporteur : M. le Prof. E. Beke, Budapest.

B. — *Les mathématiques dans l'enseignement technique supérieur.* — Rapporteur : M. le Prof. P. Staeckel, Heidelberg.

### Sous-commissions nationales.

**Allemagne.** — La Sous-commission allemande vient de publier ce nouveau fascicule de ses monographies sur l'enseignement mathématique. C'est une intéressante étude sur le côté psychologique dans l'enseignement mathématique.

*Psychologie und mathematischer Unterricht*, von Dr D. Katz (Gœttingue), Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland, Band III, Heft 8, 120 p.; B. G. Teubner, Leipzig.

## 5me Congrès international des mathématiciens.

### *Les comptes rendus.*

Il y a un an nous donnions dans les numéros de septembre (p. 365-391) et de novembre (p. 441-539) un compte rendu détaillé du Congrès tenu à Cambridge du 22 au 28 août 1912. Les Actes

du Congrès viennent de paraître ; ils ont été publiés par les deux secrétaires généraux MM. E. W. Hobson (Cambridge) et A. E. H. Love (Oxford), et imprimés par l'*University Press de Cambridge* avec tout le soin qui caractérise les publications de cette maison.

Les *Proceedings* forment deux beaux volumes de 500 et 657 pages et contiennent le premier, les documents concernant l'organisation du Congrès, les Conférences générales de MM. Bôcher, Borel, Brown, Enriques, Landau, Larmor, Galitzin et White, puis les communications de la Section I : Arithmétique, algèbre, analyse, au nombre de 32. Le Tome II renferme les communications de la Section II, Géométrie (24), de la Section III, mécanique, physique, mathématiques, astronomie, statistiques, etc. (37), et de la Section IV, philosophie, histoire et enseignement (29).

Le compte rendu détaillé que nous avons donné du Congrès nous dispense de revenir longuement sur ces communications. Les « Proceedings » se trouvent depuis le mois de juin entre les mains des souscripteurs. Ils ont également leur place marquée dans toutes les bibliothèques mathématiques.

H. Fehr.

## Concours pour le 6e Congrès international des mathématiciens.

On sait que le 6e Congrès international des mathématiciens aura lieu à Stockholm en 1916, sous le haut patronage de S. M. le Roi Gustave V. A cette occasion S. M. le Roi de Suède décernera une médaille d'or à l'effigie de C. Weierstrass et un prix de 3000 couronnes à l'auteur d'un mémoire apportant une *contribution importante à la théorie des fonctions analytiques.*

Les concurrents devront envoyer leur mémoire au rédacteur en chef des « Acta Mathematica » avant le 31 octobre 1915, anniversaire de la mort de Weierstrass. Le travail doit se rapporter à la théorie des fonctions analytiques ou d'une classe spéciale de fonctions qui s'y rattachent. Il devra être inédit et pourra être rédigé en allemand, anglais ou français.

Le mémoire couronné, ainsi que les travaux méritant une mention spéciale, seront insérés dans les « Acta Mathematica ». Les autres mémoires seront retournés aux auteurs. Les mémoires envoyés au concours porteront une devise ; celle-ci sera accompagnée de l'adresse de l'auteur mise sous pli cacheté ou sous enveloppe ouverte.

Le jury est composé des membres de la Section mathématique de l'Académie des Sciences de Stockholm : MM. Mittag-Leffler, Falk, Phragmén, Wiman, Bendixson et von Koch, ainsi que de M. Fredholm.

## France. — 51e Congrès des Sociétés savantes.

Ce Congrès s'est tenu à *Grenoble* du 13 au 17 mai 1913. La Section des Sciences était présidée par M. J. Collet, doyen de la Faculté des Sciences de Grenoble; elle s'est réunie le mardi soir 13 mai. Voici quelques brèves notes sur les présentations, faites par ordre alphabétique, en dehors des renseignements donnés au *Journal officiel de la République Française* du lundi 2 juin 1913, p. 4751. (Tout le Congrès est exposé p. 4746-4772.)

M. P. Carissan, professeur à Lillé-le-Guillaume, envoie un Essai sur la pénétration des grands nombres par l'invention d'une machine à congruences de tous les degrés. Ce travail de plus de 40 pages, fait en collaboration avec M. le lieutenant Carissan, de St-Brieuc, comporte une partie pédagogique et une deuxième partie illustrée de photographies. Cet intéressant travail demandera néanmoins diverses retouches et l'adjonction d'exemples topiques. L'auteur continue ses recherches sur ce sujet.

M. A. Collet, de Poitiers, envoie une Note sur les solutions approchées de certaines équations intégrales non linéaires.

M. Garrigues, de Montastruc, donne un Calendrier perpétuel, jusqu'à l'année 2600, utilisant de simples graphiques.

M. A. Gérardin, correspondant du Ministère, à Nancy, présente d'abord un modèle en bois de Machine nouvelle donnant la suite illimitée des nombres premiers, jusqu'à une certaine limite $k$, par exemple un milliard. La Table fondamentale du million, établie par l'auteur (voir *E. M.*, 15 mai 1913, pp. 246-247), verra probablement le jour en septembre 1913.

La deuxième Note présentée est une liste de 45 nombres premiers ayant au moins douze chiffres. Cette liste sera complétée.

M. Ernest Lebon, agrégé de l'Université, à Paris, adresse deux notices sur Henri Poincaré et sur Armand Gauthier, extraite de sa collection intéressante des *Savants du Jour* (édition 1 et 2 de Poincaré. — Rappel des paroles élogieuses de M. Darboux).

M. Pellet, de Clermont-Ferrand, expose une Note sur les équations majorantes et dominantes, déjà développée au Bulletin de la Société mathématique de France. Il en indique une application aux systèmes infinis d'équations qui l'a conduit à des résultats nouveaux.

M. Riquier, de Caen, a envoyé une Note sur l'inversion des fonctions uniformes.

M. Cotton, de Grenoble, présente un Mémoire sur l'extension de la notion de nombre caractéristique de M. Liapounoff, avec application à la théorie des équations différentielles.

Le Congrès de 1914 se tiendra à Paris.

## Carlo Bourlet.

Nous avons été douloureusement surpris en apprenant la mort subite de M. Carlo Bourlet, survenue le 12 août, à Annecy, aux suites d'un accident stupide et banal. Sa fin prématurée est une grande perte pour la Science. Bourlet n'était âgé que de 47 ans. Il avait déjà derrière lui une belle carrière, et l'on pouvait attendre encore beaucoup de ses brillantes qualités de savant et d'homme d'action.

Intelligence remarquable, esprit clair et précis, volonté ferme et inébranlable, dévouement absolu aux causes qu'il avait embrassées, profond désintéressement, tels sont quelques-uns des traits essentiels de cet homme éminent. Il appartenait à cette élite intellectuelle du grand pays dont il était si justement fier.

C. Bourlet a été un grand travailleur. L'activité extraordinaire qu'il a déployée dans sa trop courte carrière de savant, de technicien et de professeur ne saurait être résumée en quelques lignes.

Reçu premier à l'Ecole Polytechnique en 1885, et en même temps à l'Ecole Normale Supérieure, il choisit cette dernière et en sortit, en 1888, avec le titre d'agrégé. Peu après, il prit le grade de docteur en présentant une thèse sur les équations aux dérivées partielles. Il professa successivement aux lycées Lakanal, Henri IV et Saint-Louis. Partout, il avait fait apprécier son remarquable talent d'exposition et la clarté de son enseignement. Ces qualités, que l'on retrouve d'ailleurs dans ses nombreux traités, manuels et mémoires mathématiques, le désignaient tout particulièrement pour occuper les chaires de mathématiques à l'Ecole Nationale des Beaux-Arts et au Conservatoire des Arts et Métiers.

Son goût pour les applications le poussèrent peu à peu du côté des sciences appliquées. Ainsi il publia, il y a une vingtaine d'années, une théorie mathématique de la bicyclette qui fut couronnée par l'Académie des Sciences. Depuis quelque temps, il s'occupa spécialement de recherches sur la résistance de l'air.

C. Bourlet était membre d'un grand nombre de sociétés et de commissions scientifiques et techniques, auxquelles il apportait les ressources de sa grande activité et de ses capacités administratives. Il dirigeait les *Nouvelles Annales de Mathématiques* avec MM. C.-A. Laisant et R. Bricard. Rappelons aussi son rôle dans le mouvement espérantiste, dont il fut un des apôtres les plus brillants.

En terminant, nous tenons à rendre hommage à l'appui qu'il a donné à la Commission internationale de l'enseignement mathé-

matique, qui perd en lui l'un de ses meilleurs membres. Il prit une part active à la publication des *Rapports de la Sous-commission française* (5 vol. Hachette) et aux travaux dans les conférences plénières que la Commission tint à Bruxelles (1910), à Milan (1911) et à Cambridge (1912). Au mois de juillet dernier, il assistait encore, à Heidelberg, à une réunion du comité chargé de préparer le congrès de l'enseignement mathématique que la Commission tiendra à Paris l'an prochain. On comprendra donc que la triste nouvelle de sa mort ait tout particulièrement affecté ses collègues et amis de la Commission internationale.

Nous garderons précieusement la mémoire de cet éminent collaborateur que fut Carlo Bourlet.

H. Fehr.

## Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

**Allemagne.** — M. M. Dehn, professeur à l'Université de Kiel, est nommé professeur titulaire de Mathématiques à l'Ecole technique supérieure de Breslau.

M. G. Faber, professeur à l'Université de Königsberg, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Strassbourg.

M. F. Hartogs, privat-docent à l'Université de Munich, est nommé professeur titulaire de Géométrie descriptive.

M. F. Klein, professeur à l'Université de Göttingue, est nommé associé étranger de l'Académie royale de Naples.

M. M. Weber, professeur à l'Ecole technique supérieure de Hanovre, est nommé professeur de Mécanique à l'Ecole technique supérieure de Charlottenbourg.

**Angleterre.** — M. W. H. Young, F. R. S., professeur de Philosophie et d'Histoire des Mathématiques à l'Université de Liverpool, a été appelé comme professeur à l'Université de Calcutta, avec la mission d'y développer les hautes études mathématiques spécialement dans la voie des recherches pures. Il résidera aux Indes du 1er novembre 1913 au 31 mars 1914. Les conférences qu'il fait chaque année en janvier et en février à l'Université de Liverpool seront reportées au mois de mai et de juin.

**Belgique.** — Un congrès international de l'Enseignement secondaire s'est tenu à Gand, du 8 au 14 août. Il a émis entre autres, un vœu en faveur du renforcement des études mathématiques.

**France.** — *Ecole Polytechnique.* M. Jouguet est nommé Répé titeur titulaire de mécanique et M. Marbec, Répétiteur adjoint de mécanique.

**Italie.** — *Académie royale dei Lincei.* M. G. Bagnera, profes-

seur à l'Université de Palerme, a été élu membre correspondant. MM. A. Hurwitz, professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich, J. Fredholm, professeur à l'Université de Stockholm, G. W. Hill, ancien professeur à l'Ecole de Marine des Etats-Unis, ont été nommés associés étrangers.

**Suisse.** — M. Gustave Dumas, privat-docent à l'Ecole polytechnique de Zurich, est nommé professeur de Mathématiques à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne.

M. A. Einstein, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, a été appelé à l'Académie des Sciences de Berlin, au fauteuil occupé autrefois par Van t'Hoff. Il conservera jusqu'au printemps prochain la chaire de physique théorique qui avait été créée spécialement à son intention à l'Ecole polytechnique.

---

# NOTES ET DOCUMENTS

## Commission internationale de l'enseignement mathématique.

*Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.*

(14e article)

## ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

### L'enseignement mathématique aux Etats-Unis.

*Report of the American Commissioners of the International Commission on the Teaching of Mathematics*[1]. — La Sous-commission américaine a publié ses rapports en 11 fascicules. Dix exposent les travaux de douze comités et le onzième est un rapport sur l'ensemble de l'enseignement mathématique aux Etats-Unis[2].

Son organisation, ses méthodes et les problèmes qui se posent à l'heure actuelle dans l'enseignement mathématique aux Etats-Unis y sont indiqués, avec référence pour plus de détails aux rapports spéciaux des comités.

Il y est adjoint un aperçu historique des travaux de la Commission internationale et une table, par ordre alphabétique, des matières contenues dans les divers rapports américains.

Les 48 Etats formant les Etats-Unis sont autonomes ; en ce qui concerne l'enseignement il existe cependant une assez grande unité grâce à l'homogénéité de pensée et de vie dans tout le pays.

---

[1] 1 fasc. de 84 pages, publié par le United States Bureau of Education.

[2] *Ens. math.* comptes rendus : 15 mai 1909. Rapp. préparatoire de la délégation. — 15 mars 1911. Rapp. provisoire de la Sous-commission américaine.

Les rapporteurs rappellent les subdivisions principales dans l'enseignement, qui sont, après les jardins d'enfants, les écoles élémentaires, 6-13 ans ; les écoles secondaires, 14-17 ans ; les collèges ou institutions similaires, 18-21 ans ; les universités ou écoles d'études supérieures analogues, 22-24 ans.

Pour les parties concernant l'enseignement primaire et l'enseignement secondaire, nous nous bornerons à renvoyer aux comptes rendus des rapports spéciaux des comités I-IV[1], afin d'examiner plus en détail ce qui concerne l'enseignement supérieur auquel sont consacrées les 20 dernières pages de ce rapport général.

Les rapporteurs font remarquer qu'il y a une différence considérable dans l'enseignement mathématique actuel et celui d'il y a 30 ans, les 3 causes principales en sont : les études à l'étranger, la fondation de l'Université John Hopkins et le système de cours facultatif (elective systeme).

Les conditions d'admission dans un collège ou une école technique (technological school) ne comportent que des mathématiques élémentaires, des éléments d'algèbre avec les équations du 2me degré, la géométrie plane et quelquefois de la stéréométrie. C'est dans le programme de 1re année du collège ou de l'école technique que l'on trouve les logarithmes, la trigonométrie et la géométrie analytique et souvent de la stéréométrie.

Dans les meilleurs de ces établissements les déterminants, les équations de degré supérieur etc., sont enseignés avec leurs applications ou avec les sujets correspondants de géométrie analytique et de calcul différentiel et intégral. Le calcul différentiel est introduit en première année ou en seconde année. Il est appliqué à de nombreux problèmes de mécanique rationnelle : centre de gravité, moment d'inertie, pressions de fluides, attraction, énergie cinétique, dynamique du point, etc ; ainsi qu'aux courbes et surfaces de la géométrie supérieure. C'est dans ce cours également que sont traitées la convergence des séries et l'application des séries de puissance au calcul et au développement des fonctions. De plus, dans les établissements plus spécialement orientés du côté de la physique et de la science de l'ingénieur, on trouve les intégrales multiples et la démonstration des théorèmes de Green et Stokes. Dans les collèges, en tous cas, ces cours sont le plus souvent facultatifs (elective course).

L'influence du « mouvement Perry » s'est fait sentir en Amérique ; toutefois les rapporteurs notent le fait que les conclusions auxquelles ont abouti la majorité des maîtres qui en ont subi l'influence sont très différentes de celles des adhérents au programme Perry. Il a été en effet reconnu que « les cours de mathématiques doivent enseigner les mathématiques plutôt que de la science appliquée. Il est aussi généralement admis que les applications techniques ne sont recommandables dans le travail scolaire que pour autant qu'elles sont assez élémentaires et familières pour ne pas détruire l'unité du cours mathématique ou diminuer sa valeur éducative en obscurcissant les principes généraux. L'accord est également général pour estimer qu'il faut éviter les exemples nécessitant des connaissances techniques nouvelles, ou dont l'acquisition n'est pas très aisée, afin de ne pas donner aux élèves deux difficultés au lieu d'une à surmonter ».

Au sujet de la coopération des mathématiques et de la science de l'ingénieur,

[1] *Ens. math.* 15 mai 1912 : Ecoles élémentaires (comités I et II) ; 15 juillet 1912 : Ecoles secondaires (comités III et IV).

les rapporteurs rappellent qu'il faudrait non seulement la coopération du mathématicien avec l'ingénieur, mais aussi celle de l'ingénieur avec le mathématicien, principalement en ce qui concerne l'usage des méthodes modernes en mathématiques.

Les rapporteurs décrivent les méthodes appliquées pour le travail en classe : récitation orale, résolution de problèmes au tableau noir ou comme exercice écrit, exposition non dogmatique du sujet par le professeur, suivie d'applications directes ou demandant un peu plus de réflexion avec aide éventuelle du professeur et de ses assistants. Quelques pages sont consacrées aux « elective courses » comprenant les sujets suivants : géométrie moderne, mécanique, cours supérieur de calcul différentiel et intégral, équations différentielles, déterminants et théorie des équations. Ces cours sont facultatifs pour les uns, obligatoires pour d'autres, et cela plus spécialement pour certaines sections des écoles techniques.

Dans les études supérieures (advanced instruction) une grande liberté est laissée aux étudiants ; ils déterminent généralement leur plan d'étude avec l'aide d'un professeur et ont toute latitude pour le choix des cours et toute facilité pour suivre certains d'entre eux seulement en qualité d'auditeurs.

Grâce au socialisme intellectuel, le dévouement à la science est aujourd'hui souvent considéré comme de l'égoïsme ; aussi, ainsi que l'indique déjà le rapport du comité XII, la nécessité de chercher à développer un idéalisme intelligent et un idéal scientifique élevé est urgente.

Les universités des Etats-Unis, la question des grades de « Master » et de Docteur et celle des traitements terminent le rapport.

Le terme d'Université est appliqué aux Etats-Unis à des établissements d'ordres divers, depuis ceux qui comprennent 4 facultés et occupent un rang analogue aux universités d'Europe jusqu'à des établissements qui atteignent à peine au niveau des meilleurs collèges. Quelques-unes des universités de l'Etat, quoique ne comptant pas 4 facultés, peuvent être classées dans la 1re catégorie pour leur valeur scientifique.

Il est très fréquent que, obéissant à des raisons d'ordre pratique très légitimes, le jeune mathématicien se lance très tôt dans la pratique de l'enseignement. Il renvoie alors à plus tard le développement de ses connaissances et l'utilisation de ses facultés pour la production scientifique. L'auteur met en garde contre cet écueil ; en mathématique, en effet, la puissance créatrice se perd très aisément lorsqu'elle est laissée à l'état latent pendant les années de jeunesse.

R. Masson (Genève).

# ILES BRITANNIQUES

## N° 24. — Les mathématiques dans les cours techniques du soir.

*The Teaching of Mathematics in Evening Technical Institutions*[1], by Dr W.-E. Sumpner, Principal of the Municipal Technical School, Birmingham. — Les institutions techniques diverses se sont beaucoup développées en Angleterre durant ces dernières années. Les classes du soir attirent des élèves de diverses conditions sociales et se destinant à des vocations très

[1] 1 fasc. 11 p.: Price 1 d.; Wyman & Sons. Londres.

variées. Ces élèves sont répartis, selon leur propre choix, par groupes de différents types, suivant l'industrie visée. On ne s'occupe dans ce rapport que des groupes comprenant, entre autres branches, les mathématiques ; ils sont au nombre de trois que nous qualifierons d'inférieur, moyen et supérieur, en se plaçant uniquement au point de vue mathématique. Nous dénommerons les élèves de ces trois groupes, élèves artisans, élèves ingénieurs et élèves en mathématiques.

Ces termes sont pris évidemment dans un sens très général. Un tiers environ de la totalité des élèves des trois groupes sont des artisans, les ingénieurs sont à peu près deux fois plus nombreux. Quant aux élèves en mathématiques (c'est-à-dire ceux qui présentent une aptitude spéciale pour cette branche et qui désirent l'étudier d'une façon plus ou moins approfondie) ils ne forment qu'un faible pour-cent (5 °/o environ).

Dans ces institutions techniques, le maître est obligé de se conformer aux conditions de ses élèves ; c'est pourquoi les méthodes employées diffèrent de celles qui sont en usage dans les institutions plus anciennes et plus académiques.

*Elèves artisans.* — L'enseignement mathématique de ce groupe est très élémentaire. Les élèves sont très nombreux, et il est souvent possible de les classer d'après la nature de leur travail et d'après le niveau de leur préparation. Le travail consiste presque uniquement en calculs arithmétiques concernant les aires, les volumes, les poids, etc.

*Elèves ingénieurs.* — Ils forment donc la grande majorité ; il y en a de tout âge, les plus jeunes cependant, à partir de 14 ans, ne fréquentent pas l'établissement principal, mais d'autres classes du soir d'un degré inférieur ; les élèves de l'institution principale ont généralement plus de 18 ans. Les leçons de mathématiques comprennent pour les plus jeunes (14 à 16 ans) les nombres décimaux, les méthodes abrégées, les éléments d'algèbre et de trigonométrie, le dessin géométrique, les méthodes graphiques appliquées à des problèmes de mécanique et de physique. Durant la seconde période (16 à 18 ans) le travail est un peu plus spécialisé et comprend les éléments d'algèbre, de trigonométrie, de dynamique et de statique. A partir de la fin de la seconde période, on trouve une grande variété dans les méthodes adoptées dans les différentes écoles techniques ; pour les mathématiques les programmes sont généralement disposés suivant les besoins des différentes classes et l'on arrange des cours spéciaux en rapport direct avec les autres branches techniques. Dans les écoles un peu considérables on trouve un grand nombre de classes mathématiques de ce type spécial que nous pouvons appeler type associatif, mais on y rencontre aussi, le plus souvent, des classes de mathématiques pures et appliquées où l'on traite le sujet à un point de vue plus général.

L'auteur fait ensuite quelques remarques sur l'enseignement des mathématiques pratiques relativement à cette classe d'étudiants. Il recommande d'introduire de bonne heure les éléments du calcul vectoriel et le calcul infinitésimal ; il aimerait qu'on traitât simultanément le calcul différentiel, le calcul intégral et les équations différentielles, et non pas successivement. La façon d'introduire le calcul infinitésimal est discutable et dépend entre autres des élèves auxquels on s'adresse ; les méthodes graphiques sont à recommander pour les étudiants n'ayant qu'une préparation mathématique élémentaire.

*Elèves en mathématiques.* — Les élèves des écoles techniques qui rentrent

dans cette catégorie comprennent ceux qui ont une aptitude spéciale pour les mathématiques ; ou bien qui désirent obtenir des diplômes spéciaux, comme certains maîtres ; ou encore les élèves qui, après avoir suivi les classes pratiques, éprouvent le besoin de compléter quelque peu le sujet. Dans la plupart des cas, ces jeunes gens possèdent une bonne éducation secondaire, plusieurs travaillent en vue d'examens universitaires.

## N° 25. — Les mathématiques dans les sciences économiques et statistiques.

*The Undergraduate Course in Pass Mathematics, Generally, and in relation to Economics and Statistics*[1], by M. A.-L. Bowley, Professor of Mathematics and Economics, at University College, Reading. — A l'Université de Londres, on distingue les étudiants internes, qui reçoivent leur enseignement dans les collèges et écoles de l'Université, et les étudiants externes pour l'enseignement desquels l'Université n'assume aucune responsabilité. Dans ce rapport, l'auteur s'est proposé *a)* de décrire le travail des candidats externes pour les « London Pass Degrees of B. A. and B. Sc. » en ce qui concerne les mathématiques et tel qu'il se fait actuellement, puis d'examiner quels seraient les cours qui leur conviendraient le mieux, *b)* de discuter la préparation mathématique nécessaire à ceux qui s'occupent de statistique appliquée, au point de vue biologique ou économique, et pour ceux qui désirent appliquer le raisonnement mathématique aux théories d'économie politique.

I. *Cours de mathématiques pures pour étudiants externes se préparant pour le « London B. A. ».* — Généralement ces étudiants ont passé le « London Matriculation Examination ». Au bout d'une année de préparation, il se présentent à l' « Intermediate Examination », et deux ans plus tard au « Final Examination ». Le programme de « Matriculation » comprend quelques connaissances d'arithmétique, les premières opérations de l'algèbre, équations du premier et du second degré, progressions, représentations graphiques simples, géométrie plane du triangle, du quadrilatère et du cercle. Pour l' « Intermediate Examination » il faut y ajouter en géométrie les figures semblables et les solides, en algèbre les puissances, logarithmes, intérêts et annuités, permutations et combinaisons, le binôme pour un exposant entier et positif et la théorie des équations du second degré. Mesures de triangles, polygones, cercles et solides réguliers, et trigonométrie jusqu'à la résolution des triangles plans. Représentation graphique de fonctions algébriques simples. Pour le « Final Examination », on exige en outre une connaissance du développement en série du binôme, des séries exponentielles, logarithmiques et trigonométriques (sin. et cos.) et quelques règles de convergence. Un second examen roule sur la géométrie pure et analytique des sections coniques. Il n'y a pas de calcul infinitésimal.

Pour l' « Intermediate Examination » les candidats doivent faire choix de cinq branches, et pour le « Final Examination » quatre; les mathématiques ne constituent pas un sujet obligatoire.

Relativement à la préparation de l' « Intermediate Examination », l'auteur

---

[1] 1 fasc. 14 p.: Price 1 $1/2$ d. ; Wyman & Sons, Londres.

critique certains manuels encombrés d'exercices fastidieux et de formules compliquées auxquels les étudiants consacrent un temps précieux. La préparation du « Final Examination » pourrait se faire en une année au lieu de deux, sauf peut-être pour la géométrie pure.

II. *L'« Undergraduate Course » de mathématiques pures pour les étudiants externes se préparant au « London B. Sc. ».* — Le programme de l' « Intermediate Science » (Sc) est le même que celui de l' « Intermediate Arts » (A) qui a été indiqué plus haut ; mais celui du « Final Examination Sc. » est d'un ordre beaucoup plus élevé que le « Final Examination A. » ; il comprend entre autres le calcul différentiel jusqu'à la série de Taylor dans le cas d'une variable, et le calcul intégral jusqu'à l'évaluation des surfaces et des volumes simples. Les élèves ayant de la difficulté pour les mathématiques abandonnent fréquemment cette branche après l' « Intermediate Examination ».

III. *Les « Undergraduate Courses » en mathématiques tels qu'ils devraient être.* — En ce qui concerne les étudiants en lettres (Arts Students), qui s'occupent plus spécialement de langues ou d'histoire, ces cours devraient être conçus de façon à compléter l'éducation générale. Il faudrait développer avant tout le point de vue logique et critique et les facultés d'analyse et de généralisation. La partie applicative est par contre moins importante. On pourrait supprimer du programme les équations élémentaires compliquées, les annuités, la résolution logarithmique des triangles, les formules de mensuration, et une bonne partie de l'analyse et de la géométrie des sections coniques considérées séparément. L'algèbre pourrait alors comprendre la convergence de quelques séries simples et une étude de la fonction rationnelle entière. La géométrie analytique devrait être liée tout d'abord à l'algèbre, puis aux sections coniques géométriques, et enfin aux propriétés harmoniques.

En géométrie, il suffirait de traiter soigneusement mais brièvement les figures semblables, de considérer la géométrie élémentaire de l'espace et les projections comme un seul sujet et de passer rapidement des quelques propriétés caractéristiques des coniques considérées isolément à une étude projective simple des coniques au point de vue général. En trigonométrie, on se bornerait aux relations des fonctions circulaires entre elles, à leur périodicité et à leur développement en série. Les étudiants les plus capables pourraient en outre entreprendre l'étude de quelques sujets additionnels. En plus de l'examen habituel, il serait bon d'instituer un examen spécial, revêtant plutôt la forme d'un essai.

IV. *Les étudiants en sciences (Science Pass Students).* — Ils peuvent être divisés en deux groupes : ceux qui étudient les sciences physiques (physique et chimie) et ceux dont les études sont d'ordre biologique (zoologie, botanique et physiologie). Les cours relatifs à ces derniers devraient être conçus de façon à développer le bon sens des élèves, et rouler sur des idées simples et bien définies (algèbre graphique, trigonométrie élémentaire, mesures). On attachera de l'importance à l'exactitude du dessin et des mesures ; on ne s'attardera pas aux démonstrations et l'on évitera les formules dont l'utilité n'est pas évidente.

Pour les étudiants en sciences physiques, le plan d'études serait d'un ordre plus élevé. Il serait bon, entre autres, d'y introduire un peu de mécanique. Il est regrettable aussi qu'on ait l'habitude de séparer les mathématiques appliquées des mathématiques pures. Le calcul différentiel devrait être

introduit le plus vite possible. Nous renvoyons le lecteur au rapport même pour ce qui concerne le détail des plans d'études proposés.

V. *Les mathématiques au point de vue de l'économie politique théorique.* — Dans ce paragraphe l'auteur examine *a)* quelle est la préparation mathématique nécessaire pour un étudiant en économie politique, *b)* quelles sont les meilleures méthodes à adopter dans l'analyse mathématique des problèmes d'économie, *c)* le minimum de connaissance nécessaire pour pouvoir suivre l'exégèse mathématique de l'économie théorique.

VI. *Les mathématiques en ce qui concerne la statistique théorique et appliquée.* — Bon nombre de branches mathématiques sont nécessaires actuellement pour l'étude de la statistique. Parmi les plus importantes citons la théorie des probabilités, la géométrie analytique dans son aspect le plus large et comprenant la représentation graphique des fonctions, le calcul infinitésimal avec les maxima et minima, et la théorie des équations. L'auteur nous signale la façon dont se fait, à l'heure actuelle, l'enseignement de ces diverses branches et les modifications qu'on pourrait y introduire.

## N° 26. — La première préparation mathématique des techniciens.

*The Preliminary Mathematical Training of Techninal Students*[1], by Mr P. Abbott. Head of the Mathematical Department at the Regent Street Polytechnic, London. — Les transformations de l'enseignement mathématique en Angleterre, durant ces 15 ou 20 dernières années, et plus spécialement de l'enseignement mathématique des écoles techniques, sont dues en grande partie au Professeur Perry qui introduisit dans les plans d'études les « Practical Mathematics ». Cette branche fut incorporée dans le système d'examens du « Board of Education » et le nombre d'étudiants qui la choisissent croît d'année en année, et cela au détriment des « Pure Mathematics ».

Dans ce rapport, l'auteur s'occupe de la préparation mathématique préliminaire que les élèves reçoivent avant leur entrée dans les institutions techniques. Cet enseignement préparatoire peut se faire aussi, parfois à l'école technique elle-même.

Les élèves qui fréquentent ces écoles peuvent être répartis en deux catégories : les élèves de jour et les élèves du soir. Les premiers ont en général une préparation plus complète que les autres ; ils sont appelés plus tard, du reste, à occuper une position plus élevée, et leur préparation mathématique doit être faite en conséquence.

La majorité de ces élèves de jour ont suivi, avant leur entrée à l'école technique, une « secondary school » quelques-uns sortent d'une « public school » ; leur préparation est généralement très variable, non seulement par l'étendue de leurs connaissances mathématiques, mais aussi par la nature même de cette préparation. C'est pourquoi bon nombre d'instituts techniques fournissent eux-mêmes un enseignement préparatoire, afin de combler ces lacunes.

Les défauts que présente le plus souvent cette préparation consistent en un manque de rigueur, dans le travail et la pensée, l'inaptitude à appliquer la théorie à la résolution de nouveaux problèmes et l'absence de notions

[1] 1 fasc. 17 p.; Price 1 1/2 d. Wyman & Sons, Londres.

claires concernant les principes fondamentaux ; on attache trop d'importance au côté mécanique et pas assez aux applications.

L'auteur nous indique ensuite quel devrait être le champ d'études parcouru par l'élève avant sont entrée à l'école technique (arithmétique, mesures, algèbre et trigonométrie, géométrie, mécanique).

Un certain nombre d'instituts techniques exigent un examen d'entrée, dont l'élève peut être dispensé cependant sur présentation de certificats équivalents ; d'autres se contentent d'une bonne éducation générale. Au fait, les exigences d'entrée sont peu considérables et correspondent à peu près à l'enseignement des « secondary schools ».

Comme on l'a dit plus haut, la plupart des écoles techniques fournissent elles-mêmes un cours préparatoire consistant généralement en une revision du travail que les élèves devraient avoir accompli avant leur entrée dans l'établissement ; cette revision, toutefois, se fait à un point de vue plus technique, et les applications sont plus spécialisées. On trouvera dans le rapport les plans d'études de quelques-uns de ces cours préliminaires provenant d'institutions techniques de diverses villes.

Les élèves qui fréquentent les écoles techniques du soir présentent encore une plus grande diversité d'âge et de connaissances que les élèves de jour. Ils peuvent avoir de 14 à 30 ans et même plus à leur entrée. Le champ de mathématiques qu'on exige de leur part est moins étendu et présente un caractère plus pratique que dans le cas d'élèves de jour. La plupart de ces élèves ont reçu une première préparation aux écoles élementaires ; quelques-uns ont fréquenté également les écoles secondaires, mais un grand nombre interrompent leurs études après l'école élémentaire jusqu'à leur entrée à l'école du soir. Cette longue interruption leur est naturellement très nuisible dans la majorité des villes provinciales ; cependant, la continuité du travail est assurée par des écoles du soir « continuation school », que l'élève peut suivre dès sa sortie de l'école élémentaire puis par un cours technique préliminaire et enfin, dans certaines villes, par un « junior technical course » dans une « branch Technical School ». Dans tous ces cours préliminaires, les mathématiques sont envisagées surtout au point de vue pratique.

Le défaut principal de la préparation mathématique des écoles élémentaires consiste en un manque de rigueur et d'exactitude dû probablement au grand nombre de sujets que le maître est tenu d'enseigner dans ces classes. Il faut dire cependant que, depuis quelque temps, l'enseignement de l'arithmétique dans les écoles élémentaires est placé sur une meilleure base.

La préparation mathématique des classes techniques préparatoires, qu'il s'agisse de « branch technical schools » ou de « continuation schools », est en général satisfaisante ; après les avoir suivies, l'élève peut entrer directement dans la première année de l'école technique proprement dite. On pourra consulter dans le rapport les plans d'études des classes préparatoires de quelques villes (Manchester, Birmingham, Halifax). On les trouvera quelque peu décousus, les différents sujets ne sont pas liés suffisamment les uns aux autres ; l'enseignement de l'algèbre, en particulier, s'y fait d'une façon trop conventionnelle, et les représentations graphiques laissent également à désirer.

Comme on l'a vu plus haut, l'enseignement préparatoire peut se faire aussi à l'école technique même. Cela présente l'avantage d'une plus grande continuité de travail.

Pour terminer, l'auteur formule quelques propositions d'un ordre général. Il recommande l'organisation de laboratoires mathématiques qui rendraient l'enseignement plus actif et plus intéressant. Une coopération intelligente des maîtres de différentes branches serait très avantageuse relativement au côté pratique du sujet. On pourrait aussi constituer des classes spéciales « tutorial classes » destinées aux élèves arriérés et où l'enseignement fût plus individuel. Enfin l'organisation générale des établissements techniques retirerait un grand avantage de la coopération effective des maîtres des différentes écoles (élémentaires, secondaires, « continuation schools » et techniques). Pour cela, il serait nécessaire de constituer un comité-conseil composé de représentants de ces diverses classes de maîtres.

J.-P. Dumur (Genève).

# ITALIE

## Les Manuels de Géométrie à l'usage des Ecoles Secondaires Supérieures.

*Sui libri di testo di geometria per le scuole secondarie superiori. Relazione di* G. Scorza, professore nella R. Università di Cagliari. — La Commission chargée en 1867, par le Ministre de l'Instruction publique, de proposer les programmes de mathématiques pour les *écoles classiques* demanda le retour aux « *Eléments* » d'Euclide, considérant que les manuels du type de ceux de Legendre sont adaptés à un enseignement ayant un but professionnel, tandis que dans les écoles classiques les mathématiques ne peuvent être considérées comme utiles parce qu'applicables aux besoins de la vie, mais comme moyen de culture intellectuelle, comme gymnastique de l'esprit propre à développer le raisonnement et la faculté de discerner la vérité de ce qui n'en a que l'apparence.

Ainsi qu'il résulte d'une confidence de Cremona, membre de la Commission, à Hirst en 1869, cette décision fut moins prise dans l'idée que le traité euclidien représente sans autre la perfection que dans le but d'éloigner une quantité de manuels mal conçus, mal écrits, dangereux pour l'enseignement de la géométrie.

A la fin de 1870 une circulaire ministérielle déclarait le texte euclidien obligatoire pour les six premiers « *Livres* » et laissait aux maîtres le choix d'un bon manuel moderne pour la Géométrie dans l'espace.

Il résulte d'instructions complémentaires, publiées plus tard, que le Ministre n'entendait pas imposer pour les six premiers livres le texte original d'Euclide mais un manuel qui, tout en conservant la méthode de l'œuvre classique, la soumette aux simplifications et amendements nécessaires.

L'auteur ne se propose pas de donner une liste des manuels de géométrie, mais de faire un tableau de l'enseignement de la géométrie qui est devenu en Italie un sujet de légitime satisfaction, il ne suivra donc pas l'ordre chronologique et le développement historique, mais après avoir esquissé un croquis de la tendance générale des principaux manuels, il considérera les théories les plus délicates et les plus importantes de la géométrie élémentaire et indiquera comment elles sont traitées dans chacun d'eux.

La méthode d'Euclide pose comme points de départ des définitions et des postulats aussi généraux que possible et en déduit les conséquences à

travers une suite de théorèmes enchaînés suivant la logique la plus rigoureuse. La forme dogmatique de l'exposition masque la voie qui a conduit à la découverte des propositions.

Il en est ainsi des premiers traités de géométrie élémentaire (Sannia et D'Ovidio ; — Faifofer ; — De Paolis ; — Lazzeri et Bassani ; —) qui introduisent les notions les plus générales de ligne et de surface, puis qui, parmi les lignes définissent la droite, et parmi les surfaces, le plan, à l'aide de postulats.

En présence des résultats de la critique des fondements de la géométrie, il a fallu atténuer le caractère déductif de la méthode et les manuels plus récents (Veronese ; — Ingrami ; — Enriques et Amaldi ; — De Franchis ; — Marletta) ne partent plus de ces notions qui, précisément à cause de leur extrême généralité, ne peuvent être déterminées parfaitement.

Dans ces livres on a choisi comme éléments primitifs les notions géométriques les plus simples (point et droite ; — point, droite et plan ; — point et segment rectiligne) puis on construit et l'on étudie les notions moins simples suivant une méthode que nous n'appellerons pas rationnelle déductive, mais plutôt, avec Enriques : rationnelle (génétique) et inductive.

Les manuels de géométrie ont évolué vers une conception logiquement rigoureuse de la géométrie élémentaire, le perfectionnement de l'enchaînement des déductions est allé assez loin pour que plusieurs des livres cités ci-dessus puissent être considérés comme des modèles de rigueur. Celui de MM. Enriques et Amaldi, par exemple, satisfait à la fois aux exigences de la science et à celles de l'enseignement, il atteint aussi bien l'exactitude logique qu'une clarté et une simplicité parfaites.

Bien que l'idéal vers lequel tendent ces exposés soit un système hypothétique déductif formellement parfait, les auteurs n'ont pas méconnu la grande importance de l'intuition ; depuis l'exemple donné par Veronese, l'énoncé des propositions primitives est précédé des observations empiriques qui les préparent.

Dans la plupart des manuels la géométrie plane et la géométrie dans l'espace sont traitées séparément, cependant la « *fusion* » est pratiquée dans deux d'entre eux : celui de Paolis (1884) qui ne fait guère qu'une juxtaposition, et celui de Lazzeri et Bassani (1891) où la fusion devient une véritable pénétration sans avoir atteint le degré d'intimité et de profondeur qu'on peut encore espérer.

La grande variété des questions que la géométrie élémentaire doit traiter et la multiplicité des principes fondamentaux qu'elle doit introduire à cet effet, lui donnent un aspect fragmentaire que Veronese a tenté d'atténuer par l'application du principe de dualité et l'introduction de la notion de correspondance biunivoque dans l'étude de l'égalité et de la similitude. L'expérience faite jusque dans ce domaine, comme dans celui de la fusion, est encore si minime qu'on doit en attendre beaucoup pour l'avenir.

*La théorie de l'Egalité.* — Euclide évite d'introduire la notion de mouvement dans ses démonstrations, trois seulement de ses théorèmes sont démontrés par superposition.

Dans les manuels de Sannia et D'Ovidio ; — Faifofer ; — De Paolis ; — Lazzeri et Bassani ; — le mouvement est introduit comme notion primitive, conformément aux vues de Helmoltz, et placé à la base de la théorie des figures congruentes.

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un mouvement, mais d'un déplace-

ment dans lequel la position initiale et la position finale seules importent, la notion de mouvement ne se trouve pas complètement analysée par ces auteurs, on s'est efforcé par la suite d'en délivrer la théorie de l'égalité géométrique.

Veronese ; — Ingrami ; — Enriques et Amaldi ; — Marletta l'évitent complètement.

Dans le système de Veronese, par exemple, le point et la droite sont les notions fondamentales, au moyen desquelles on construit le plan et l'espace, la théorie de l'égalité s'établit d'abord pour la droite, un groupe de postulats convenables permet d'établir la théorie des opérations entre segments d'une droite. On passe à l'égalité des figures rectilignes puis des figures quelconques en introduisant la correspondance biunivoque.

Enriques et Amaldi, pour éviter la notion abstraite de correspondance, à cause des difficultés didactiques, s'inspirent en partie des classiques « Grundlagen » de Hilbert, et considèrent comme primitive la notion de segments et d'angles égaux, puis ils définissent au fur et à mesure que l'occasion s'en présente : les triangles, les circonférences, les polygones égaux, etc...

De Franchis introduit les mouvements comme « *transformations* » et restreint la notion d'égalité à celle de superposabilité, il réussit à conserver, tout en les rendant rigoureux, les procédés de démonstration qui avaient fait introduire le mouvement explicitement dès les premiers éléments.

*La théorie de l'équivalence.* — Euclide considère comme primitive la notion d'égalité d'aire ou de volume ; on a continué à le faire en distinguant plus nettement, pour éviter toute équivoque : figures congruentes et figures équivalentes.

Les manuels les plus récents ont donné à cette théorie une assise qui concilie les exigences didactiques et les exigences scientifiques ; le plus souvent, comme Sannia et D'Ovidio par exemple, ils font *3 genres*, des grandeurs considérées en géométrie élémentaire :

*1er genre :* Segments rectilignes, angles, plans et dièdres, arcs et secteurs de circonférences égales, fuseaux et onglets de sphères égales, etc..., c'est-à-dire toutes les grandeurs pour lesquelles l'équivalence se réduit à la congruence ou superposabilité.

*2e genre :* Les polygones plans, les polygones sphériques de sphères égales, les prismes, les pyramides sphériques de sphères égales ; — les figures de ce genre sont dites équivalentes lorsqu'on peut les décomposer en un même nombre (sous-entendu fini) de parties respectivement égales.

*3e genre :* Longueurs des circonférences, superficies des corps ronds (cône, cylindre et sphère), volume des polyèdres généraux et des corps ronds.

La plupart des traités introduisent ici la notion de *limite* (classes contiguës, variables convergentes, limites supérieure et inférieure d'une classe) et définissent comme équivalentes les figures comprises entre les mêmes classes contiguës ou qui sont limites des mêmes variables convergentes.

MM. Enriques et Amaldi, considérant que ces méthodes ont un caractère moins géométrique et sont moins élégantes que les procédés classiques des Grecs, se sont efforcés de revenir à la méthode d'exhaustion, en la formulant conformément aux exigences de la plus rigoureuse logique.

*La théorie des proportions.* — Cette théorie la plus parfaitement traitée dans les éléments d'Euclide a été maintenue dans tous les manuels modernes.

Dans le livre de MM. Enriques et Amaldi, la théorie des proportions est

ramenée au rôle qu'elle avait dans la géométrie grecque, dans la théorie de la mesure, on la met à profit pour établir une théorie synthétique des nombres réels.

MM. Lazzeri et Bassani font dépendre la théorie des proportions entre grandeurs de la théorie des proportions numériques.

Veronese choisit une voie intermédiaire entre les deux précédentes, après avoir introduit la conception de limite, en utilisant les classes contiguës.

E. Chatelain (La Chaux-de-Fonds).

# JAPON

## L'enseignement des Mathématiques au Japon.

*Summary report on the teaching of mathematics in Japan*[1], by R. Fujisawa.

On sait que la Commission internationale de l'Enseignement mathématique publia son *Rapport Préliminaire* en novembre 1908. Peu de temps après, les diverses Sous-Commissions nationales se formèrent et commencèrent leurs travaux dans la plupart des principaux pays du monde. Au Japon, cependant, la traduction du Rapport Préliminaire ne fut publiée qu'en octobre 1910 et fut distribuée, au nombre de 500 exemplaires environ, dans les différentes écoles du pays. Il en résulta plus de 200 rapports qui furent envoyés aux membres de la Sous-Commission japonaise, qui répartit le travail entre un certain nombre de divisions correspondant aux divers types d'écoles. Ces comités rédigèrent chacun un rapport spécial, en japonais. Ces rapports spéciaux, au nombre de 15, ont été publiés en japonais et en anglais[2]; ils forment le premier volume publié par la Sous-Commission japonaise. Le tome II constitue en quelque sorte un résumé de ces 15 rapports, mais on y trouve aussi diverses considérations non contenues dans les rapports.

Le système d'éducation japonais est caractérisé par la centralisation presque absolue de l'autorité en matière éducative. Le ministre de l'Education qui est à la tête du département de l'Education et membre du Cabinet Impérial, est chargé, directement ou indirectement, de l'administration de toutes les affaires touchant à l'éducation. Il est assisté par un vice-ministre, plusieurs directeurs de bureaux et un grand nombre de conseillers et secrétaires.

Le département de l'Education ne fut établi d'une façon définitive qu'en septembre 1871. L'année suivante parut le premier « Code d'Education » stipulant la division du pays en 8 grands districts possédant chacun une université, chacun de ces districts étant subdivisés en 32 districts intermédiaires possédant tous une école secondaire, chacun d'eux étant à leur tour divisés en 210 petits districts ayant chacun une école élémentaire.

Naturellement, ce système d'éducation ne put pas être appliqué à la lettre, de trop grandes difficultés s'étant présentées; toutefois, en ce qui concerne l'instruction élémentaire, il fut bien graduellement mis en pratique dans ses grandes lignes.

Si nous passons en revue les principaux établissements d'éducation, nous

[1] 1 vol. 238 p., Tokio, 1912, 12 fr.; en dépôt à la Librairie Georg et Cie, Genève.

[2] Report on the teaching of mathematics in Japan, prepared by the Japanese Subcommission. — 1 vol. de 550 p., 30 fr.; Georg et Cie, Genève.

trouvons d'abord l'*Ecole Elémentaire*, qui se divise en Ecole Elémentaire Ordinaire et Ecole Elémentaire Supérieure. La première est obligatoire et comprend six années, on y entre à l'âge de six ans. La seconde, d'une durée de deux ans avec faculté de prolonger encore d'une année, est destinée aux élèves n'ayant pas l'intention de poursuivre plus loin leurs études. Dans l'éducation élémentaire il n'est pas fait de distinction de sexe ; plus tard, les garçons et les filles reçoivent une instruction distincte.

Puis vient l'*Ecole Moyenne*, commençant à l'âge de treize ans et durant cinq années ou une année de plus si on le désire. Les élèves y reçoivent encore une éducation générale, par le fait qu'on n'y trouve pas de division en sections et qu'il n'est par conséquent pas tenu compte de la future profession des élèves.

Au-dessus de l'école moyenne se trouve l'*Ecole Moyenne Supérieure* qui dure trois ans et comprend plusieurs cours préparatoires conduisant aux diverses facultés de l'Université.

Il existe actuellement *quatre universités* au Japon, celles de Tokio, Kioto, Kiushiu et Tohoku. Les deux dernières sont de fondation récente et ne possèdent que deux facultés plus ou moins complètes. L'Université impériale de Tokio est la plus ancienne institution de ce genre ; elle renferme six facultés, droit, médecine, faculté technique, lettres, sciences et agriculture.

En ce qui concerne sa division en diverses facultés, l'université japonaise est assez semblable à l'université allemande. D'une façon générale, chaque faculté est divisée en un certain nombre de sections ; ainsi la faculté des sciences comprend les mathématiques, l'astronomie, la physique, la chimie, la botanique, la zoologie et la géologie. Les études universitaires durent quatre ans pour la médecine (excepté la pharmacie) et le droit, et trois ans pour les autres facultés (et en pharmacie également).

L'étudiant, après avoir choisi sa faculté, est obligé de poursuivre ses études d'après un programme déterminé. Ce procédé contraste donc d'une façon caractéristique avec l' « akademische Freiheit » du système allemand. Il faut ajouter, cependant, qu'il se fait actuellement au Japon un certain mouvement en faveur d'une plus grande liberté. Le caractère spécial que présente actuellement l'uiversité japonaise est dû à ce que l'éducation y est en quelque sorte professionnelle, c'est-à-dire qu'elle conduit directement à telle ou telle profession.

A la fin de ses études universitaires, l'étudiant obtient un grade, à condition d'avoir passé avec succès les examens annuels et l'examen final, ce dernier étant souvent accompagné d'une thèse ou d'un essai ; il reçoit alors le titre de « gakushi », qui signifie simplement gradué d'une faculté universitaire.

L'école moyenne supérieure qui est donc une préparation à l'université se divise en trois sections, l'une correspond aux facultés de droit ou des lettres, la seconde à la faculté technique ou à celles des sciences, d'agriculture ou de pharmacie et la troisième à la faculté de médecine. Toutefois, conformément à un projet de réforme, il n'y aura bientôt plus que deux sections distinctes.

Ainsi, le tronc du système d'éducation au Japon se compose de l'école élémentaire, l'école moyenne, l'école moyenne supérieure et l'université. En outre, nous trouvons au bas de l'échelle le Kindergarten, et en haut l' « University Hall » pour les étudiants gradués qui désirent poursuivre

leurs études et entreprendre des investigations originales. A côté de cela, il existe encore de nombreux établissements d'éducation, telles que les écoles de filles, les écoles normales, les écoles techniques, etc.

L'auteur aborde ensuite d'une façon plus spéciale l'enseignement mathématique dans les différents établissements d'instruction.

Dans les *écoles élémentaires*, la seule branche de mathématiques est l'arithmétique. Le mot arithmétique a une signification variable suivant les pays ; il s'agit ici de la branche connue généralement en Angleterre et en Amérique sous le nom d'arithmétique pratique.

Au Japon, deux sortes de calcul sont en usage, le calcul écrit ordinaire et le calcul effectué à l'aide d'un instrument primitif spécial, le « soroban » composé d'un certain nombre de tiges fixées dans un cadre et servant d'axes à des sortes de boules mobiles. L'auteur nous fournit toutes les explications nécessaires relatives à l'usage de cet instrument et sur la façon de s'en servir pour effectuer les diverses opérations.

Lors de la régénération du Japon, cette méthode de calcul fut l'objet de violentes attaques ; on prétendit que cette façon de procéder était purement mécanique et ne pouvait contribuer au développement mental des élèves. Cependant, si l'on avait soin d'expliquer convenablement les principes sur lesquels ce calcul est basé, il contribuerait pour le moins autant que le calcul ordinaire à la culture intellectuelle des écoliers ; la question est de savoir comment l'incorporer d'une façon plus effective dans le programme d'arithmétique sans qu'il en résulte une surcharge excessive. Pour le moment, c'est le calcul écrit qui joue le rôle principal dans l'éducation élémentaire ; le calcul sur le « soroban » ne lui est associé que comme un accessoire indispensable.

Avant de passer aux détails concernant l'enseignement de l'arithmétique dans les écoles élémentaires, l'auteur nous donne quelques renseignements sur les manuels en usage et sur le système qui est en vigueur actuellement au Japon au sujet de leur publication (State text-book system). Ce système est loin d'être la perfection, il faut espérer qu'il se modifiera et qu'on tiendra mieux compte dorénavant des efforts de personnalités compétentes travaillant pour le progrès de l'éducation élémentaire.

La première année de l'école élémentaire a pour objet de familiariser l'enfant avec les nombres ne dépassant pas 100, elle comprend aussi le calcul mental avec nombres non supérieurs à 20, et les éléments de l'addition et de la soustraction. La seconde année est consacrée à la numération jusqu'à 1000, au calcul mental sur les nombres ne dépassant pas 100 et les éléments de la multiplication et de la division. Dans la troisième année, on s'occupe des quatre opérations sous forme écrite et sur les nombres inférieurs à 10,000. Dans la quatrième on opère sur les nombres inférieurs à 100,000,000 et l'on entreprend le calcul des nombres composés et des nombres décimaux. La cinquième année comprend des calculs sur les nombres entiers, composés et décimaux, et applications pratiques sur les poids et mesures. Enfin le calcul des fractions et pourcentages ainsi qu'une revision générale font l'objet de la sixième année.

Comme nous l'avons vu, ces six années d'école élémentaire sont obligatoires, après cela, l'élève peut entrer directement à l'école moyenne. Cependant ceux qui n'ont pas l'intention d'entreprendre des études secondaires peuvent encore faire deux ou trois années d'école élémentaire supérieure. La première année comprend une revision et une continuation de la

sixième année de l'école élémentaire avec, en plus, le calcul des proportions. Dans la seconde année on s'occupe en outre des proportions composées et des alliages, et dans la troisième des mesures, racines carrées et cubiques. Le calcul sur « soroban » et la tenue de livres, dans les cas les plus simples, peuvent être aussi inclus dans le programme.

Avant d'aborder l'école moyenne, l'auteur consacre quelques remarques à l'extension graduelle du domaine des nombres, à la table de multiplication japonaise qui présente certaines particularités, et à l'introduction des fractions décimales qui se fait de bonne heure au Japon, tandis qu'on attache moins d'importance aux fractions ordinaires, introduites du reste beaucoup plus tardivement.

Les *écoles moyennes*, au nombre de plus de 300, fournissent une éducation générale supérieure. On y enseigne la morale, le japonais et le chinois classique, une langue étrangère (anglais, allemand ou français), l'histoire, la géographie, les mathématiques, l'histoire naturelle, la physique et la chimie, le droit et l'économie politique, le dessin, le chant et la gymnastique. Les mathématiques comprennent l'algèbre, la géométrie et la trigonométrie. Pour les détails de cet enseignement, nous renvoyons le lecteur au rapport lui-même. Il s'est fait dernièrement (1912) une revision des plans d'études et l'auteur fait quelques observations à ce sujet. Pour les mathématiques, le trait caractéristique de cette revision a été la fusion de l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie. Il est naturel de chercher à établir un lien entre les différents sujets d'enseignement de l'école moyenne, et cela s'applique également, jusqu'à un certain point, à différentes branches des mathématiques. Il ne faudrait cependant pas aller trop loin, car, en dépassant la limite, cet excellent principe pourrait avoir des conséquences fâcheuses. En effet, une jeune intelligence recherche avant tout la simplicité, et un fusionnement des différentes branches représente une complication. Il serait donc préférable de maintenir les matières séparées à l'école moyenne, autant du moins que la nature même du sujet le permet.

Durant les premières années de la restauration du Japon, les écoles correspondant aux écoles moyennes actuelles étaient l'Ecole de langue étrangère (Foreign Language School), les Ecoles de langue anglaise (English Language Schools) et quelques autres. L'école de langue étrangère n'était pas, comme son nom semble l'indiquer, une école où l'on enseignait exclusivement les langues étrangères; c'était un établissement fournissant une instruction générale en différentes langues étrangères. Il faut noter à ce propos l'influence française sur l'enseignement des mathématiques au Japon, par l'intermédiaire de l'éducation militaire qui fut modelée à l'origine sur le système français.

En dehors des écoles où l'on utilisait les langues étrangères, l'arithmétique était enseignée à l'aide de livres écrits en japonais et ne renfermant que des exercices et problèmes sans aucune explication. Peu à peu, cependant, quelques manuels japonais furent publiés et l'instruction donnée en langue étrangère se transforma graduellement en une instruction faite en japonais. Le retour d'Angleterre du Dr Kikuchi (actuellement Baron) en 1877 marque le commencement d'une nouvelle période. Il avait étudié les mathématiques pendant quelques années à Cambridge, il fut le promoteur d'une réorganisation de l'enseignement mathématique au Japon et il s'efforça de l'adapter aux circonstances et conditions spéciales de son pays. Son livre de géométrie qui parut en 1888-89 fait époque à ce point de vue-là. En 1888

également, l'auteur de ce rapport fut chargé officieusement par le Département de l'Education d'écrire un manuel d'arithmétique et d'algèbre élémentaire. Il déclina l'offre en ce qui concerne l'algèbre, mais il résolut de consacrer ses moments disponibles à l'élaboration d'un manuel d'arithmétique japonais. A ce propos, le rapport fournit d'intéressants renseignements sur les méthodes d'enseignement de l'arithmétique en Angleterre, en Amérique, en France et en Allemagne à l'époque où ces méthodes furent introduites au Japon.

Le chapitre suivant s'occupe des traits caractéristiques de l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie et la trigonométrie telles qu'elles sont enseignées dans les écoles moyennes japonaises.

Puis l'auteur aborde l'enseignement mathématique dans les *écoles moyennes supérieures* qui forment, comme nous l'avons dit plus haut, l'intermédiaire entre les écoles moyennes et les diverses facultés des universités de l'empire.

Il en existe actuellement huit, celles de Tokio, Sendai, Kioto, Kanazawa, Kumamoto, Okayama, Kagoshima et Nagoya. Il existe en outre une école préparatoire du même genre faisant partie de la faculté d'agriculture de l'Université impériale du Nord-Est.

Théoriquement la maturité de l'école moyenne est un certificat suffisant pour permettre l'entrée à l'école moyenne supérieure, mais en pratique, les élèves ont à passer un examen très sévère de compétition qui en élimine une bonne partie. Nombreux sont les candidats qui se présentent plusieurs années de suite avant d'être acceptés.

Comme nous l'avons vu, l'école moyenne supérieure se divise en trois sections (departments). Dans la première section nous trouvons les branches suivantes : morale, japonais, chinois classique, langues étrangères, histoire, logique, psychologie, éléments de droit et d'économie politique, gymnastique. Dans la deuxième : morale, japonais, langues étrangères, mathématiques, physique, chimie, géologie, minéralogie, dessin et gymnastique. Dans la troisième : morale, japonais, langues étrangères, latin, mathématiques, physique, chimie, zoologie, botanique et gymnastique.

L'enseignement des mathématiques dans les écoles moyennes supérieures concerne principalement les élèves de la seconde section. Cette branche est également enseignée dans la troisième section, mais elle y joue un rôle moins important. Dans la première section enfin, elle n'est enseignée qu'à un petit nombre des élèves, et encore ces derniers n'en font-ils que très peu.

Dans la seconde section, le plan d'étude comprend la trigonométrie, l'algèbre, la géométrie analytique et le calcul différentiel et intégral. En trigonométrie, il est fait usage du manuel « Plane Trigonometry for the use of colleges and schools » de Todhunter.

L'algèbre comprend l'algèbre proprement dite et la théorie des équations. En géométrie analytique, la tendance actuelle consiste à étudier le sujet dans ses éléments métriques et projectifs et à envisager les propriétés projectives à un point de vue plus général. L'enseignement du calcul différentiel et intégral enfin devrait se faire d'une façon plus effective ; le défaut de cet enseignement est dû, semble-t-il, à l'absence de manuels convenables.

Dans la troisième section, nous retrouvons les mêmes sujets que dans la seconde section, mais le temps consacré aux mathématiques est moins considérable.

Dans la première section enfin, les mathématiques ne sont enseignées qu'aux étudiants qui se proposent de suivre le cours de philosophie dans

une faculté des lettres. Il ne s'agit ici que des rudiments de géométrie analytique et de calcul infinitésimal.

Le chapitre suivant du rapport est consacré à l'enseignement des mathématiques dans les *facultés universitaires*. L'université de Tokio comprend un « University Hall » et six facultés : droit, médecine, faculté technique, lettres, sciences et agriculture. Celle de Kioto possède un « University Hall et quatre facultés, droit, médecine, lettres et science technique. L'université de Tohoku n'a que deux facultés, science et agriculture, et celle de Kiushiu également deux, médecine et faculté technique.

Nous ne pouvons songer à reproduire dans ce résumé les renseignements détaillés qui nous sont fournis sur l'enseignement des mathématiques dans les diverses facultés de ces quatre universités.

Primitivement, l'auteur pensait encore écrire quelques chapitres sur d'autres sujets tels que l'éducation des jeunes filles, les écoles normales, les écoles industrielles, la préparation des maîtres des écoles moyennes, etc. Il s'était documenté dans ce but et avait pris diverses informations. Malheureusement, le temps trop court dont il disposait ne lui a pas permis de donner suite à ses intentions. Toutefois on trouvera dans un dernier chapitre, sous une forme plus ou moins fragmentée, d'intéressants renseignements sur ces différents sujets.

J. P. Dumur (Genève).

---

## Cours universitaires.

### Semestre d'hiver 1913-1914 (suite).

## ALLEMAGNE

**Berlin**; *Universität*. — Cohn : Bahnbestimmung der Himmelskörper, 3; Uebg., 2. — Fœrster : Geschichte der alten Astronomie, 2; Zur astron. Messkunst, 1; Polarlicht und Tierkreislicht, 1. — Frobenius : Zahlentheorie, 4; Seminar. — Hellmann : Allg. Meteorologie und Klimatologie, 3; Meteorolog. Colloquium, 1. — Helmert : Gradmessungen, 1; Geodät. Dreiecke, 1. — Planck : Elektrizität und Magnetismus, 4; Uebg., 1. — Rubens : Mathem. Ergänzung zur Experimentalphysik, 1; Physik. Colloquium. — Schottky : Ellipt. Funktionen, 4; Raumkurven und Flächen, 4. — Schwarz : Analyt. Geometrie, 4; Synth. Geometrie, 4; Anwendungen der ellipt. Funktionen, 1; Mathem. Colloquien, 4; Seminar. — Struve : Einleitung in die Theorie der Satelliten, 3. — Wehnelt : Mathem. Ergänzungen zum physik. Praktikum, 1. — Schwarzschild : Stellarastronomie, 1. — Lehmann-Filhès : Integralrechnung, 4; Determinanten, 4. — Schmidt : Elementare Theorie und Anwendungen der Kugel- und Zylinderfunktionen, 2; Das Innere der Erde, 1. — Hettner : Wahrscheinlichkeitsrechnung und Theorie der Beobachtungsfehler, 2. — Knoblauch : Differentialrechnung, 4; Ellipt. Funktionen, 4; Quadratur des Kreises, 1. — Byk : Mathem. Behandlung der Naturwissenschaften, 1. — Henning : Einführung in die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der Physik, 1. — Knopp : Funktionentheorie II, 4; Algebra, 4. — Krigar-Menzel : Mechanik der Massenpunkte

und starren Körper, 4. — Marcuse : Geograph. Ortsbestimmung, 1 1/2; Allgemeine Himmelskunde, 1 1/2. — Weinstein : Das Relativitätsprinzip und die Physik der bewegten Materie, 3; Geschichte der Physik im 19. Jahrhundert, 1. — Witt : Bahnbestimmung von Kometen und Planeten, 3.

**Bonn**; *Universität.* — Study : Differentialgeometrie, 2; Höh. Geometrie, 1; Funktionentheorie, 4; Seminar. — London : Analyt. Geometrie, 4; Uebg. dazu, 1; Synthet. Geometrie, 2; Uebg. dazu, 1; Seminar. — Schur : Diff. und Integralrechnung II, 4, mit Uebg., 1; Lineare Substitutionen und Elementarteiler, 2. — Müller : Determinantentheorie, 2; Variationsrechnung, 3. — Ruhm : Rechnerische und zeichnerische Methoden der technischen Mechanik mit Uebg , 2. — Küstner : Sphär. Astronomie, 3; Fixsternkunde, 1. — Mönnichmeyer : Prakt. Uebungen im astron. Beobachten; Gebrauch der astron. Jahrbücher. — Pflüger : Mechanik, 5.

**Braunschweig**; *Technische Hochschule.* — Dedekind : Elemente der Zahlentheorie, 2; Einleitung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1. — Fricke : Analyt. Geometrie und Algebra, 4; Diff. und Integralrechnung, 4, mit Uebg., 2. — Timerding : Algebra, 2; Geometrie der Lage, 2; Darst. Geometrie, 4, mit Uebg., 6. — Wernicke : Statik starrer und elastischfester Körper, 4, mit Uebg., 2. — Schlink : Techn. Mechanik II, 3, mit Uebg., 2. — Witte : Analyt. Mechanik, 2. — Näbauer : Grundzüge der Geodäsie, 2, mit Uebg., 2. — Weber : Potentialtheorie, 2.

**Breslau**; *Universität.* — Sturm : Analyt. Geometrie der Ebene, 4; Zahlentheorie, 2. — Kneser : Variationsrechnung, 4; Determinanten, 2; Seminar. — Schmidt : Ellipt. Funktionen, 4; Mengenlehre, 2; Seminar. — Schnee : Integralrechnung, 4, mit Uebg., 2. — Steinitz : Analysis situs und Polyeder, 3, nebst Uebg., 1.

**Dresden**; *Technische Hochschule.* — Grübler : Technische Mechanik I, 4. und III, 2, mit Uebg., 1; Einführung in die Elastizitätslehre, 1. — Heger : Ebene Kurven 3. Ordnung, 1. — Helm : Höh. Mathematik IV, 3, mit Uebg., 1; Potentialtheorie, 2; Physikal. Kolloquium. — Krause : Höh. Mathematik II, 4, Uebg., 2; Höh. Algebra, 4; Seminar. — Ludwig : Darst. Geometrie II, 3, mit Uebg., 4; Perspektive, 1; Analyt. Geometrie der Flächen II. Grades, 3; Geschichte der Mathematik im Altertum, 1.

**Erlangen**; *Universität.* — Nœther : Analyt. Geometrie I, 4; Analyt. Mechanik II, 4; Uebg. dazu; Seminar. — Fischer : Diff. und Integralrechnung I, 4; Zahlentheorie, 4; Seminar. — Baldus : Darst. Geometrie I, 4; Uebg. dazu, 2; Elementarmathematik vom höh. Standpunkt, 2; Polit. Arithmetik, 1, mit Uebg., 1; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2, mit Uebg., 1.

**Freiburg i. Br.**; *Universität.* — Stickelberger : Differentialrechnung, 4, mit Uebg.; Infinitesimalgeometrie, 3. — Heffter : Synt. Geometrie, 4; Algebra der Formen, 3; Seminar. — Bolza : Variationsrechnung, 3, mit Uebg. — Lœwy : Analyt. Geometrie des Raumes, 4, mit Uebg.; Einführung in die Versicherungsmathematik, 2.

**Giessen**; *Universität.* — Schlesinger : Diff. und Integralrechnung, 4, mit Uebg., 1; Bestimmte Integrale, 2; Seminar. — Engel : Analyt. Geometrie des Raumes, 1; Höh. Algebra, 4; Partielle Differentialgleichungen, 3; Seminar. — Grassmann : Analyt. Mechanik II, mit Uebg., 5; Konforme Abbildungen mit Anwendungen auf Kartenprojektion, 3, mit Uebg.

**Göttingen** ; *Universität.* — Voigt : Potentialtheorie, 4 ; Uebg. dazu, 2. — Hilbert : Analyt. Mechanik, 4 ; Elektromagnetische Schwingungen, 2. — Runge : Diff. und Integralrechnung 2. Teil, 6 ; Mechanik der Continua, 2 ; Spektroskopie, 2. — Wiechert : Vermessungswesen, 4 ; mathem.-phys. Seminar. — Prandtl : Hydrodynamik und Aerodynamik, 3 ; Mechanikpraktikum, 3 ; Seminar ; Luftfahrtskolloquium, 1. — Landau : Zahlentheorie, 4 ; Seminar. — Hartmann . Allg. Astrophysik, 1 ; Astrophysikalisches Praktikum, 3 ; Astronom. Uebg., 3 ; Astronom. Seminar. — Carathéodory : Projekt. Geometrie, 4 ; Konforme Abbildungen, 4 ; Seminar. — Ambronn : Bahnbestimmungen der Kometen und Planeten, 2, mit Uebg., 2 ; Astron. Uebg. für Anf. — Bernstein : Mathem. Statistik u. Versicherungsmathematik, 3 ; Ausgew. Kapitel d. Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1 ; Versicherungsrechn., 2 ; Seminar. — Nachtweh : Einführung in die Technologie und Technik, 2. — Tœplitz : Partielle Differentialgleichungen (einschl. Integralgleichungen, 4 ; Elementarmathematik v. höh. Standpunk, 4. — Born : Grundzüge der mathem. Physik II, 4. — Von Sanden : Graphische Statik, 3 ; Uebg., 2 ; Vektoranalysis, 2. — Rümelin : Einführung in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften mit Uebg., 3. — Courant : Unendliche Reihen und Anwendungen, 4 ; Uebung und Anwendung der Differentialgleichungen. — Hertz : Strahlungstheorie und Quantentheorie, 2. — Hecke : Uebg. zur Mechanik, 2 ; Histor. Entwicklung der mathem. Grundbegriffe, 2.

**Greifswald** ; *Universität.* — Vahlen : Analyt. Mechanik, 4 ; Gleichungen, 5. Grades, 1 ; Seminar. — Hausdorff : Funktionentheorie, 4 ; Algebraische Zahlen, 2 ; Seminar. — Thær : Diff. und. Integralrechnung, 4 ; Uebg., 1 ; Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, 2.

**Halle** ; *Universität.* — Wangerin : Integralrechnung mit Uebg., 4 ; Synth. Geometrie, 3 ; Analyt. Mechanik II, 2 ; Seminar. — Gutzmer : Anwendung der ellipt. Funktionen, 2 ; Zahlentheorie, 4 ; Seminar. — Eberhard : Analyt. Geometrie des Raumes, 4, mit Uebg., 1. — Pfeiffer : Graph. Statik, 4, mit Uebg., 4. — Buchholz : Theorie der Bahnbestimmung der Himmelskörper. 1 ; Störungstheorie, 2.

**Heidelberg** ; *Universität.* — Königsberger : Analyt. Mechanik, 4 , Diff. und Integralrechnung II, 3 ; Unter- und Ober-Seminar. — Stäckel : Krumme Linien und Flächen, 4 ; Einführung in die Integralgleichungen, 2 ; Unter- und Ober-Seminar. — Kœhler : Analyt. Geometrie des Raumes, 4. — Bœhm : Diff. und Integralrechnung, 4 ; Ellipt. Funktionen, 3 ; Numerisches Rechnen, 2. — Kopff : Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, 1. — Bopp : Nichteuklidische Geometrie, 2. — Wolf : Elemente der Astronomie, 3.

**Jena** ; *Universität.* — Thomæ : Ellipt. Funktionen mit Anwendungen, 5. — Haussner : Algebra, 4 ; Diff. und Integralrechnung II mit Uebg., 5 ; Analyt. Geometrie des Raumes, 4 ; Proseminar ; Seminar. — Frege : Analyt. Mechanik I, 4 ; Begriffsschrift, 1. — Winkelmann : Techn. Mechanik I mit Uebg., 5 ; Näherungsmethoden mit numer. und graph. Uebg., 3. — Knopf : Berechnung des scheinbaren Laufs der Planeten und Kometen, 2 ; Sphär. Astronomie, 2 ; Interpolationsrechnung und mechan. Quadratur, 1. — Wien : Physikal. Kolloquium.

**Karlsruhe** ; *Technische Hochschule.* — Krazer : Höh. Mathematik I, 6, mit Uebg., 2 — Fueter : Höh. Mathematik II, 3 ; Partielle Diff'gleichungen

mit Anwendungen, 2. — DISTELI : Darst. Geometrie, 4, mit Uebg., 4 ; Graph. Statik, 2, mit Uebg., 2. — HEUN : Mechanik, 4, mit Uebg., 2 ; Seminar. — VOGT : Elementare und analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, 2, mit Uebg., 1 ; Projekt. Geometrie, 2. — NŒTHER : Elemente der Mechanik, 3, mit Uebg., 1. — HAUPT : Arithmetik und Algebra, 2, mit Uebg., 1 ; Ebene und sphär. Trigonometrie, 2, mit Uebg., 1 ; Uebg. in den Grundlehren der höh. Mathematik, 2.

**Kiel** ; *Universität*. — POCHHAMMER : Bestimmte Integrale, 4 ; Analyt. Mechanik, 4 ; Seminar. — JUNG : Integralrechnung, 4, Ellipt. und algebr. Funktionen, 4 ; Seminar. — N. N. : Analyt. Geometrie des Raumes, 4 ; Höh. Algebra, 3. — NEUENDORFF : Ausgew. Kapitel der techn. Mechanik II mit Uebg., 3 ; Uebg. und Vorträge aus der angewandten Mathematik, 1. — HARZER : Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung, 3 ; Differenzenrechnung, 1. — KOBOLD : Theorie der Bahnbestimmung, 2 ; Uebg. dazu, 2. — WILKENS : Theorie der Satellitenbewegungen, 1.

**Königsberg** ; *Universität*. — MEYER : Analyt. Geometrie II mit Uebg., 4 ; Einleitung in die Zahlentheorie, 4 ; Seminar ; Mathem. Gesellschaft. — N. N. : Integralrechnung mit Uebg., 4 ; Seminar. — KALUZA : Angew. Mathematik II, 4 ; Projekt. Geometrie, 2 ; Vektoranalysis, 2. — BATTERMANN : Allgem. Astronomie, 1 ; Sphär. Astronomie, 2.

**Leipzig** ; *Universität*. — ROHN : Analyt. Geometrie des Raumes, 4, mit Uebg., 1 ; Determinanten, 2 ; Seminar. — HÖLDER : Diff. und Integralrechnung, 5, mit Uebg., 1 ; Partielle Differentialgleichungen, 2 ; Seminar. — HERGLOTZ : Differentialgeometrie, 3 ; Mechanik, 5 ; Seminar. — von OETTINGEN : Geom.-perspektiv. Zeichnen, 1. — KŒBE : Ellipt. Funktionen mit Anwendungen, 5 ; Seminar. — KÖNIG : Höh. Algebra, 2. — BRUNS : Allg. Astronomie, 4 ; Prakt. Arbeiten in der Sternwarte. — WIENER : Mathem. Ergänzungen zur Vorlesung über Experimentalphysik, 1.

**Marburg** ; *Universität*. — HENSEL : Analyt. Geometrie des Raumes, 4 ; Allg. Theorie der Kurven und Flächen, 4 ; Proseminar. — NEUMANN : Diff. und Integralrechnung II mit Uebg., 5 ; Algebr. Gleichungen, 4 ; Seminar. — von DALWIGK : Mechanik II, 2 ; Perspektive und Photogrammetrie mit Uebg., 4. — HELLINGER : Höh. Funktionentheorie, 4 ; Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, 2 ; Uebg.

**München** ; *Universität*. — LINDEMANN : Diff. und Integralrechnung, 5 ; Differentialgeometrie, 4 ; Ueber Linien- und Kugelgeometrie, 2 ; Seminar. — VOSS : Algebra, 4 ; Einleitung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, 4 ; Seminar. — PRINGSHEIM : Grundlagen der Arithmetik und Analysis, 4 ; Ellipt. Funktionen, 4. — SOMMERFELD : Mechanik, 4 ; Ausgewählte Fragen der Statik, 2 ; Seminar. — BRUNN : Elemente der höh. Mathematik, 4. — HARTOGS : Darst. Geometrie I, 4, mit Uebg., 3 ; Ebene und Sphär. Trigonometrie mit Anwendungen, 2. — GROSSMANN : Mathem. Geographie, 2. — BÖHM : Analyt. Geometrie der Ebene, 4 ; Elementare Einführung in die Probleme der Lebensversicherung mit Uebg., 4 ; Dividendenpläne der Lebensversicherungsgesellschaften, 1. — DINGLER : Elementarmathematik von höh. Standpunkte mit Uebg., 4 ; Einführung in die Geschichte der Mathematik vom Altertum bis jetzt, 2 ; Besprechung über Fragen der Grundlagen der Mathematik, 2. — ROSENTHAL : Synt. Geometrie, 4, mit Uebg., 1 ; Uebg. über Fragen der höh. Mathematik, 2. — v. SEELIGER : Me-

chanik des Himmels, 4; Astronom. Kolloquium. — Bidlingmaier : Einführung in die Lehre von Potential und den Kugelfunktionen mit ihren Anwendungen in der Geophysik, 3, mit Uebg., 1.

**Münster**; *Universität.* — Killing : Analyt. Mechanik II, 4; Diff. und Integralrechnung II, 4, mit Uebg., 1; Unterseminar. — Von Lilienthal : Analyt. Geometrie II, 4; Funktionentheorie, 3; Elemente der Determinantentheorie und der Algebra, 2; Oberseminar. — Timpe : Partielle Differentialgleichungen mit Anwendungen, 2; Darst. Geometrie, 4, mit Uebg., 2. — Plassmann : Sphär. Trigonometrie und Anfangsgründe der sphär. Astronomie, 2; Zeitrechnung und Kalendergrunde, 2; Mathem. Geographie, 2; Uebg. im Beobachten. — Schewior : Methoden der Geodäsie, 2; Geogr. Ortsbestimmung, 2, mit prakt. Uebg., 1.

**Rostock**; *Universität.* — Staude : Algebra, 4; Kurven und Flächen, 4; Seminar. — Weber : Einführung in die theoret. Physik, 3; Uebg. dazu, 1.

**Strassburg**; *Universität.* — Schur : Analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, 4; Ausgew. Kapitel aus der Differentialgeometrie, 2; Seminar. — Faber : Diff. und Integralrechnung, 4. — Simon : Geschichte der Mathematik im Altertum, 3. — Wellstein : Funktionentheorie und ellipt. Funktionen, 4. — Von Mises : Techn. Mechanik I, 4; Graph.-numer. Integration, 2; Seminarist. Uebg. und angewandter Mathematik. — Epstein : Determinanten u. Invarianten, 3. — Speiser : Fouriersche Reihen, 2. — Bauschinger : Sphär. und prakt. Astronomie, 4; Uebg. an den Instrumenten der Sternwarte.

**Stuttgart**; *Technische Hochschule.* — Haller : Ebene und sphär. Trigonometrie, 2, mit Uebg., 2. — Stübler : Niedere Analysis, 4 : Elemente der Diff. und Integralrechnung, 3, mit Uebg., 1. — Kutta : Höh. Mathematik II, 6, mit Uebg., 2; Seminar, 2. — Wölffing : Funktiontheorie I, 3. — Mehmke : Darst. Geometrie, 3, mit Uebg., 4; Graph. Rechnen, 1, mit Uebg., 2; Punktrechnung, 3, mit Uebg.; Seminar. — Kommerell : Die Grundlagen der Geometrie, 2. — Roth : Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde, 4. — Kriemler : Techn. Mechanik, 6, mit Uebg., 2. — Heer : Plan- und Geländezeichnen, 4. — Von Hammer : Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 2; Prakt. Geometrie (Vermessungskunde) I, 3 mit Uebg.; Kartenprojektionen für kartograph. und geodät. Zwecke, 1, mit Uebg.; Grundzüge der höh. Geodäsie, 2; Barometrische Höhenmessung, 1. — Heer : Geodät. Uebg., 4.

**Tübingen**; *Universität.* — Von Brill : Einführung in die höh. Mathematik, 4; algebraische Kurven, 3; Seminar. — Maurer : Höh. Analysis II, 4; Höh. Algebra, 3; Seminar. — Perron : Darst. Geometrie, 3; Niedere Analysis, 4; Seminar. — Hoppel : Partielle Differentialgleichungen der mathem. Physik, 2; Einführung in die Variationsrechnung, 1. — Rosenberg : Populäre Astronomie, 2.

**Würzburg**; *Universität.* — Rost : Differentialrechnung mit Einleitung in die höh. Analysis, 4, nebst Uebg.; Invariantentheorie, 4 : Astron. Praktikum, 4; Proseminar, Seminar; Seminar für Versicherungswissenschaft. — Von Weber : Reihenlehre und Elemente der Funktionentheorie, 4; Differentialgeometrie I, 4; Synth. Raumgeometrie und Einführung in die Liniengeometrie, 2; Seminar. — Hilb : Analyt. Geometrie, 4; Bestimmte Integrale, 4; Darst. Geometrie, 2.

## AUTRICHE

**Wien**; *Universität*. — v. Escherich : Funktionentheorie, 5; Proseminar; Seminar für Mathematik; Elementarmathematik. — Wirtinger : Elemente der Differential- und Integralrechnung, 5; Uebungen: Mathem. Seminar; Mathemat. Proseminar; Am mathem. Seminar: Kurs über darstellende Geometrie (Mack). — Furtwängler : Zahlentheorie, 4. Gruppentheorie, 1. Proseminar; Seminar; Elementarmathematik. — Kohn : Analyt. Geometrie, 4; Invariantentheorie mit geom. Anwendungen, 2. — Tauber : Versicherungsmathematik I, 4. Mathem. Statistik 1, 2. — Blaschke : Einführung in die mathem. Statistik, I. Teil, 3. — Hanni : Arithmetik und Analysis der Vektoren und Quaternionen, 2. — Roth : Der Integralbegriff und seine Verallgemeinerungen, 2. — Oppenheim : Theorie der Gleichgewichtsfiguren und der Gestalt der Himmelskörper, 3. Einleitung in die höhere Geodäsie, 2. Uebungen den Vorlesungen, 1. — Ebert : Theoretische Astronomie, 3. — Hasenöhrl : Mechanik, 5; Kinetische Gastheorie, 2; Sem. — Höfler : Kants « Kritik der reinen Vernunft » und die gegenwärtige Erkenntnistheorie (für Hörer aller Fakultäten), 4; Besprechungen zur Erkenntnislehre der Mathematik und Physik (insbesondere für Lehramtskandidaten dieser Fächer, im Anschluss an das Kant-Kolleg), 1; Pädag. Seminar, 2.

## SUISSE

**Basel**. — Bieberbach : Differential- u. Integralrechnung, I., 4; Prosem: Ueb. z. Differential- u. Integralrechnung, I., 1 pbl.; Differentialgleichungen, 4; Mathem. Sem., 2 pss. u. gr.; Konforme Abbildung, 1; Ausgew. Kap. der Zahlentheorie, 2; Ueb. zur Vorlesung üb. Differentialgleichungen, 1. — Spiess : Fragen der Elementarmathematik, 3; Mathem. Seminar, 2. — Flatt : Pädagog. Sem., math.-naturwiss. Abt. 1., 3; Projektive Geometrie, 2. — A. Riggenbach : Astronom. Geographie, 3.

**Berne**. — Graf : Kugelfunkt. m. Repet., 3; Besselsche Funkt. m. Repet., 3; Integralrechn. m. Repet., 3; Funktionentheorie, 2; Differentialgleichung, 2; Renten- u. Versicherungsrechn, 2; Mathemat. Seminar, 1 ½. — Ott : Algebr. Analysis, II, 2; Sphär. Trigon. m. Anwend., 2; Integralrechnung, 2; Analyt. Geometrie, II, 2. — Huber : Mechanik des Himmels, 2; Repet. d. Astron.; Theorie d. Raumkurven, 2; Fouriersche Reihen u. Anwend., 3; Mathemat. Seminar. (geometr. Richt.), 1. — Mauderli : Der astron. Unterricht an höh. Mittelschulen II.; Uebg. dazu; Wissensch. Rechnen, 1; Uebg.; Mathem. Theorie einiger Astron. Messinstrumente, 1. — Benteli : Darst. Geometrie, 2; Uebg., 2; Prak. Geometrie 1, 1. — Crelier : Synthet. Geometrie, 2; Geometrie der Bewegung, 2; Geometrische Erhebungen, 1. — Moser : Theorie der Versicherung auf zwei und mehr Leben, 2; Techn. Untersuchungen über die bernische akademische Witwen- und Waisenkasse; Mathematisch-versicherungswiss. Seminar. — Bohren : Politische Arithmetik, 2; Die soziale Versicherung und ihre Grundlagen, 1. — Gruner : Mechanik deformierbarer Körper, 2; Elemente der Vektoranalysis, 1.

**Fribourg**. — Plancherel : Calc. différ., 4; Exerc., 1; Equations différen-

tielles, 2. — Daniëls : Höhere Algebra, 3 ; Analyt. Geometrie, 2 ; Mécanique analytique, 3 ; Théorie de l'électricité, 2. — Gockel : Pop. Astronomie.

**Genève.** — Cailler : Cal. différ. et intégr., 3 ; Exercices, 2 ; Mécanique rationnelle, 3 ; Exercices, 2 ; Conférences d'analyse, Fonctions elliptiques, 2. — Fehr : Eléments de mathématiques supérieures, 3 ; Exercices, 2 ; Conférence d'Algèbre et de Géométrie, 1 ; Géométrie projective, 1 ; Séminaire de Géométrie ; Géométrie infinitésimale, 2. — R. Gautier : Astronomie générale, 2.

**Lausanne.** — Amstein : Calc. différ. et intégr., I, 6 ; Exerc. de calc., I, 1 ; Calcul diff. et intégr., III, 3 ; Exerc. de calc., III, 1 ; Théor. des fonct., 3. — G. Dumas : Calc. différ. et intégr., I, 6 ; III, 2 ; Exercices, I, 1 ; III, 1. — Lacombe : Géométrie descript., 4 ; Géométrie anal, 2 ; Épures de géom. descript., 4 ; Géométrie de posit., 3. — Mayor : Mécan. rat., I, 4 ; Exerc. de mécan., III, 1 ; Phys. mathémat., 2 ; Statique graph., III, 3 ; Epures de statiq., III, 1 ap.-m. ; Stat. graph., V, 2. — Maillard : Cal. infinités. avec applicat., 3 ; Exerc. de calc., 1 ; Astron. sphér., 3 ; Mécanique céleste, 2 ; Mécanique rationnelle, 2. — S. Dumas : Assurances, 3 ; Exercices, 4 ; Calc. des Probabilités, 1. — Ch. Jaccottet : Intégrales définies, 1.

**Neuchâtel.** — G. Du Pasquier : Calc. différ. et intégr., 3 ; Exerc. et répét., 1 ; Dével. hist. de la notion de nombre, 1 ; Calc. infin. Séries de Fourier, 2 ; Théorie de Galois, 1 ; Science actuarielle, 1. — L. Gaberel : Fonct. anal., 2. — H. Stroele : Méth. des moindres carrés, 1. — E. Le Grand Roy : Astron. sphér., 2 ; Météorol., 1 ; Exerc., 1 ; Astronomie, 1. — Arndt : Introduct. à l'astrophys., 1. — A. Jaquerod : Mécan. ration., 2.

**Zurich** ; *Universität.* — Zermelo : Diff.- u. Integr.-Rechg., I, 4 ; Fouriersche u. verwandte Entwickl., 2 ; Arithmetik, 2 ; Mengenlehre, 2 ; Math. Ueb., 2. — Wolfer : Astronomie, 3 ; Ueb. dazu, 2 ; Bahnbestimmung, 2. — Weiler : Darst. Geom. m. Ueb., I, 4 ; Analyt. Geom. m. Ueb., I, 4 ; Math. Geogr., 2. — Gubler : Algebr. Analys., 2 ; Sphär. Trigonometr., 1. Bernays : Diff. Gleich., 4 ; Math. Uebg., 2.

**Zurich** ; *Ecole polytechnique fédérale, section normale.* — Hirsch : Höh. Mathematik, I, 5 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2 ; III, 3 ; Uebgn., 1. — Franel : Mathématiques supérieures, I, 5 ; Répét., 1 ; Exerc., 2 ; III, 3 ; Exerc., 1. — Herm. Weyl : Analyt. Geometrie, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2. — Grossmann : Darst. Geometrie, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 4 ; projektive Geometrie, 4 ; Math. Ueb., 2. — Kollros : Géométrie descr., 4 : Répét., 1 ; Exerc., 4 ; Géométrie de position, 3 ; Mathem. Uebgn., 2. — Hurwitz : Alg. Gleichungen, 4. — H. Weyl u. Hurwitz : Mathem. Seminar. — Meissner : Mechanik, II, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 1 : Festigkeitslehre, 2. — Bæschlin : Vermessungskunde, II, 4 ; Repet., 1 ; Höh. Geodäsie, 3. — Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Bahnbestimmungen, 2. — Amberg : Versicherungsmathematik. — Brandenberger : Einf. in den Mathem. Unterricht, I, 2. — Beyel : Rechenschieber mit Uebungen ; Darst. Geometrie ; Proj. Geometrie ; Perspektive. — Cherbuliez : Geschichte der Physik, II ; Histoire de la physique, II ; L. Euler u. D. Bernoulli. — Einstein : Elektrizität u. Magnetismus, 4, Strahlenoptik, 2 ; Seminar, 2. — J. Keller : Zentralprojektion. — Kienast : Theorie d. Funktionen komplexer Variabeln, 2. — Kraft : Ausdehnungslehre, III ; (Grassmann) ; Vektoranalysis, I ; II ; IV ; V.

---

# BIBLIOGRAPHIE

G. Eneström. — **Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers.** (Ergänzungsband des Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung). Hefte 1-2. — 2 fasc. in-8°, 388 p.; 10 M. le fascicule; B. G. Teubner, Leipzig.

A l'occasion de la publication des œuvres complètes d'Euler, on a constaté que les listes des travaux établies autrefois par Fuss et Hagen étaient très incomplètes. M. G. Eneström (Stockholm) a entrepris le travail très laborieux de faire une nouvelle liste, aussi complète que possible.

L'ouvrage comprendra trois parties. Dans la première les écrits sont indiqués dans l'*ordre chronologique de leur publication*. On y trouve les renseignements bibliographiques complets avec l'indication des différentes éditions ou traductions.

La seconde partie donne les titres dans l'*ordre chronologique des manuscrits*. Ceux-ci sont classés dans la troisième partie dans l'ordre systématique des matières :

I. Philosophie. — II. Mathématiques. — III. Mécanique. — IV. Astronomie. — V. Physique. — VI. Géographie et agriculture. — VII. Correspondance.

Vient ensuite une table alphabétique des mémoires. Dans un dernier fascicule M. Eneström établira une liste des lettres inédites d'Euler.

F. G.-M. — **Manuel de Géométrie**, d'après les programmes de 1911 et 1912. — 1 vol. in-16 de xvi-590 p. et 829 fig. ; A. Mame, Tours et J. de Gigord, Paris.

Ce nouveau manuel peut tenir lieu d'un grand traité de géométrie dont il est une condensation extrêmement habile. Les préliminaires débutent par la notion de déplacement, ce qui est conforme aux vues les plus modernes ; je remarque aussi tout de suite, dans le premier livre, la définition des lieux géométriques. Plus loin, dans le livre II et à propos de problèmes sur la circonférence, est introduite la notion d'enveloppe. Le texte, d'une concision et d'une netteté remarquable, permet déjà d'aborder, comme exercices, plus de 300 problèmes qui révèlent aisément bien des merveilles de la géométrie élémentaire moderne, par exemple la géométrie du triangle amorcée par le cercle des neuf points. Le livre III présente l'étude des relations métriques dans le triangle sous la forme ordinaire du calcul algébrique ; il suffit, pour cela, de désigner les segments par une seule lettre et tout se fait avec la plus grande facilité. Le théorème de Stewart apparaît immédiatement avec toutes les applications possibles aux médianes, bissectrices et hauteurs. Très simplement aussi viennent ensuite les théorèmes d'Euler sur le quadrilatère, de Carnot sur le triangle et divers problè-

mes de lieux. Beaucoup de traités, sans paraître ignorer ces choses les ont rejetées dans leurs exercices, cependant que le texte s'allongeait désespérément au sujet de démonstrations beaucoup plus évidentes. Ici le presque évident est précisé avec peu d'espace de manière à pouvoir en consacrer beaucoup à de beaux et intéressants développements.

Le livre IV (aires) contient, toujours sous forme de calculs algébriques très réduits, tout ce qui est relatif aux cercles inscrits, exinscrits, circonscrits aux triangles ; il se termine par les quadratures approchées. Les livres V et VI, consacrés aux plans et droites de l'espace à trois dimensions, contiennent des théorèmes qui, par nature, ne peuvent être beaucoup transformés ; mais quelle originalité quand il s'agit (livre VII) des corps ronds et, plus particulièrement, de leur volume. Un théorème dit « des trois corps ronds » a été donné, en 1878, par l'auteur lui-même. Il lie la sphère, le cylindre circonscrit et le cône *à deux nappes* inscrit dans le cylindre ; il permet d'étudier la zone et le segment sphériques, sans faire usage de la théorie des triangles tournants. Les coniques du livre VIII sont à la fois étudiées par leurs propriétés planes, par leur génération comme section du cône et par leur équation due à la géométrie analytique. Ce livre finit par quelques brèves indications et d'explicites figures concernant les quadriques en général.

D'importants compléments, divisés en deux séries, augmentent encore la portée de l'ouvrage. J'y relève l'étude de la symétrie, du mouvement des figures, des polygones étoilés, des transversales (th. de Ménélaüs, Pascal, d'Alembert, Desargues, Gauss, Céva). L'introduction de la trigonométrie permet de généraliser aisément bien des théorèmes. Ainsi, on sait que les segments, qui projettent un point sur les côtés d'un triangle équilatéral, ont une somme constante. Il en est de même pour une projection oblique. Le théorème de Pappus sur le quadrilatère inscrit, énoncé souvent pour les distances d'un point de la circonférence aux quatre côtés, est aussi facile à établir pour des distances obliques. Citons aussi le théorème de la projection, sur le plan de la base, d'une aire définie sur le cône circulaire, théorème complètement analogue à celui de la projection des aires planes ; j'ai déjà observé que ce théorème, qui remonte cependant à Jean Bernoulli ou à Guido Grandi, était un sujet d'étonnement pour des mathématiciens excellents mais non prévenus. Ils n'avaient jamais pensé que le théorème du cosinus puisse avoir lieu autrement qu'entre aires planes et cependant on pourrait l'étendre encore aux surfaces dont le plan tangent fait un angle constant avec le plan de projection, c'est-à-dire aux hélicoïdes développables. L'inversion et la géométrie vectorielle terminent cette première série. La seconde contient la perspective, le rapport anharmonique, l'homographie, l'involution, les pôles et polaires, la définition sommaire de l'hélice et des hélicoïdes ; elle étudie aussi les aires et volumes obtenus par les méthodes limites basées sur la connaissance de la somme des entiers consécutifs, de la somme de leurs carrés, etc. Des tables résument les principales formules et les principaux théorèmes. Près de mille exercices s'offrent au lecteur. Il y a là, sous un volume réduit, un instrument de travail et même d'érudition qui paraît être de tout premier ordre. A. Buhl (Toulouse).

P. Leroy-Beaulieu. — **La question de la population** (Collection E. Borel.) — 1 vol. in-16 de IV-512 p., 3 fr. 50 ; F. Alcan, Paris.

Ceci est un ouvrage extrêmement consciencieux, rempli de chiffres et de

tableaux. Il part de la fameuse loi de Malthus. Au point de vue mathématique l'exposé de cette loi pourrait être quelque peu rajeuni. Une population que l'on peut considérer comme une fonction du temps $f(t)$ est fonction *exponentielle* de $t$ dès qu'elle varie proportionnellement à elle-même dans le temps $dt$. L'équation différentielle $df = k.fdt$ conduit immédiatement à ce résultat. Il y a là un point de vue plus général que celui qui consiste à toujours comparer la progression de la population à la progression géométrique *croissante* 1, 2, 4, 8,... Mais ceci demanderait de bien plus longs développements, beaucoup plus connus d'ailleurs des mathématiciens que des économistes. Il faut reconnaître aussi que M. Leroy-Beaulieu n'a pas voulu rester dans des spéculations théoriques ; il s'est préoccupé, très louablement, d'indiquer des remèdes au redoutable fléau qu'il étudie. Pourquoi faut-il malheureusement que nombre de ces remèdes semblent, au premier abord, pires que le mal, même si celui-ci est, au fond, le pire des maux.

Il s'en prend à la civilisation contemporaine (p. 221), aux lois de protection de l'enfance (p. 258, ces lois empêchent les enfants de travailler jeunes, en font des charges qui effrayent à l'avance et restreignent la prolificité), aux œuvres post-scolaires (p. 444, raison analogue), à la loi sur les retraites ouvrières (p. 481), etc.

Et pourtant l'auteur est indéniablement dans le vrai quand il dit que les civilisations sont menacées par les peuples les plus prolifiques ! Faut-il regretter tout ce qui précède, toutes choses dont je croyais jusqu'ici que le pays pouvait être légitimement fier ? Faut-il que la civilisation recule devant la barbarie et n'aurons-nous pas au moins quelque autre savant qui nous montrera le moyen de faire reculer la barbarie devant la civilisation ? Je suis trop incompétent pour répondre à ces angoissantes questions. Pour avoir plus de chances de voir surgir ce génial contradicteur, je souhaite beaucoup de lecteurs à M. Leroy-Beaulieu. A. Buhl (Toulouse).

P. Painlevé, E. Borel, Ch. Maurain. — **L'aviation** (Collection E. Borel.) — 1 vol. in-16 de VIII-300 p., 3 fr. 50 ; F. Alcan, Paris.

Le seul fait, pour ce volume, d'en être déjà à sa sixième édition, prouve suffisamment l'immense intérêt, évident par ailleurs, que le public attache à l'aviation.

Les trois auteurs étant des théoriciens, non des aviateurs, il faut surtout chercher ici des généralités théoriques mais celles-ci sont mises à la portée de tous et n'impliquent que les connaissances mathématiques les plus rudimentaires.

Si beaucoup de progrès furent dus, en aviation, au courage et aux tâtonnements des aviateurs, le rôle de la théorie ne se trouve cependant nullement réduit. Elle intervient même pour passer de résultats obtenus empiriquement à des résultats plus généraux. C'est ainsi qu'avant l'aéroplane emportant l'homme nous avons connu l'aéroplane-jouet de Pénaud ; c'est un appareil qui vole et qui serait, pour des fourmis, ce que sont pour nous les appareils actuels. Mais on sait les très grosses difficultés qu'on rencontre lorsqu'on veut déduire une machine véritablement utile d'un modèle exécuté en petit. Ceci a été le point de départ de considérations fort intéressantes sur l'homothétie en mécanique.

Le vol des oiseaux et particulièrement le vol orthoptère est étudié en premier lieu. Peu réalisable pour nous il ne mérite point cependant d'être

absolument passé sous silence car il aurait, malgré tout, des avantages notables, celui, par exemple, du départ sur place, sans élan horizontal. Le vol hélicoptère peut être envisagé d'une manière à peu près analogue. Les cerfs-volants, les planeurs nous conduisent naturellement à l'aéroplane qui est le roi du jour. Il est analysé en détail quant à tous ses organes, sa stabilité, ses déformations dans les virages, le rôle du pilote. Il est certain que ce dernier rôle est encore prépondérant et qu'il serait grandement temps de lui substituer des réflexes automatiques, c'est là une question tellement difficile qu'on voit à peine comment les immenses résultats déjà obtenus pourraient servir à seulement pressentir sa solution.

Les trois savants auteurs de cette œuvre continuent à ne point désespérer de la théorie. Après deux cents pages d'exposition élémentaire, ils ont consacré la dernière centaine à une théorie de l'aéroplane où apparaissent quelques formules d'une analyse plus savante mais encore remarquablement claire et condensée. Ceux qui auront lu les deux premiers tiers du livre et seront ainsi familiarisés en gros avec la question, seront naturellement portés ensuite à l'étudier de plus près en retrouvant, à chaque pas, dans les formules, les intéressantes généralités du début. A. Buhl (Toulouse.)

Jean Perrin. — **Les Atomes** (Collection E. Borel.) — 1 vol. in-16 de xvi-296 p., 3 fr. 50; F. Alcan, Paris.

Voici un volume où le talent de vulgarisation tient presque du merveilleux. Ce n'est point la vulgarisation ultra-élémentaire mais celle où sont utilisés les premiers rudiments de l'algèbre. Avec cet appareil réduit l'auteur a su donner une concision extrême et une portée immense à son sujet. Il est d'ailleurs naturellement sympathique aux mathématiciens, même à ceux de l'école la plus récente, en montrant que l'abandon des anciennes et simplistes idées concernant la continuité n'est pas un vain jeu de l'esprit mais une nécessité que la physique même pourrait imposer. La constitution atomique de la matière rend celle-ci essentiellement discontinue ; même à l'échelle observable, la dérivabilité n'apparaît plus comme la règle mais comme l'exception. Ainsi des flocons de colloïdes, en suspension dans un liquide, ne semblent jamais assimilables à des surfaces fermées à plans tangents bien déterminés ; on peut grossir de plus en plus et observer que chaque grossissement met en évidence de nouvelles anfractuosités sans qu'il y ait lieu de prévoir un ultime grossissement qui livrera enfin une étendue superficielle régulière. Il en est de même, dans le mouvement brownien, pour la trajectoire d'une granule ; sa forme générale est parfaitement irrégulière mais il ne faut point espérer la décomposer en segments petits et réguliers. Chaque segment tend à être aussi compliqué que la trajectoire entière et cette absence de régularité limite conduit physiquement et d'une manière tout à fait nécessaire à la conception de courbe sans tangente ou de fonction continue sans dérivée. Mais, au lieu de ces citations aussi hétéroclites qu'intéressantes, je voudrais essayer d'indiquer, en quelques mots, ce qui me semble avoir fourni la base, le plan fondamental de l'œuvre.

C'est la théorie cinétique des fluides qui est exposée et défendue. On sait les graves reproches qui lui furent faits. Elle contredisait le principe de Carnot, qui nous défend absolument d'espérer la moindre création de travail dans un milieu en équilibre isotherme, alors qu'une particule suffisamment petite, participant au mouvement brownien résultant, au sein d'un fluide,

du choc des molécules avoisinantes, pouvait parfois, par suite d'un heureux hasard, s'élever très notablement. Des microbes, construisant des maisons à leur taille, pourraient peut-être profiter de ces hasards pour élever leurs matériaux sans fournir ni travail ni chaleur! La conclusion était, en effet, peu habituelle et il a semblé dur d'abandonner le principe de Carnot, même à cette minuscule échelle. Cependant la théorie cinétique triomphe grâce à de nombreux contrôles ayant les origines les plus diverses. Ce sont ces contrôles que M. Jean Perrin met sous nos yeux avec une simplicité frappante; il est d'ailleurs, pour certains, l'ouvrier de la première heure.

Le nombre N de molécules contenues dans la molécule-gramme dut apparaître d'abord aux théoriciens comme un invariant fondamental de la théorie cinétique; restait à vérifier cette invariance par la voie expérimentale. Or les expériences les plus diverses sur la viscosité des gaz, le mouvement brownien, la diffusion lumineuse qui donne lieu au bleu du ciel, le spectre du corps noir, les singulières transmutations de la radioactivité, etc., nous donnent treize déterminations indépendantes de N. Et l'on peut dire que les valeurs de N ainsi trouvées concordent avec une précision inespérée. C'est vraiment le triomphe. Remercions M. Jean Perrin de nous l'avoir fait toucher aussi facilement dans ce livre où la science se montre à la fois si belle et si simple.

A. Buhl (Toulouse).

J. Sageret. — **Le système du Monde des Chaldéens à Newton.** — 1 vol. in-16 de 280 p., 3 fr. 50; F. Alcan, Paris.

Cet exposé est un habile et très légitime plaidoyer en faveur de la valeur de la science. La science invoquée étant surtout l'astronomie, l'auteur a la partie belle puisqu'il s'agit alors de la science appliquée qu'on regarde comme la plus exacte et la plus susceptible de prévisions; mais son raisonnement philosophique n'en reste pas moins très général. On peut dire que tous les systèmes imaginés depuis la plus haute antiquité ne sont que des créations de l'esprit des penseurs, il n'en subsiste pas moins que la plupart ne sont plus que des curiosités que nous ne saurions mettre d'accord avec les faits, tandis que les derniers en date ont une telle puissance d'explication que celle-ci constitue, malgré tout, quelque chose de bon à garder, même si l'on pousse le scepticisme jusqu'à ne pas donner le nom de vérité à cette merveilleuse puissance.

M. J. Sageret commence par examiner brièvement la géométrie antique en montrant toujours très nettement l'adaptation de l'astronomie à cette géométrie incomplète. Il s'arrête à Newton parce que c'est là que le système héliocentrique est définitivement assis sur une base inébranlable; c'est la conclusion dynamique qu'il ne semble plus possible de modifier. Certes, au point de vue cinématique, je puis rapporter tout l'univers à la Terre ou même à la table sur laquelle j'écris, mais ce ne serait plus raisonnablement possible au point de vue dynamique car la Terre ou la table ne sembleront jamais contenir quelque pouvoir qui puisse être assimilé à la cause simple et directe de tous les autres faits observés dans l'Univers. Au contraire tout devient clair et immédiat en traitant le Soleil comme le centre dynamique du système du monde. Pour arriver à cette grandiose conclusion il faut aller des Chaldéens à Newton mais il n'est plus besoin d'aller au delà. Sachons gré à l'auteur qui a résumé, de manière très impartiale et très intéressante, ce parcours qui restera pour toujours un des plus dignes sujets d'admiration.

A. Buhl (Toulouse).

Dr Lothar Schrutka. — **Elemente der höheren Mathematik** für Studierende der technischen und Naturwissenschaften. Mit 136 Fig. — 1 vol. gr. in-8°, 569 p.; 10 M.; Fr. Deuticke, Leipzig et Vienne.

Ces éléments de mathématiques supérieures s'adressent aux étudiants ingénieurs et aux étudiants en sciences physiques et chimiques.

Professeur à l'Ecole technique supérieure allemande de Brünn, l'auteur a su tenir compte des besoins des sciences appliquées, tout en respectant, dans la mesure du possible, les conditions de la rigueur scientifique.

Il part des notions de fonction et de représentation graphiques et initie successivement l'élève aux Eléments de Géométrie analytique, de Calcul différentiel et intégral, aux développements en séries, à la résolution des équations algébriques, à l'étude des nombres complexes et des séries de Fourier. Ce dernier chapitre mérite une attention toute spéciale de la part de ceux qui enseignent aux physiciens. L'auteur est parvenu à donner les notions essentielles sous une forme très simple.

La méthode d'exposition est claire et bien appropriée à l'enseignement aux ingénieurs. Les exercices et les problèmes montrent aux étudiants comment les mathématiques interviennent dans les applications aux sciences mécaniques, physiques et chimiques et en Géodésie.

V. Volterra. — **Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles.** Leçons professées à la Faculté des Sciences de Rome et publiées par MM. Tomassetti et Zarlatti. — 1 vol. gr. in-8° de vi-164 p., 5 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

C'est certainement en M. V. Volterra qu'il faut voir le plus ancien promoteur du calcul fonctionnel. Dès 1883 il a considéré les fonctions F, qui dépendent de toutes les valeurs d'une autre fonction $u(x)$ considérée dans un intervalle donné $a$, $b$, ce qu'il écrit actuellement

$$F = F \left| \left[ u(x) \right]_a^b \right| . \tag{1}$$

La notion tout à fait analogue de fonction de ligne fermée lui est également due; il est clair, par exemple, que l'aire de la surface minimum passant par un contour est définie par ce contour seul et variable avec lui; c'est une fonction du contour. Mais, à ce dernier point de vue, M. Volterra nous promet de nouvelles leçons professées à la Sorbonne. Pour l'instant il s'en tient surtout à la définition (1). Il examine d'abord le cas où la fonction $u(x)$ se modifie très peu, ce qu'il arrive à considérer comme analogue au cas élémentaire où, dans une fonction ordinaire $f(x)$, on remplace $x$ par $x + \xi$. Il obtient ainsi, pour le second membre de (1), une véritable extension de la formule de Taylor, extension dans laquelle les termes sont des intégrales multiples de plus en plus compliquées. Le problème fondamental est de résoudre (1) par rapport à $u$, connaissant F; c'est un problème d'inversion analogue à celui qui consiste à tirer $x$ de l'équation ordinaire $y = y(x)$. Le résoudre en général apparaît comme effroyablement compliqué mais si, dans le développement taylorien généralisé que donne le second membre de (1), on néglige tous les termes contenant des intégrales double, triple, etc., il reste seulement une équation intégrale de la forme

$$\mu\varphi(x) = \lambda u(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi \tag{2}$$

qui est bien, à proprement parler, l'équation de M. Volterra. Quand $a$ et $b$, variables en général, deviennent des constantes, on a l'équation de M. Fredholm. Et l'équation (2), quelque particulière qu'elle puisse paraître par rapport aux considérations générales qui lui ont donné naissance, n'en correspond pas moins aux problèmes les plus importants de la Physique mathématique. D'ailleurs, avec une aisance remarquable, M. Volterra a mis ses généralisations d'accord avec les premiers points de départ, notamment avec les problèmes d'inversion d'Abel. Plus loin, il revient à l'équation de Fredholm et discute le problème de Dirichlet. Les problèmes qu'il examine dans l'espace se présentent également dans le temps et nous amènent aux phénomènes héréditaires de M. Emile Picard. Si l'on conçoit, en effet, une fonction dépendant de tous les points d'une ligne, on conçoit tout aussi bien des phénomènes mécaniques dépendant de tout un intervalle de temps, alors que les phénomènes de la dynamique élémentaire sont toujours complètement déterminés par l'allure du système durant un temps aussi petit que l'on veut. Je crois en avoir assez dit pour faire juger de l'intérêt d'une œuvre qui discute de telles questions avec des préliminaires très peu nombreux, très simples et très intuitifs. A. Buhl (Toulouse).

---

# BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

## 1. Publications périodiques :

**Revue de Métaphysique et de Morale,** dirigée par X. Léon. — Paris.

*20e année.* — E. Belot : Les idées cosmogoniques modernes. — H. Dufumier : La philosophie des mathématiques de MM. Russell et Whitehead. Ch. Dunan : La nature de l'espace. — A. Koyre : Sur les nombres de M. Russell. — G. Lechalas : Une définition génétique du plan et de la ligne droite, d'après Leibniz et Lobatchevsky. — F. Marguet : Translation solaire ou déformation du système sidéral. — A. Padoa : La logique déductive. — H. Poincaré : Pourquoi l'espace a trois dimensions. — B. Russell : Réponse à M. Koyré.

*21e année,* Nos 1 et 2. — Ch. Dunan : La nature de l'espace (fin). — P. Boutroux : Les étapes de la philosophie mathématique. — A. Rivaud : Paul Tannery, historien de la science antique.

**Zeitschrift für das Realschulwesen,** herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel un Mor. Glöser. — XXXVII. Jahrg., 1912 ; Alfr. Hölder, Wien.

Nos 1 à 12. — R. Suppantschitsch : Die Heranbildung der Lehrer für Mathematik und der Ingenieure in Frankreich. — R. Hein : Zirkulare Sinus- und Kosinuslinien. — K. W. Lichtenecker : Zur Umwandlung von Brüchen in periodische Dezimalbrüche. — G. v. Sensel : Das Relativitätsprinzip. — G. Da Fano : Ueber eine besondere Fläche dritter Ordnung. — W. Peyerle : Untersuchungen an einigen logarithm. Kurven. — E. Czuber : Der V. inter-

nationale Mathematiker-Kongress in Cambridge. — K. Larsen : Konstruktion mittels unzugänglicher Punkte. — H. Böheim : Zur Konstruktion der Schmiegungsebene an die Raumkurve 4. Ordnung (1. Art.). — H. Böhm : Eine lineare Konstruction des scheinbaren Doppelpunktes einer Raumkurve 3. Ordnung. — Als Beilage : Hefte 10, 11, 12 der « Berichte über den mathematischen Unterricht in Œsterreich ».

**Procedings of the London Mathematical Society.** — Série 2, vol. 11.

Fasc. 1 à 5. — G. H. Hardy and J. E. Littlewood : The Relations between Borel's and Cesaro's Methods of Summation. — E. W. Hobson : On the Fundamental Lemma of the Calculus of Variations, and on some related Theorems. — R. L. Hippisley : Closed Linkages. — W. Burnside : On the Outer Isomorphisms of a Group. — W. H. Young : On successions of Integrals and Fourier Series. — H. Hilton : On Invariants of a Canonical Substitution. — J. W. Nicholson : The Pressure of Radiation on a Cylindrical Obstacle. — J. C. Fields : A Method of proving certain Theorems relating to Adjointness. — W. H. Young : On Multiple Fourier Series. — Dr. E. B. Stouffer : Invariants of Linear Differential Equations with Applications to Ruled Surfaces in Five-Dimensional Space. — W. Burnside : On Some Properties of Groups whose Orders are Powers of Primes. — A. C. Dixon : On the Cases of Exception in Jacobi's Theorem concerning Double Residues. — E. B. Elliott : On Differential Operators which generate all Seminvariants and all Ternary Covariant Sources. — F. W. Nicholson : The Scattering of Light by a Large Conducting Sphere (Second Paper). — H. F. Baker : On the Curves which lie on a Cubic Surface. — H. F. Baker : Note ou some Transformations of a General Kummer Surface. — W. M. Page : Some Two-Dimensional Problems in Electrostatics and Hydrodynamics. — G. B. Mathews : A Theory of Binary Arithmetical Forms, with Complex Integral Coefficient. — J. B. Holt : The Irreducibility of Legendre's Polynomials. — W. H. Young : On a certain Series of Fourier. — F. R. Moulton : Closed Orbits of Ejection and related Periodic Orbits. Painlevé's Theorem. — Miss Hilda P. Hudson : Curves of Contact of any Order on Algebraic Surfaces.

**Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.** Direttore G.-B. Guccia. Tomo XXXII (2° semestre 1911).

Fasc. 1 et 2. — M. Pannelli : Sopra un carattere di una varietà algebrica a tre dimensioni. — P. Appell : Exemple de mouvement d'un point assujetti à une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse. — G. Colonnetti : Sul moto di un liquido in un canale. — R. v. Sterneck : Geometrische Ableitung des Satzes von de Morgan-Sylvester und seines Analogons für vier Summanden. — K. Knopp : Ueber Summen der Form $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$. — O. Bolza : Ueber den Hilbert'schen Unabhängigkeitssatz beim Lagrange'schen Variationsproblem. (Zweite Mitteilung.) — H. Weyl : Konvergenzcharakter der Laplace'schen Reihe in der Umgebung eines Windungspunktes — A. Haar : Ueber die Legendre'sche Reihe. — V. Strazzeri : Analisi intrinseca delle elicoidi, con particolare riguardo a quelle ad area minima ed alle pseudosferiche. — H. Mohrmann : Bestimmung aller Normalflächen mit transitiven automorphen Gruppen von projectiven Transformationen. — M. Picone :

Rettifica alla Memoria : « Sopra un problema dei valori al contorno nelle equazioni iperboliche alle derivate parziali del second'ordine e sopra una classe di equazioni integrali che a quello si riconnettono ». — O. Tœplitz : Ueber die Fourier'sche Entwicklung positiver Funktionen. — C. Carathéodory : Ueber den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. — C. Carathéodory und L. Fejer : Ueber den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landau'schen Satz. — E. Fischer : Ueber das Carathéodory'sche Problem, Potenzreihen mit positiven reellen Teil betreffend. — D. Jackson : Ueber eine trigonometrische Summe. — O. Bolza : Bemerkungen zu der Arbeit von Herren H. Weber : « Ueber den Satz von Malus für krummlinige Lichtstrahlen ». — G.-J. Remoundos : Extension d'un théorème de M. Borel aux fonctions algébroïdes multiformes.

Fasc. 3. — H. Bohr et E. Landau : Ueber die Zetafunktion. — L. Godeaux : Détermination des congruences linéaires de cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche fixe. — T. Boggio : Teoremi generali sul carattere invariantivo di espressioni vettoriali. — L. Tonelli : Sui massimi e minimi assoluti del calcolo delle variazioni. — F.-R. Moulton : The Problem of the Spherical Pendulum from the Standpoint of Periodic Solutions. — P. Calapso : Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni. — N. Lusin : Ueber eine Potenzreihe. — P. Nalli : Sopra una definizione di dominio piano limitato da curva continua, senza punti multipli.

**Sitzungsberichte der Kaiserlichen akademie der Wissenschaften**, Wien.

*Jahrgang 1911.* — A. Axer : Ueber einige Grenzwertzätze. — St. Bohnicek : Zur Theorie der achten Einheitswurzeln. — W. Ebert : Eine allgemeine Eigenschaft der Bewegungsgleichungen der Dynamik. — J. Grünwald : Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. — L. Hanni : Kinematische Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie (Schluss). — F. Hasenöhrl : Ueber ein Theorem der Statistischen Mechanik. — B. Kalicun : Beiträge zu den Regelflächen V[ter] Ordnung (I. Mitteilung). — G. Kohn : Ueber Zwei besondere Arten von Raumkollineationen und die Figur zweier Tetraeder. — G. Kowalewski : Ueber Funktionenräume (2 Mitteilungen). — (Id.) : Zur Differentialgeometrie der projektiven Gruppe einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades. — E. Landau : Ueber die Aequivalenz zweier Hauptsätze der analytischen Zahlentheorie. — F. Mertens : Ueber die Zerfällung einer ganzen Funktion einer Veränderlichen in zwei Faktoren. — E. Muller : Eine abbildung krummer Flächen auf eine Ebene und ihre Verwertung zur konstruktiven Behandlung der Schraub-und Schieb-flächen (I. Mitteilung). — G. Pick : Ueber Brachistochronenscharen und verwandte Kurvensysteme. — D. Pompeiu : Einige Sätze über monogene Funktionen. — J. Radon : Zur Theorie der Mayer'schen Felder beim Lagrange'schen Variationsproblem. — R. Schumann : Geoidabstände nach der Formel von Stokes bei schematischen Schwerebelegungen. — L. Tuschel : Ueber eine Schraubliniengeometrie und deren konstruktive Verwertung. — Id. : Ueber eine Verallgemeinerung der Schiebflächen — A. Wassmuth : Ueper den Zusammenhang des Prinzips der kleinsten Aktion mit der Hamilton-Jacobi'schen partiellen Differentialgleichung und dem

Stäckel'schen Theorem. — (Id.) : Die Bewegungsgleichungen des Elektrons und das Prinzip der kleinsten Aktion. — (Id.) : Ueber die Invarianz eines das kinetische Potential enthaltenden Ausdruckes gegen eine H. A. Lorentz-Transformation.

**Zeitschrift für Mathematik und Physik**, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. — 60 Band, B.-G. Teubner, Leipzig.

1. Heft. — L. Assur : Die Methodeder charakteristischen Kurven, als Beitrag zur graphischen Auswertung mehrfacher Integrale. — W. Blaschke : Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. — E. Meissner : Drei Gipsmodelle von Flächen konstanter Breite.

2 Heft. — K. Menges : Drehende Schwingungen eines Hohlzylinders in einer zähen Flüssigkeit. — R. Malmström : Technische Anwendungen eines allgemeinen Satzes über erzwungene Schwingungen. — T. Pöschl : Ueber die zwangläufige Bewegung materieller Systeme in der Ebene. I. — L. Darapsky : Filtergeometrie. — W. Blaschke : Berichtigung zu der Abhandlung « Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie I. II. »

3 Heft. — C. Röhrich : Ueber den Einfluss der elastischen Kupplung auf den Ungleichförmigkeitsgrad. — E. Stübler : Geometrische Probleme bei der Verwendung von Schraubenflächen in der Technik. — P. Fillunger . Drei wichtige ebene Spannungszustände des keilförmigen Körpers. — K. Federhofer : Die Ermittlung des Einflusses von Temperaturänderungen bei einem elastischen, an den Enden eingespannten Bogenträger. — L. v. Schrutka : Ein Mittel zur Vermeidung wiederholter Divisionen bei der Newtonschen Näherungsmethode. — G. Majcen : Zur Darstellung des Drehungsellipsoids in Parallelperspektive.

4. Heft. — P. Pfeiffer : Experimente mit dem Prandtlschen Kreiselapparat. Nach Angaben von Professeur Prandtl. — H. Blasius : Stromfunktionen für die Strömung durch Turbinenschaufeln. — W. Deimler : Zeichnungen zur Kuttaströmung.

## 2. Livres nouveaux :

**Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians.** (Cambridge, 22-28 August 1912). Edited by E. W. Hobson and A. E. H. Love. — *Vol.* I : Part I Report of the Congress. Part II Lectures, Communications (Section I). 500 p. — *Vol.* II : Communications to sections II-IV. 657 p. ; 30 sh. les deux volumes ; University Press, Cambridge.

P. Mansion. — **Abriss der Theorie der Hyperbelfunktionen** nebst einer rein analytischen Theorie der **Kreisfunktionen.** — Nach der dritten französischen Auflage übersetzt. — 1 fasc. in-8°, 44 p. ; 1,25 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

B. Branford. — **Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität.** — Deutsche Bearbeitung von R. Schimmack und H. Weinreich. — 1 vol. in-8°, VII-403 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

C. Burali-Forti et R. Marcolongo. — **Analyse vectorielle générale.** II. Applications à la mécanique et à la physique. — 1 vol. in-8°, XII-144 p. ; 5 fr. ; Mattei & C., Pavie.

F. Bützberger. — **Ueber bizentrische Polygone Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion.** — 1 vol. in-8°, 60 p. ; 1,50 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Chatelain. — **L'Enseignement de la Géométrie.** Une réforme dans ses rapports avec nos circonstances locales. — 1 fasc. in-8°, 24 p. ; Imprimerie coopérative, La Chaux-de-Fonds.

F. Dingeldey. — **Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential und Integralrechnung.** — II. *Integralrechnung.* — 1 vol. in-8°, 382 p. ; 12 M. relié 13 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

W. Gallatly. — **The modern Geometry of the Triangle.** — 2me édition. 1 vol. in-8°, VIII-126 p. ; F. Hodgson, Londres.

M. Gandillot. — **Note sur une illusion de relativité.** — 1 fasc. gr. in-4°, 88 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

Cl. Gaucher et R. Mortier. — **Livret de l'enseignement technique.** — vol. in-8°, 342 p. ; 4 fr. 50 ; H. Dunod et E. Pinat, Paris.

K. Hensel. — **Zahlentheorie.** — 1 vol. 8°, XII-356 p. ; 10 M. ; G. J. Goeschen, Leipzig.

A. Höflers **Himmelsglobus aus Modelliernetzen**, die Sterne durchzustechen und von Innen heraus zu betrachten. — Ausgabe I. I, 50 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

L. W. de Hoenika. — **Nouvelle démonstration de la théorie des droites parallèles d'Euclide.** — 1 fasc. in-8°, texte russe et texte français, 100 p. ; Moscou.

D. Katz. — **Psychologie und mathematischer Unterricht.** — (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale mathematische Unterrichtskommission, herausgegeben von F. Klein. Band III. Heft 8. — 1 fasc. in-8°, 120 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

J. Knoblauch. — **Grundlagen der Differentialgeometrie.** — 1 vol. in-8°, X-634 p. ; 18 M., relié 20 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

M. Speter. — **Die chemische Verwandschaft und ihre Beziehungen zu den übrigen Energieformen.** — (*Bücher der Naturwissenschaft*, N° 17.). — 1 vol. in-16, ; 0,80 M. ; Philipp Reclam jun. Leipzig.

J. Ser. — **Essai de Linéométrie.** — 1re partie. 1 vol. in-8, IV-80 p. ; 2 fr. 75 ; Gauthier-Villars, Paris.

M. B. Weinstein. — **Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft.** — 2. Auflage. (coll. Aus Natur und Geisteswelt, N° 223). — 1 vol. in-16. VI-116 p. ; 1,25 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

---

# ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES POINTS D'INFLEXION DES COURBES DU 3e DEGRÉ ET DES TANGENTES DE REBROUSSEMENT DES COURBES DE LA 3e CLASSE

## I. — Introduction.

Dans divers travaux parus précédemment[1], nous avons établi les propriétés dualistiques suivantes des courbes du 3e degré et des courbes de la 3e classe, et la plupart des constructions originales que nous indiquons sont réalisables avec la règle et le compas :

1. Soient deux faisceaux $F_1$ et $F_2$ tels qu'à chaque rayon de $F_1$ correspondent deux rayons de $F_2$ et à chaque rayon de $F_2$, un seul de $F_1$, ces faisceaux forment un groupe ou une correspondance du $(2 + 1)^e$ degré.

2. Soient deux ponctuelles $P_1$ et $P_2$ telles qu'à chaque point de $P_1$ correspondent deux points de $P_2$ et à chaque point de $P_2$ un seul de $P_1$, ces ponctuelles forment un groupe ou une correspondance de la $(2 + 1)^e$ classe.

3. Le faisceau $F_1$ est un faisceau simple et le faisceau $F_2$ une involution. La correspondance du $(2 + 1)^e$ degré se présente comme un faisceau simple homographique avec une involution de rayons.

4. $P_1$ est une ponctuelle simple et $P_2$ une involution de points. La correspondance de la $(2 + 1)^e$ classe se présente comme une ponctuelle simple homographique avec une involution de points.

5. Deux faisceaux concentriques formant une correspondance du $(2 + 1)^e$ dégré peuvent avoir 0 ou 2 rayons doubles simples ($b_1$ et $b_2$), puis 1 ou 3

6. Deux ponctuelles de même base formant une correspondance de la $(2 + 1)^e$ classe peuvent avoir 0 ou 2 points doubles simples, ($B_1$ et $B_2$) puis 1 ou 3

[1] *Enseignement Mathématique,* tome 8, 1906, n° 6, p. 455-462 ; tome 9, 1907, n° 2. p. 107 à 119 ; tome 10, 1908, n° 2, p. 111 à 140.

rayons doubles conjugués ($b$ et $b_1$) et éventuellement 1 rayon triple ($b_1$ $b_2$ et $b$).

Ils admettent en outre une paire de rayons rectangulaires simples : les axes de l'involution, puis 1 ou 3 paires de rayons rectangulaires conjugués.

7. Les faisceaux $F_1$ et $F_2$ d'une correspondance du $(2+1)^e$ degré engendrent une courbe du 3e degré à point double. Le sommet $S_2$ du faisceau $F_2$ est le point double, tandis que le sommet $S_1$ de l'autre faisceau $F_1$ est un point simple de la courbe.

9. Quand les faisceaux considérés ont un rayon homologue commun, ils n'engendrent plus qu'une conique passant par $S_2$.

11. La courbe du 3e degré est construite au moyen d'une conique auxiliaire liée aux divisions des points prises sur deux rayons conjugués coupant les faisceaux.

Les tangentes de la courbe du 3e degré au point double sont les deux tangentes de la conique auxiliaire menée par ce point ; la tangente de la cubique dans l'autre sommet $S_1$ est aussi la deuxième tangente possible de la conique auxiliaire par $S_1$.

13. Suivant la position du sommet $S_2$ par rapport à la conique auxiliaire, ce point double est un nœud, un rebroussement ou un point isolé.

15. Par tout point $S_1$ de la courbe du 3e, on peut mener, d'une manière générale, une tangente en $S_1$ et deux autres

points doubles conjugués ($B$ et $B_1$) et éventuellement 1 point triple ($B_1$ $B_2$ et $B$).

Comme points, limites, ces ponctuelles admettent $M_1$ lié $M_2$ à l'$\infty$ et conjugué de $M$, puis $L_1$ et $L_2$ conjugués de $L$ à l'$\infty$.

Le point $M$ est le centre de l'involution de points.

8. Les ponctuelles $P_1$ et $P_2$ d'une correspondance de la $(2+1)^e$ classe engendrent une courbe de la 3e classe avec une tangente double. La base $P_2$ est tangente double, tandis que l'autre est tangente simple.

10. Quand les ponctuelles considérées ont un point homologue commun, elles n'engendrent plus qu'une conique tangente à $P_2$.

12. La courbe de la 3e classe est construite au moyen d'une conique auxiliaire liée aux faisceaux de rayons formés en deux points conjugués réunis avec l'ensemble des points des divisions.

Les points de tangence de la courbe avec la tangente double sont les points de coupe de la conique auxiliaire avec la base $P_2$ ; le deuxième point de coupe de cette conique avec l'autre base est le point de tangence de cette base avec la courbe K.

14. Suivant la position de la base $P_2$ par rapport à la conique, cette base est bi-tangente ordinaire, tangente de rebroussement ou tangente isolée.

16. Toute tangente simple $P_1$ de la courbe considérée rencontre celle-ci dans son point de tangence et, d'une manière gé-

tangentes par $S_1$ avec des points de tangence différents de $S_1$.

Si le point double est sur la conique auxiliaire on ne peut plus mener par $S_1$ que la tangente en $S_1$ et une autre tangente avec le point de tangence différent de $S_1$.

Dans le premier cas la courbe du 3$^e$ degré est de la 4$^e$ classe et dans le second cas, elle est de la 3$^e$ classe. (Voir *fig. 1.*)

17. En coupant les faisceaux $F_1$ et $F_2$ par une circonférence passant par les sommets, on peut former deux divisions circulaires du $(2+1)^e$ degré, et au moyen de deux points conjugués on détermine deux faisceaux du $(2+1)^e$ degré avec deux rayons homologues communs. La courbe résultante est une conique qui peut également servir de courbe auxiliaire pour la construction de la courbe du 3$^e$ degré.

Les tangentes en $S_1$ et $S_2$ sont les diverses droites conjuguées de la ligne $\overline{S_1S_2}$.

nérale, dans deux autres points de coupe distincts.

Quand la tangente double est une tangente de la conique auxiliaire la tangente simple $P_1$ n'a plus qu'un point de coupe avec la courbe.

Dans le premier cas, la courbe de la 3$^e$ classe est du 4$^e$ degré et dans l'autre cas, c'est une courbe du 3$^e$ degré. (Voir *fig. 2.*)

18. Au moyen d'une circonférence tangente aux deux bases et de toutes les tangentes de celle-ci par les points des divisions, on peut former deux faisceaux de tangentes de la $(2+1)^e$ classe sur la circonférence, puis avec deux tangentes conjuguées on déterminera deux nouvelles divisions de la $(2+1)^e$ classe ayant deux points homologues communs. La courbe résultante sera une conique qui peut servir de conique auxiliaire dans la construction de la courbe de 3$^e$ classe. Les points de tangence de $P_1$ et $P_2$ seront les points conjugués du point de coupe des bases.

19. Un faisceau de rayons simple, homographique avec un faisceau de tangentes d'une conique déterminent également une courbe du 3$^e$ degré à point double. Le point double est le sommet du faisceau simple.

Toute séante des deux faisceaux contient une correspondance du $(2+1)^e$ degré sur la même base. Les trois points doubles conjugués de cette correspondance sont les points de coupe de la sécante avec la courbe du 3$^e$ degré.

20. Une division de points simple, homographique avec une division de points sur une conique déterminent également une courbe de la 3$^e$ classe avec tangente double. La tangente double est la base de la division simple.

Tout faisceau formé en joignant les points des deux divisions à un point quelconque du plan donne une correspondance de la $(2+1)^e$ classe. Les trois rayons doubles conjugués de la correspondance sont les trois

21. La courbe du 3ᵉ degré peut être également établie en utilisant les propriétés involutives du faisceau $F_2$. On construit un nouveau faisceau simple $F_3$, déduit de l'involution et on utilise la conique auxiliaire des faisceaux simples homographiques $F_1$ et $F_3$.

On construit les tangentes dans les sommets $S_2$ et $S_1$ avec les rayons conjugués de leur ligne de jonction.

23. Dans la construction qui précède on avait coupé le faisceau involutif par un cercle ; la conique auxiliaire a quatre points de coupe avec ce cercle et ceux-ci sont également des points de la cubique à point double.

Si tout en conservant la même cubique nous laissons le sommet $S_1$ se déplacer sur cette courbe, le sommet P du faisceau auxiliaire sera variable, mais les 4 points communs au cercle, à la cubique et à la conique précédente seront des points de chaque nouvelle conique auxiliaire. En outre la ligne de jonction des 5ᵉ et 6ᵉ points de coupe de chaque conique avec la cubique continuera de passer par le point de coupe de la tangente du cercle en $S_2$ avec la cubique.

Ce point est le corésiduel des 4 premiers points communs aux diverses courbes.

Le faisceau des coniques auxiliaires est homographique avec le faisceau des rayons passant par le point corésiduel V. Le

tangentes de la courbe de 3ᵉ classe par le point quelconque.

22. La courbe de 3ᵉ classe peut encore être obtenue en utilisant les propriétés involutives de la base $P_2$. On établit une nouvelle ponctuelle $p$ découlant de l'involution et on utilise la conique des ponctuelles homographiques $P_1$ et $p$ comme conique auxiliaire.

On construit les points de tangence des bases comme points conjugués de leur point de coupe.

24. Dans cette construction basée sur l'involution on avait considéré un cercle tangent de la base $P_2$ ; la conique auxiliaire a quatre tangentes communes avec ce cercle et celles-ci sont également des tangentes de la courbe de 3ᵉ classe à tangente double.

Si, tout en conservant cette même courbe, nous laissons la tangente $P_1$ se déplacer sur celle-ci, la base $p$ de la ponctuelle auxiliaire sera variable, mais les 4 tangentes communes au cercle, à la courbe principale et à la conique précédente seront des tangentes communes de chaque nouvelle conique auxiliaire. D'autre part le point de coupe des 5ᵉ et 6ᵉ tangentes communes de chaque conique auxiliaire avec la courbe de 3ᵉ classe sera toujours sur la tangente de la courbe principale menée par le point de tangence $m_2$ de $P_2$ avec le cercle.

Cette droite $\overline{mm_2}$ est la corésiduelle des 4 tangentes communes primitives.

Les coniques auxiliaires for-

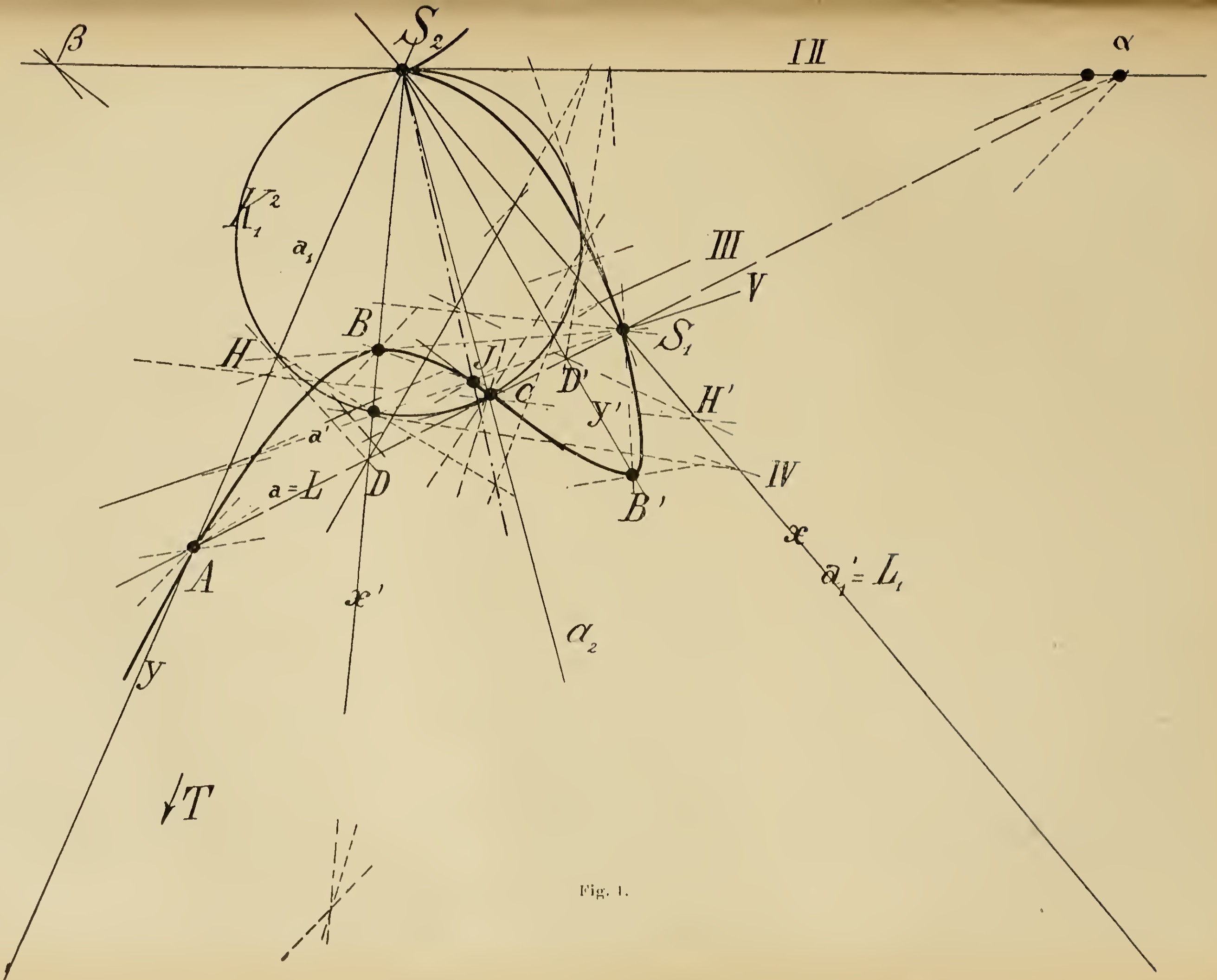



Fig. 1.

cercle est une des coniques; il est conjugué avec sa tangente en $S_2$.

Le lieu des points P est la droite qui passe par les points de coupe des tangentes de la cubique en $S_2$ avec le cercle.

Si $S_1$ et $\pi$ sont les $5^e$ et $6^e$ points de coupe de la $1^{re}$ conique auxiliaire avec la cubique, on peut permuter ces points; le point P sera alors le point de coupe de la même conique avec la droite $\overline{S_1S_2}$. (Voir *fig. 3.*)

25. La recherche des asymptotes est liée à celle des rayons doubles dans un nouveau faisceau parallèle aux deux premiers. Les asymptotes sont les tangentes par les points de coupe à l'$\infty$ des rayons conjugués parallèles.

ment un faisceau homographique avec la division de points sur $\overline{mm_2}$. Le cercle est une de ces coniques; le point homologue est $m_2$, son point de tangence avec $P_2$.

L'enveloppe des droites auxiliaires $p$ est le point de coupe des tangentes du cercle par les points de tangence de la courbe principale avec $P_2$.

En permutant les $5^e$ et $6^e$ tangentes $mm_1$ et $P_2$, la droite $p$ sera la jonction du point fixe avec le point de coupe de $P_1$ et $P_2$. (Voir *fig. 4.*)

26. La recherche des tangentes parallèles à une direction donnée est dualistique de celle des asymptotes dans les courbes du $3^e$ degré.

## II. — Points d'inflexion et tangentes de rebroussement.

PREMIER CAS : *Les courbes sont du $3^e$ degré et de la $3^e$ classe.*

### 1. *Méthode des rayons conjugués.* (Voir fig. 1.)

Les sommets des faisceaux de la correspondance du $(2+1)^e$ degré sont $S_1$ et $S_2$. La courbe engendrée est $C^3$. Comme le point $S_2$ doit être un point de rebroussement, la conique auxiliaire doit passer par $S_2$ et sa tangente en ce point est la tangente de rebroussement de $C^3$.

La conique auxiliaire est déterminée par les ponctuelles homographiques sur les rayons conjugués $a$ et $a_1$ passant par A sur $C^3$. La conique s'appelle

### 2. *Méthode des points conjugués.* (Voir fig. 2.)

Les ponctuelles de la correspondance de $(2+1)^e$ classe sont $P_1$ et $P_2$. La courbe engendrée est $K^3$. La base $P_2$ devant être une tangente d'inflexion, ses deux points de tangence $E_1$ et $E_2$ seront confondus en un seul et la conique auxiliaire $C_1^2$ sera tangente de $P_2$ en ce point.

Ce point est le point d'inflexion.

La conique $C_1^2$ est déterminée par les faisceaux homographiques issus des points conjugués

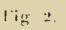



Fig. 2.

$K_1^2$; $\overline{S_1A} = a$ est une tangente de $K_1^2$ en C et C est le point de coupe des rayons conjugués $a$ et $a_2$.

Par $S_1$, nous avons une tangente de $C^3$ en $S_1$ et une autre tangente de $C^3$ en B. La première est également une tangente de $K_1^2$ par $S_1$. La seconde est une droite $\overline{S_1H}$ passant par le point de coupe H de $a_1$ avec $K_1^2$.

Dans le cas considéré, nous aurons toujours un point H, mais un seul, donc la seconde tangente par $S_1$ est déterminée d'une manière absolument univoque. Son point de tangence B sur $C^3$ s'obtient avec $\overline{S_2D}$, D étant le point de coupe de $a_1$ avec la tangente de $K_1^2$ en H.

En joignant $S_1$ et B à $S_2$ nous obtenons 2 rayons $\overline{S_2S_1}$ et $\overline{S_2B}$ conjugués mais non réciproques.

A chaque position de $S_1$ sur $C^3$ correspondront deux rayons de ce genre en $S_2$. Ces rayons formeront ainsi deux divisions homographiques concentriques en $S_2$. La tangente de rebroussement sera un rayon double.

Le 2e rayon double correspondra à un point J pour lequel les deux tangentes de $C^3$ menées par J seront confondues et auront le même point de tangence J. Deux tangentes confondues avec un même point simple de la courbe comme point de tangence forment une tangente d'inflexion et le point considéré est un point d'inflexion.

Pour déterminer ce deuxième rayon double nous devons d'a-$D_1$ et D. Elle passe par D et A sur $P_1$. A est également le point de tangence de $K^3$ avec $P_1$.

La base $P_1$ rencontre la courbe $K^3$ en son point de tangence et un autre point B situé sur $P_1$ et sur la tangente $\overline{D_1B}$ de $C_1^2$ par $D_1$. Cette tangente représente 2 rayons confondus du faisceau $D_1$; le rayon homologue $\overline{XD}$ par D donne un point double sur $P_2$ soit $B_1B_2$. La droite $\overline{B_1B}$ ou $\overline{B_2B}$ forme deux tangentes confondues de la courbe $K^3$; elles se coupent en B qui est un point de $K^3$; la tangente de $K^3$ en B est donc $\overline{BB_1}$ ou $\overline{BB_2}$. Puisque $D_1$ est déjà sur une tangente $P_2$ de $C_1^2$ nous ne pouvons plus mener que la tangente $\overline{D_1B}$ par ce point. La base $P_1$ coupe $P_2$ en E, et ce point est conjugué des points de tangence confondus $E_1$ et $E_2$. La tangence de $K^3$ par B coupe $P_2$ en $B_1$. Les points E et $B_1$ sont donc conjugués d'une manière absolument univoque sur $P_2$. A chaque position de la base $P_1$ sur la courbe $K^3$ correspondent ainsi deux points conjugués sur $P_2$. Ces points forment 2 divisions homographiques de même base avec le point d'inflexion $E_1$ $E_2$ comme point double.

Le 2e point double correspondra à une tangente V de $K^3$ pour laquelle son point de tangence avec $K^3$ et son autre point de coupe avec $K^3$ sont confondus. Les tangentes en ces deux points confondus sont elles-mêmes confondues avec V, donc le point est un point de rebroussement et la tangente

bord chercher une autre paire de rayons conjugués par $S_2$.

Nous prendrons A comme nouveau point de $C^3$. Les rayons $\overline{AS_1} = a = L$ et $S_2S_1 = L_1$ sont conjugués. Ils peuvent déterminer une nouvelle conique auxiliaire $K_2^2$. Pour celle-ci on a :

une tangente par $S_2$ en $S_2$

une tangente par A en C, et la tangente $\overline{DE}$ relative aux rayons par le point B.

En procédant comme précédemment nous devons chercher le point de coupe de $L_1$ avec la conique $K_2^2$. Soit H′ ce point ; il faudra mener ensuite la tangente de $K_2^2$ par H′ jusqu'en D′ sur L.

Pour y arriver nous cherchons le point de tangence T de DE au moyen des triangles inscrits et circonscrits relatifs aux points $S_2$, C et T. Nous utilisons le point de Brianchon.

Cela étant, nous considérons les faisceaux $S_2$ et C pour la conique $K_2^2$ et leur centre d'homographie $\alpha$; nous en déduisons aisément le point de coupe H′ de $S_2S_1$ avec $K_2^2$. La tangente en H′ s'obtient avec le triangle circonscrit mené par les points $S_2C$ et H′. On emploie la droite de Pascal.

La tangente trouvée coupe L en D′. Les rayons $\overline{S_2A}$ et $\overline{S_2D'}$ sont deux nouveaux rayons conjugués des faisceaux en $S_2$.

Il reste à déterminer le rayon double. On utilise la construction bien connue par laquelle on coupe les faisceaux en $S_2$ par une conique. On emploie la première conique $K_1^2$.

V une tangente de rebroussement.

Pour obtenir ce point, nous devons avoir une 2e paire de points conjugués sur $P_2$.

Soit $DD_1$ une nouvelle tangente de $K^3$. Les points conjugués D et E sont pris comme sommets des faisceaux déterminant la nouvelle conique auxiliaire $C_2^2$. Pour celle-ci on a :

le point $E_1E_2$ et la tangente en ce point,

le point D et la tangente $DD_2$, puis le point de coupe C des rayons relatifs à la tangente $\overline{BB_1}$.

On doit avoir ensuite la tangente par E à $C_2^2$ et son point de tangence N′ sur $C_2^2$ afin de déterminer le rayon DN′ donnant le point $B'_1B'_2$ et la tangente $\overline{B'B'_1}$ ou $\overline{B'B'_2}$.

On cherche d'abord la tangente de $C_2^2$ par C avec les triangles inscrits et circonscrits des points $E_1DC$. On se sert de la droite de Pascal et on trouve la tangente CF.

Les ponctuelles sur $ED_1$ et $DD_2$ déterminent aussi la conique $C_2^2$ ; l'axe d'homographie est $E_1D$. On en déduit sans peine la tangente de $C_2^2$ par E soit EM. Le point de tangence N′ est établi avec le triangle circonscrit $D_2EM$.

On a utilisé le point de Brianchon.

Le rayon DN′ coupe $P_2$ en $B'_1B'_2$. Les points $D_1$ et $B'_1$ sont deux nouveaux points conjugués des ponctuelles sur $P_2$. Il faut encore trouver le 2e rayon double. Au moyen de la construc-

On obtient alors le rayon $\overline{S_2J}$. Le point de coupe de ce rayon avec la cubique $C^3$ est J ; on le trouve aussi avec la conique $K_1^2$.

D'après ce qui précède, *le point J est le point d'inflexion cherché.*

Soit J le point d'inflexion et $K_3^2$ la conique relative aux faisceaux $S_2$ et J.

Les rayons conjugués déterminant cette conique sont $S_2S_1 = a'_1$ et $JS_1 = a'$. Désignons par H″ le point de coupe de $a'_1$ avec $K_3^2$.

Nous aurons JH″ et la tangente de $K_3^2$ par J qui doivent être confondues. Donc la ligne de jonction de J avec H″ est une tangente de la conique auxiliaire $K_3^2$.

Basé sur cette observation, *nous pouvons déterminer la tangente d'inflexion par* J. *Ce sera la deuxième tangente de la conique auxiliaire de* J *par* J.

Pour cette conique $K_3^2$ nous aurons la tangente en $S_2$, le rayon $\overline{JS_1}$ qui est aussi une tangente et les tangentes III et IV provenant des points A et B.

Nous obtiendrons la tangente en J avec le théorème de Brianchon.

Le point de tangence H″ de celle-ci avec $K_3^2$ est également sur le premier rayon $\overline{S_2S_1}$.

3. *Méthode involutive.* (Fig. 3.)

Les faisceaux de la correspondance sont également $S_2$ et tion connue avec la première conique $C_1^2$ on arrive au point S.

On construit la tangente en S de $K^3$ également avec la courbe $C_1^2$.

D'après ce qui précède, *cette tangente de la courbe* $K^3$ *par* S *est la tangente de rebroussement cherchée.*

Soit $P_3 = V$ par S, la tangente de rebroussement, et $C_3^2$ la conique auxiliaire relative aux droites $P_2$ et $P_3$.

Les points conjugués qui déterminent cette conique sont T et $D_1$ sur $P_1$. Le deuxième point de coupe R ou A″ de $P_3$ avec $C_3^2$ doit être confondu avec B″ sur $K^3$, et il en sera de même des tangentes de $K^3$ par ces points. En conséquence, le point de coupe de R de $P_3$ avec $C_3^2$ est situé sur la tangente de $C_3^2$ passant par $D_1$.

Basé sur cette observation, *nous pouvons déterminer le point de rebroussement R, sur la tangente de rebroussement* ST.

La conique $C_3^2$ est déterminée par les bases $P_2$ et $P_3 = ST$. T est sur $P_1$, il est alors le conjugué de $D_1$.

Nous avons pour $C_3^2$ : la tangente $P_2$ en $E_1$, le point T, les points I et II provenant des tangentes $BB_1$ et BE de $K^3$.

Le point de rebroussement est le 2^e^ point de coupe de $P_3$ avec $C_3^2$. On l'obtient par l'hexagone de Pascal. C'est R.

La tangente de $C_3^2$ en R doit passer par $D_1$.

4. *Méthode involutive.* Fig. 4.)

Les bases de la correspondance étant également $P_1$ et $P_2$,

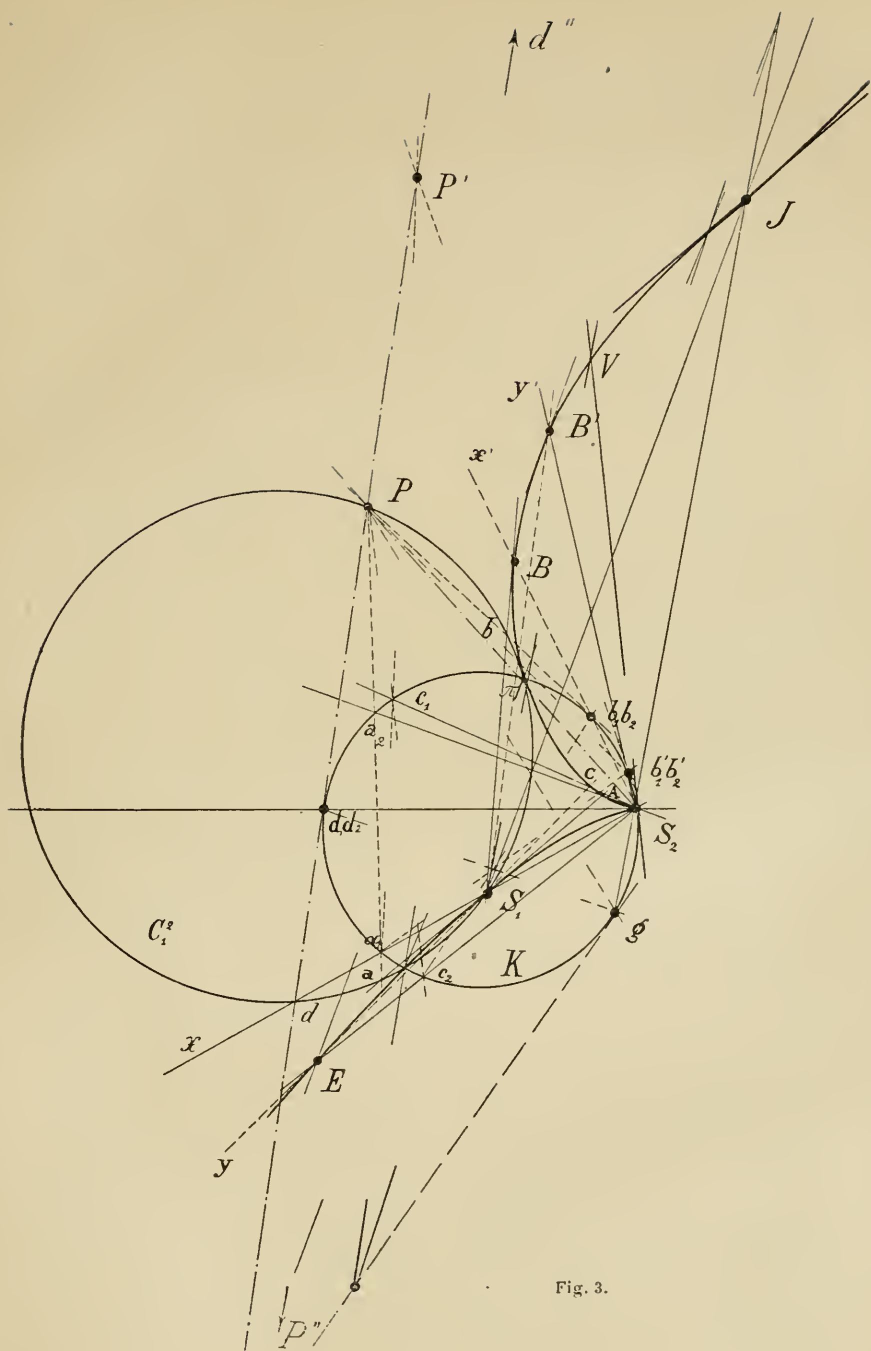



Fig. 3.

$S_1$ et ils engendrent une courbe du 3e degré $C^3$. Les rayons de $S_2$ forment une involution que l'on coupe par un cercle K. Le centre correspondant est P. Les faisceaux homographiques simples en P et en $S_1$ engendrent la conique auxiliaire $C^2$.

Comme nous considérons le cas ou $S_2$ est un point de rebroussement, la droite $\overline{Pd}$ relative au rayon $S_2S_1$ doit être une tangente de K en $d_1d_2$. $Sd_1$ est donc la tangente de rebroussement en $S_2$.

La tangente en $S_1$ dépend du rayon $\overline{Pa_1a_2}$. Elle coupe encore la courbe $C^3$ en A. La seconde tangente par $S_1$ est donnée par la tangente $\overline{Pb_1b_2}$ de K ; c'est $\overline{S_1bB}$ avec le point de tangence B sur $\overline{S_2b_1B}$.

Dès maintenant nous pouvons considérer un point quelconque E de $C^3$ comme sommet du faisceau simple engendrant la courbe avec $S_2$. Le rayon $\overline{ES_1}$ coupe $C^3$ en C. $\overline{S_2S_1}$ et $\overline{S_2C}$ sont conjugués à $ES_1C$. L'involution en $S_2$ admettra un nouveau centre en P′ sur la tangente $\overline{Pd_2}$. Il se trouvera également sur la transversale $a_1c_1$.

La tangente $P'b'_1$ de K détermine le rayon $\overline{S_2b'_1B'}$ et la tangente $\overline{EB'}$ de $C^3$ par E. On a trouvé B′ au moyen des faisceaux primitifs $S_2$ et $S_1$.

Les rayons $\overline{S_2S_1} = x$ et $\overline{S_2B} = x'$ puis $\overline{S_2E} = y$ $\overline{S_2B'} = y'$ forment comme précédemment deux paires de rayons univoquement conjugués, mais non réciproques. Ils appartiennent à deux elles engendrent une courbe de 3e classe $K^3$. Les points sur $P_2$ forment une involution ; en menant un cercle C tangent de $P_2$, les tangentes issues des points conjugués donnent un axe d'involution $\overline{ab}$. Les divisions homographiques sur $\overline{ab}$ et sur $P_1$ engendrent une conique auxiliaire $K_1^2$.

Nous considérons le cas où $P_2$ est une tangente d'inflexion. Il faut qu'une des droites $\overline{Aa}$ ou $\overline{Ab}$ soit une tangente de $K_1^2$. A est le point de coupe des bases et $a$ ou $b$ sont les intersections de l'axe $\overline{ab}$ avec C. La tangente de C par $a$ donne le point d'inflexion sur $P_2$, $\overline{Aa}$ étant la tangente de $K_1^2$. Le point de tangence de $P_1$ dépend de la tangente de C par $A = C_1$. La tangente est $\overline{C_1c}$ et le point de tangence cherché est C sur $P_1$.

Le 2e point de coupe de $P_1$ avec $K^3$ est déterminé par la tangente de $K_1^2$ par $b$ ; c'est B.

En désignant C par $x$ et $B_1B_2$ conjugués de B par $x'$, nous aurons deux points univoquement conjugués et non réciproques sur $P_2$.

Prenons maintenant une autre tangente de $K^3$ soit $EE_1 = P_3$ comme nouvelle base simple. On a $E_1 = y$. Les points $C_1$ et $E_2$ sont conjugués sur $P_2$ et les tangentes correspondantes à $C_1$ se coupent en $e'$ ; le nouvel axe d'involution est $\overline{ae'}$, car $a$ est l'enveloppe de tous ces axes. Cet axe coupe C en $b'$. La tangente de C par $b'$ donne le point conjugué de $E_1$, soit $y'$.

Les points conjugués $xx'$ et

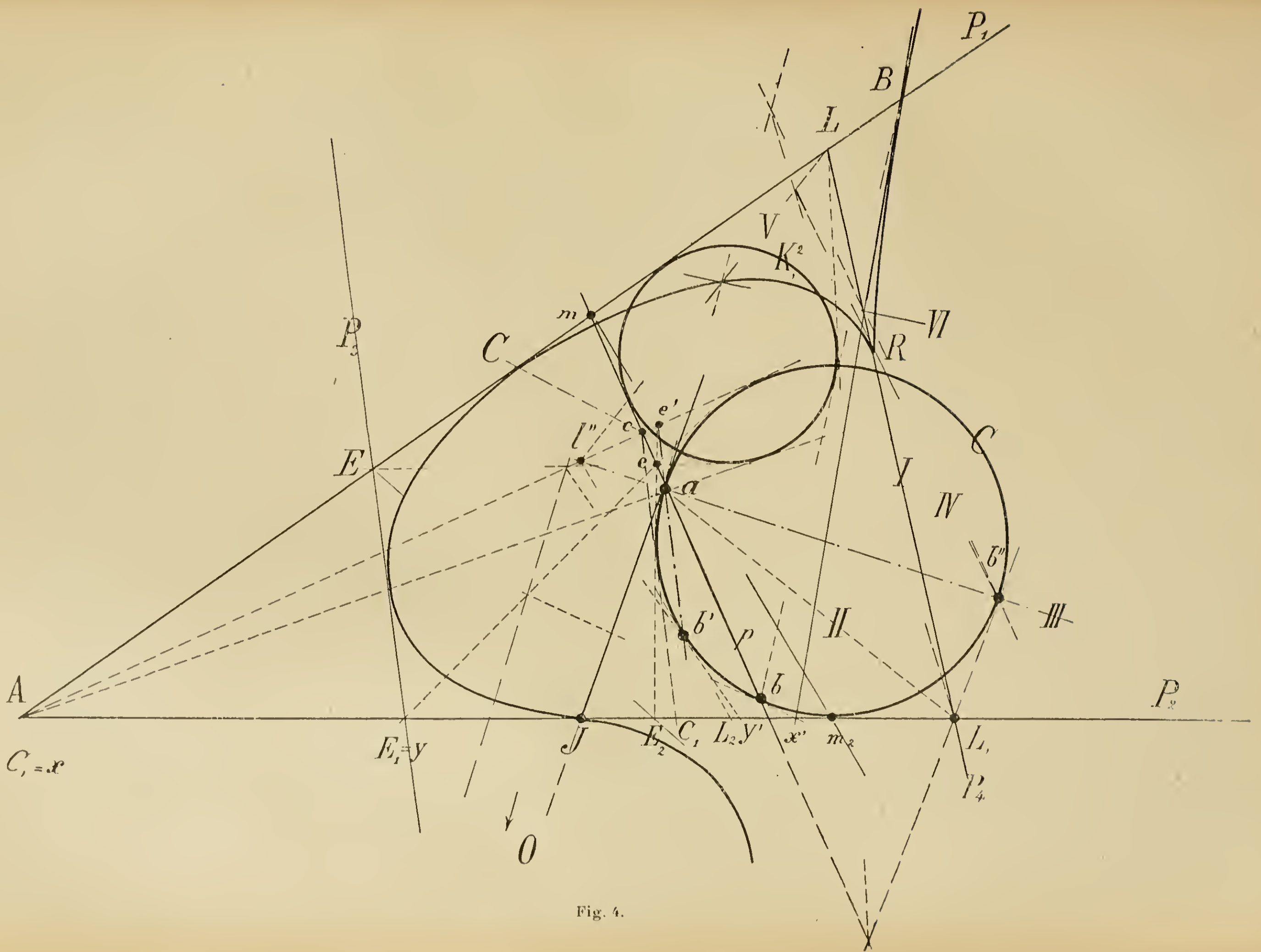

P1
B
L
V
K2
K1
VI
R
m
C
P3
E
l''
c
e'
e
a
C
I
IV
b''
III
II
b'
p
b
A
P2
C1=x
E1=y
J
E2
C1
L2
y'
x''
m2
L1
P4
O

Fig. 4.

faisceaux homographiques concentriques en S. $\overline{S_2 d_1}$ ou la tangente de rebroussement est un rayon double.

Le second rayon double passera par un point simple de $C^3$ tel que les deux tangentes de $C^3$ par ce point seront confondues. Le second rayon double passera donc par le point d'inflexion.

Comme d'après ce qui précède il n'y a qu'un tel rayon, il n'y aura qu'un seul point d'inflexion sur la courbe $C^3$.

On obtient ce deuxième rayon double au moyen du cercle primitif K. L'axe d'homographie correspondant est $\overline{d_1 g}$ avec $g$ sur K. Le rayon double passe par $S_2$ et par $g$.

Nous déterminerons le point d'inflexion J en cherchant l'intersection de $S_2 g$ avec $C^3$ au moyen des faisceaux primitifs.

Si la cubique est déterminée par les faisceaux $S_2$ et J, $S_2$ étant un point de rebroussement et J un point d'inflexion, nous désignerons la conique auxiliaire par $C_2^2$. Le point de coupe de $S_2$J avec $C_2^2$ soit $d''$ sera sur la tangente de K par $d_1$, $d_1$ étant sur K et sur la tangente de rebroussement. P$''$ sera sur $dd''$ et sur $C_2^2$. D'un autre côté, la tangente de K par P$''$ donnera un point de tangence $g$ sur $S_2$J.

Pour trouver la tangente d'inflexion par J nous établirons la conique précédente $C_2^2$ et nous procéderons ensuite comme pour la tangente en $S_1$. Nous prendrons le $2^e$ point de coupe de P$''g$ avec $C_2^2$ soit $\alpha'$, et la droite J$\alpha'$ sera la tangente désirée.

$yy'$ sur $P_2$ appartiennent à deux divisions homographiques simples sur $P_2$ ; le point d'inflexion J est un point double de ces divisions.

Elles ont encore un second point double $L_1$ et la tangente de $K^3$ par $L_1$ donnera une tangente de rebroussement, puisque son second point de coupe avec $K^3$ est confondu avec son point de tangence et que les tangentes en ces points sont également confondues.

Comme il n'y a qu'un deuxième point double possible, il n'y a donc qu'une seule tangente de rebroussement de la courbe $K^3$.

Nous trouverons le point double $L_1$ avec le cercle C et les tangentes par $xx'$ et $yy'$. Nous obtenons un centre d'homographie O et la tangente de C par ce point donne $b''$ sur C, puis $L_1$ le point cherché sur $P_2$.

Nous aurons la tangente de rebroussement par $L_1$ en utilisant les bases primitives $P_1$ et $P_2$. Nous trouverons ainsi la tangente $\overline{LL_1}$.

Si la courbe $K^3$ est déterminée par les divisions $P_2$ et $P_4 = LL_1$, nous aurons une nouvelle conique auxiliaire $K_2^2$. Soit $L_1$ le point de coupe des bases, la $2^e$ tangente de $K^3$ par $L_1$ sera $\overline{L_1 R}$, la $2^e$ tangente de C par $L_1$ sera $\overline{L_1 b''}$, les points $a$ et $b''$ sont sur C et sur l'axe d'involution.

La tangente de C par $a$ donne le point d'inflexion et la tangente de $K_2^2$ par $b''$ passe par le point de rebroussement R.

Pour trouver le point de rebroussement lui-même, nous construirons la conique précé-

La conique auxiliaire $C_2^2$ relative à J est donnée par les conditions suivantes : elle passe par J, par $d''$ sur $S_2J$ et la tangente de K par $d_1$, puis par P″ sur $d''d_1$ et la tangente de K par son second point de coupe $g$ avec $S_2J$.

Nous pouvons en outre prendre les points IV et V. Le premier est déterminé au moyen des rayons homologues SE et IE ; $S_2E$ coupe K en $c_2$ ; $\overline{P''c_2}$ coupe ensuite IE en IV sur $C_2^2$.

On a de même V au moyen du point de B.

Nous cherchons ensuite le 6e point de $C_2^2$ sur $\overline{P''g}$, par l'hexagone de Pascal.

*La ligne de jonction de ce point avec J est la tangente d'inflexion.*

Comme 4e et 5e points nous pouvons aussi utiliser le conjugué de J par rapport au corésiduel V, et enfin nous pourrions nous servir des points de coupe de K avec la première conique auxiliaire $C_1^2$.

Ce dernier procédé est le moins avantageux, car seuls ces points ne peuvent pas être établis avec la règle et le compas.

Dans les autres considérations tous les points peuvent être établis avec la règle et le compas.

dente $K_2^2$ et nous chercherons sa 2e tangente par $b''$.

La conique auxiliaire $K_2^2$ relative à $LL_1$ est donnée par les tangentes $P_4 = I$, $L_1a = II$ et l'axe d'involution correspondant $\overline{ab''} = III$.

Nous prenons en outre les tangentes V et VI. Pour trouver V nous menons par $L_2$ la tangente de C jusqu'à $l''$ sur l'axe $ab''$ puis on a $l''L_2 = V$. On a de même VI au moyen de la tangente $BB_1 = Bx'$ de $K^3$.

Nous cherchons la tangente de $K_2^2$ par $b''$ au moyen de l'hexagone de Brianchon.

*Le point de coupe de cette dernière tangente avec* $\overline{LL_1}$, *soit* R *est le point de rebroussement.*

Les 4e et 5e tangentes nécessaires peuvent être des tangentes communes de K et $C_1^2$ ou encore la tangente conjuguée de $LL_1$ par rapport à la droite corrésiduelle $\overline{mm_2}$.

De ces diverses méthodes, celle des tangentes communes à toutes les coniques du faisceau homographique possible de la division sur la droite corrésiduelle est la moins avantageuse au point de vue constructif.

Toutes les autres méthodes conduisent à des constructions réalisables par la règle et le compas, ce qui n'est pas le cas pour la méthode des tangentes communes.

Les observations qui précèdent nous montrent que la construction des points d'inflexion dans les courbes du 3e degré et de la 3e classe, ainsi que celle des tangentes de rebroussement dans les courbes de la 3e classe et de 3e degré peuvent être entièrement exécutées avec la règle et le compas,

et cela de plusieurs manières différentes. Ces observations nous conduisent en outre aux règles dualistiques suivantes résumant les constructions :

*Une cubique* $C^3$ *à point de rebroussement* $S_2$ *étant donnée par les points nécessaires, la ligne de jonction de* $S_2$ *avec chaque point* $S_1$ *est univoquement conjuguée à la ligne de jonction de* $S_2$ *avec le point de tangence* B *de la tangente de* $C^3$ *menée par* $S_1$.

*Cette relation n'est pas réciproque.*

*Ces droites forment deux faisceaux homographiques concentriques en* $S_2$ *dont les rayons doubles sont d'une part la tangente de rebroussement et d'autre part une droite passant par le point d'inflexion.*

*Une courbe de 3e classe* $K^3$ *à tangente d'inflexion* $P_2$ *étant donnée par les éléments nécessaires, le point de coupe de* $P_2$ *avec chaque tangente simple* $P_1$ *est univoquement conjugué au point de coupe de* $P_2$ *avec la tangente de* $K^3$ *menée par le point d'intersection de* $P_1$ *avec* $K^3$.

*Cette relation n'est pas réciproque.*

*Ces points forment deux ponctuelles homographiques sur la même base* $P_2$ *; les points doubles sont d'une part le point d'inflexion et d'autre part, un point situé sur la tangente de rebroussement.*

L. Crelier (Berne-Bienne).

---

## SUR LES COURBES DE RIBAUCOUR

Dans une récente thèse *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve* (Heidelberg, 1911), M. Léopold Braude a appelé l'attention sur certaines courbes qu'il a nommées *Zwischenevolute* et que je désignerai par la dénomination de *développées intermédiaires*. Soit une courbe plane (C) ; soit P le point qui divise en une raison donnée $\lambda$ le rayon de courbure $M\mu$ de la courbe (C) en M, c'est-à-dire soit P le point tel que l'on ait :

$$\frac{M\mu}{MP} = \lambda\ ;$$

$\lambda$ étant un nombre algébrique fixé, lorsque le point M décrit la

courbe (C), le point P décrit une courbe qui, par définition, est la développée intermédiaire de (C), associée au nombre $\lambda$.

A toute courbe (C) est ainsi associée une infinité, dépendant du paramètre $\lambda$, de développées intermédiaires. Parmi celles-ci, se trouvent la courbe elle-même ($\lambda = \infty$) et la développée proprement dite ($\lambda = 1$).

Des exemples remarquables de développées intermédiaires ont été donnés par M. Braude dans le mémoire précédemment cité et dans divers travaux qui lui font suite : *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Evolutoïde* (*Archiv der Mathematik und Physik*, III Reihe, XX, p. 44-52). — *Les développées imparfaites des spirales sinusoïdes, des courbes de Ribaucour, et des coniques* (*Giornale di Matematiche di Battaglini*, 1912, p. 310).

Le problème inverse paraît devoir être particulièrement intéressant. Il s'agit, étant donnée une courbe plane ($\Gamma$), de rechercher les courbes (C) dont ($\Gamma$) puisse être une développée intermédiaire. Le cas le plus simple est celui pour lequel ($\Gamma$) est une droite ; les courbes correspondantes (C) sont celles que Jean Bernoulli avait considérées dès 1716 et que l'on désigne d'habitude sous le nom de *courbes de Ribaucour*, en l'honneur du géomètre français qui les a utilisées, en 1880, dans son *Etude sur les élassoïdes*.

Je ne ferai point ici l'historique de ces courbes remarquables : elles sont étudiées dans les ouvrages (indispensables dans des études de cette nature) de M. Gomes Teixeira (*Traité des courbes spéciales remarquables*, t. II, pp. 282-286) et de M. Gino Loria (*Spezielle ebene Kurven*, t. II, pp. 137 et 234). L'article *Courbes transcendantes particulières* de l'édition française de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* en contiendra d'ailleurs la bibliographie complète.

Je me propose uniquement de développer ici des considérations qui se rattachent à quelques-uns des résultats obtenus par M. Braude.

## I. — Relation entre la chainette de Coriolis et les courbes de Ribaucour.

Dans un article intitulé *Courbes transcendantes et interscendantes* (*Enseignement mathématique*, mai 1912, pp. 209-214), j'ai insisté assez longuement sur le fait que, par un passage à la limite, certaines courbes transcendantes particulières peuvent être envisagées comme appartenant à une famille de courbes algébriques ou interscendantes qui dépendent d'un paramètre arbitraire : la spirale logarithmique, par exemple, est, d'après M. Haton de la Goupillière, la limite d'une certaine famille de spirales sinusoïdes.

Il se produit un fait analogue pour les courbes de Ribaucour. L'équation différentielle de celles-ci étant

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{m}} - 1}},$$

pour $m$ rationnel, ces courbes de Ribaucour sont certainement des courbes panalgébriques, au sens de M. Gino Loria ; pour des valeurs rationnelles particulières, elles peuvent même être algébriques. Mais lorsque $m$ est un nombre irrationnel, ces courbes de Ribaucour cessent d'être panalgébriques : l'ordre minimum de l'équation différentielle rationnelle, qui les admet pour intégrales, est alors deux : ce sont donc des courbes qui sont à l'égard des courbes panalgébriques précédentes, ce que les courbes interscendantes sont par rapport aux courbes algébriques. De même que les courbes interscendantes constituent une transition entre les courbes algébriques et les courbes transcendantes proprement dites, de même les courbes actuelles se placent naturellement entre les courbes panalgébriques et les courbes transcendantes du second ordre proprement dites.

Pour la valeur zéro du paramètre $m$, l'équation différentielle des courbes de Ribaucour se présente sous une forme illusoire. Ossian Bonnet (Journal de Liouville, 1844, p. 223 et p. 235) observe, d'après la définition mécanique des courbes de Ribaucour qu'il prend pour départ, que, pour ce cas singulier, la courbe de Ribaucour doit être remplacée par une chaînette d'égale résistance de Coriolis.

Ce même fait est signalé dans une Note *Ueber die Kurven, unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden* de M. L. Braude, *insérée dans les Monatshefte für Mathematik und Physik* (t. XXIII, 1912, p. 288). Nous pouvons préciser ce résultat en envisageant la famille suivante de courbes de Ribaucour :

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1 + my)^{\frac{2}{m}} - 1}};$$

$y_0$ est un nombre fixé ; quant à $m$, c'est le paramètre arbitraire dont nous faisons dépendre la courbe de Ribaucour ; ce paramètre est supposé varier d'une manière continue au voisinage de zéro ; il prendra toute valeur possible, rationnelle ou non : la famille de courbes de Ribaucour comprendra donc des courbes des deux premiers ordres de transcendance.

Dans ces conditions, la famille envisagée de courbes de Ribau-

cour admet une courbe limite lorsque $m$ s'annule ; celle-ci est représentée par l'équation

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{e^{2y} - 1}} = \text{arc cos } e^{-y} - \text{arc cos } e^{-y_0} \;;$$

par un changement d'origine, on la réduit à la forme suivante :

$$x = \text{arc cos } e^{-y} \;;$$

d'où il résulte que cette courbe limite est la chaînette d'égale résistance de Coriolis :

$$e^y \,.\, \cos x = 1 \;.$$

Cette courbe est du second ordre de transcendance, de même que la courbe générale de la famille de courbes de Ribaucour dont elle est la limite.

## II. — Equations tangentielles des courbes de Ribaucour.

Sauf pour la parabole, la chaînette, et la cycloïde, je n'ai trouvé aucune trace de recherches sur l'équation tangentielle d'une courbe de Ribaucour. L'équation tangentielle de la cycloïde a été formée par W. H. Besant dans ses *Exercices pour la licence* (voir *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1871, p. 286). Quant à la chaînette, son équation tangentielle — que l'on trouvera plus loin — n'a pas été considérée à proprement parler ; mais l'équation analogue de l'alysséide a été fréquemment envisagée.

Il est aisé de former l'équation tangentielle d'une courbe de Ribaucour en partant de son équation ponctuelle. Je vais former cette même équation, d'après la propriété géométrique qui définit une courbe de Ribaucour.

J'utiliserai à cet effet le système de coordonnées polaires tangentielles de Hesse et de Ferrers : la courbe est considérée comme enveloppée par la droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi \;;$$

en prenant l'axe $Ox$ pour base de la courbe de Ribaucour, la condition géométrique imposée à cette courbe est

$$MC = m \,.\, MN \;;$$

M est un point quelconque de la courbe de coordonnées :

$$\mathrm{M}\begin{cases} x = \varpi \cos\varphi - \dfrac{d\varpi}{d\varphi}\sin\varphi , \\ y = \varpi \sin\varphi + \dfrac{d\varpi}{d\varphi}\cos\varphi ; \end{cases}$$

N est la trace sur $Ox$ de la normale d'équation :

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = \frac{d\varpi}{d\varphi} ;$$

C est le rayon de courbure situé sur la normale précédente : ses coordonnées sont

$$\mathrm{C}\begin{cases} x_c = -\dfrac{d\varpi}{d\varphi}\sin\varphi - \dfrac{d^2\varpi}{d\varphi^2}\cos\varphi , \\ y_c = \dfrac{d\varpi}{d\varphi}\cos\varphi - \dfrac{d^2\varpi}{d\varphi^2}\sin\varphi ; \end{cases}$$

portons les valeurs des ordonnées de M et de C dans la relation

$$y_{\mathrm{M}} - y_c = m y_{\mathrm{M}} , \qquad \text{ou} \qquad y_c = (1-m) y_{\mathrm{M}} ;$$

on obtient ainsi une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d\varpi}{d\varphi}\cos\varphi - \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2}\sin\varphi = (1-m)\left[\varpi\sin\varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi}\cos\varphi\right] ;$$

toutes simplifications faites, cette équation se réduit à

$$\left(\varpi + \frac{d^2\varpi}{d\varphi^2}\right)\sin\varphi = m\left(\varpi\sin\varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi}\cos\varphi\right) ;$$

on peut l'écrire sous la forme équivalente

$$\operatorname{tang}\varphi\,\frac{dy}{d\varphi} = my ,$$

en introduisant l'ordonnée $y$ du point M de la courbe. Une première intégration donne donc

$$y = \mathrm{A}\sin^m\varphi ;$$

comme on a d'autre part

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\varpi}{\cos\varphi}\right) \equiv \frac{y}{\cos^2\varphi} .$$

il en résulte par une seconde intégration :

$$\varpi = A \cos \varphi \int_0^\varphi \frac{\sin^m \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi + B . \cos \varphi \ .$$

Telle est la formule désirée : cette équation tangentielle générale de la courbe de Ribaucour dépend de deux constantes arbitraires A et B. La présence de B est due à ce que la question se traduit par une équation différentielle qui admet la translation parallèle à $Ox$ pour transformation infinitésimale. Par un choix convenable de l'origine, on peut toujours faire disparaître le terme en $B . \cos \varphi$. Quant à la constante A, elle provient de ce que l'homothétie est aussi une transformation infinitésimale. Pour faire l'étude d'une courbe de Ribaucour d'indice $m$, on pourra, par conséquent, se borner à celle de la courbe que représente l'équation :

$$\varpi = \cos \varphi \int_0^\varphi \frac{\sin^m \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi \ .$$

Pour $m = 0$, on trouve bien un point, qui du point de vue tangentiel est une courbe de Ribaucour particulière. Pour $m = 1$, on trouve un cercle dont le centre est le pôle.

Pour $m = -1$, l'intégration donne l'équation tangentielle,

$$\varpi = 1 + \cos \varphi \ \log \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \ ,$$

de la chaînette ordinaire

Pour $m = -2$, c'est celle,

$$\varpi = - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} \ ,$$

de la parabole.

Pour $m = +2$, on se trouve en présence de la cycloïde ordinaire ; son équation polaire tangentielle est

$$\varpi = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \ .$$

Un changement de pôle permet de se servir de l'équation

$$\varpi = \varphi \cos \varphi$$

pour représenter la cycloïde. Le pôle étant pris au sommet d'un arc de la cycloïde, on pourra lui donner l'équation tangentielle :

$$\varpi = \varphi \sin \varphi \ .$$

Il en résulte que, par rapport à un sommet, la cycloïde ordinaire est la podaire négative de la courbe d'équation polaire

$$r = \theta \sin \theta \ ;$$

cette courbe remarquable se déduit de la spirale d'Archimède par la transformation que M. Brocard utilisa pour définir le trifolium à partir du cercle et qui permet aussi de faire dériver la cochléoïde de la spirale hyperbolique et la logarithmoïde de M. Köstlin de la spirale logarithmique.

L'équation tangentielle de la courbe de Ribaucour la plus générale permet d'étudier simplement des courbes associées à ces courbes. En dérivant l'expression de $\varpi$, on trouve :

$$\varpi + \varpi'' = m \sin^{m-1} \varphi \ .$$

Le rayon de courbure est ainsi :

$$R = m \sin^{m-1} \varphi \ .$$

On sait que Tücker a donné le nom de *radiale* à la courbe lieu des extrémités des vecteurs équipollents aux rayons de courbure menés par un pôle fixe. En d'autres termes, l'équation polaire de la radiale s'obtient immédiatement à partir de l'équation naturelle de la courbe, en changeant les significations des lettres R et $\varphi$. Dans les notations ordinaires, l'équation polaire de la radiale de la courbe de Ribaucour est donc celle d'une courbe de Clairault :

$$r = m \sin^{m-1} \theta \ .$$

C'est là une courbe algébrique ou interscendante que l'on rencontre assez fréquemment, dans des cas particuliers et dans diverses applications. C'est un résultat signalé incidemment par M. L. Braude dans un mémoire des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (XXXIV, 1912, p. 286) « *Ueber Roll- und Fusspunkt-Kurven* ».

Il est aisé de vérifier ainsi que la radiale de la cycloïde est un cercle, et que celle de la chaînette est la courbe *Campyle*.

L'application de ces coordonnées tangentielles permet d'effectuer la rectification de la courbe de Ribaucour. On a

$$\frac{ds}{d\varphi} = R \ ;$$

d'où :

$$s = m \int \sin^{m-1} \varphi \ d\varphi \ .$$

Il en résulte immédiatement l'équation intrinsèque donnée par Cesaro :

$$(m-1)s = \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{m}\right)^{\frac{2}{1-m}} - 1}} ;$$

on retrouve bien ainsi que la *courbe de Mannheim* d'une courbe de Ribaucour est une courbe affine à une autre courbe de Ribaucour. En se reportant aux recherches de M. L. Braude, on peut dire que, parmi les courbes de Mannheim, généralisées au sens de M. Braude et qu'il est possible d'attacher à une courbe de Ribaucour quelconque, se trouve toujours une autre courbe de Ribaucour.

M. E. Köstlin a récemment associé à une courbe plane quelconque une nouvelle courbe qu'il appelle *l'arcuide* de la courbe considérée. Cette arcuide s'obtient en prenant pour fonction $\varpi$ l'expression

$$s \cos \varphi ;$$

l'arcuide d'une courbe de Ribaucour est donc une courbe d'équation polaire tangentielle

$$\varpi = m \cos \varphi \int \sin^{m-1} \varphi \, d\varphi ;$$

l'arcuide d'une courbe de Ribaucour a pour équation naturelle :

$$R = m(m-1)\sin^{m-2}\varphi - m(m+1)\sin^{m}\varphi ;$$

on peut donc la considérer comme étant l'antiradiale d'une certaine courbe (algébrique si $m$ est rationnel, interscendante et panalgébrique si $m$ est irrationnel) d'équation polaire :

$$r = m(m-1)\sin^{m-2}\theta - m(m+1)\sin^{m}\theta ;$$

cette dernière courbe peut d'ailleurs être construite comme étant la cissoïdale de deux courbes de Clairault du genre précédemment rencontré

$$r = A \sin^{\mu} \theta .$$

III. — A côté des courbes de Ribaucour, il conviendra de placer les courbes d'équation :

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{m}} + 1}} ;$$

elles sont en effet *affines des courbes de Ribaucour*, à condition d'introduire des nombres imaginaires. Pour $m = -2$, cette équation représente une parabole; pour $m = -1$, la courbe correspondante est une hyperbole du second degré. Pour $m = +1$, la courbe est transcendante panalgébrique : c'est la sinusoïde hyperbolique.

Pour $m$ quelconque, on n'a pas encore eu à envisager de telles courbes, pour la raison qu'elles ne se présentent pas dans les applications. J'ai cependant rencontré la courbe $m = \frac{1}{2}$, à propos de l'étude d'une autre courbe transcendante.

Dans des recherches de géométrie, j'ai été amené à considérer la courbe dont la radiale est la courbe panalgébrique :

$$r = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} \mu\theta}}.$$

Cette courbe d'équation naturelle

$$R = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} \mu\varphi}},$$

peut être représentée par les équations :

$$x = \int \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\operatorname{sh} \mu\varphi}}\, d\varphi,$$

$$y = \int \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\operatorname{sh} \mu\varphi}}\, d\varphi;$$

elle est transcendante et son ordre de transcendance est toujours 3, *quel que soit* $\mu$. Ces équations paramétriques de la courbe rappellent, quant à leur forme, celles qui servent à représenter la *pseudo-chaînette*. Quel que soit $\mu$, on a l'équation intrinsèque suivante :

$$\frac{\mu}{2} s = \int \frac{dR}{\sqrt{R^4 + 1}};$$

la rectification s'effectue à l'aide des intégrales elliptiques. La courbe de Mannheim est donc une des courbes affines aux courbes de Ribaucour (au sens qui vient d'être précisé) avec la valeur $m = \frac{1}{2}$ de l'indice.

IV. — Il me reste à signaler que, dans un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1913), intitulé « *Généralisation des courbes de Ribaucour* », j'ai considéré les mêmes courbes que

M. Braude, dans son article déjà cité *Ueber die Kurven unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden*. Ce n'est qu'après l'impression de mon travail, que j'ai eu connaissance de celui de M. Braude. Nos méthodes sont d'ailleurs essentiellement distinctes, puisque M. Braude utilisait l'expression du rayon de courbure de la développée intermédiaire et formait l'équation de la courbe en coordonnées intrinsèques. En ce qui me concerne, au contraire, poursuivant les calculs d'un récent article *Sur les roulettes à base rectiligne* (*Enseignement mathématique*, XV[e] année, n° 4, p. 319-325, 1913), j'ai utilisé les coordonnées tangentielles, et, désirant généraliser un théorème d'Ossian Bonnet, j'ai établi un mode de génération cinématique des courbes obtenues.

É. Turrière (Montpellier).

---

## SUR LES AXES ROTATIFS

Dans une intéressante étude *Sur les axes principaux d'inertie*, publiée dans l'*Enseignement mathématique* du 15 juillet 1913, M. Bouny établit deux propositions concernant les axes susceptibles d'être axes instantanés de rotation sous l'action d'une percussion [1].

Ces axes, que nous avons proposé d'appeler *axes rotatifs* [2], par opposition aux axes hélicoïdaux (axes de rotation et de glissement) satisfont, comme l'indiquent la plupart des traités de mécanique [3], à la condition nécessaire et suffisante d'être axes principaux d'inertie par rapport à l'un de leurs points.

M. Bouny démontre 1° que dans les ellipsoïdes d'inertie contruits sur les différents points d'un de ces axes, les plans diamétraux conjugués à l'axe sont normaux au plan déterminé par l'axe et par le centre de gravité ; 2° que ces plans diamétraux conjugués forment un faisceau de plans, ayant pour axe la ligne d'action de la percussion correspondante.

---

[1] Pour éviter toute confusion, faisons observer que nos raisonnements s'appliquent à une percussion sollicitant un solide libre dans l'espace et primitivement immobile. Un axe instantané de rotation, réalisé en ce cas, coïncide évidemment avec un axe fixe, dont les réactions sont nulles à l'instant de la percussion.

[2] *Centres de percussion et axes de rotation* (Revue de Mécanique, avril 1911 ; Bulletin technique de l'Association des ingénieurs sortis de l'Ecole polytechnique de Bruxelles, avril 1911).

[3] Cf. Appell, t. II, 3e éd., 1911, n° 512, p. 498 ; Sturm, t. II, 3e éd., 1875, p. 154 ; Graindorge, 1889, t. II, p. 341, etc., etc.

La première des deux propositions de M. Bouny formule, pour les différents points d'un axe rotatif une propriété que nous avions énoncée pour le centre de gravité [1]. On pourrait fondre les deux énoncés en une proposition unique, d'un caractère plus général, et s'étendant à tous les points du *plan central* de l'axe rotatif. (Pour simplifier les énoncés, nous désignons par plan central d'un alignement un plan déterminé par cet alignement et par le centre de gravité).

Cette proposition généralisée est la suivante : *Dans l'ellipsoïde d'inertie construit sur un point quelconque du plan central d'un axe rotatif, le plan diamétral conjugué à la direction de cet axe est normal au plan central.*

L'auteur de l'article *sur les axes principaux d'inertie* a recours à « un système de référence dont l'axe des $z$ coïncide avec la droite choisie ». Tel est, comme il le rappelle, le procédé suivi dans beaucoup d'ouvrages d'enseignement pour étudier les propriétés des axes rotatifs.

Mais cette question peut se traiter facilement au moyen d'un système de référence dont l'origine coïncide avec le centre de gravité, et dont les axes ne coïncident pas avec les axes de l'ellipsoïde central d'inertie. C'est ce que nous nous proposons de faire voir, tout en faisant ressortir quelques autres propriétés des axes rotatifs.

Remarquons d'abord que les deux lois de perpendicularité et de réciprocité, qui lient entre eux l'axe rotatif et la ligne d'action de la percussion, peuvent s'établir préalablement à toute recherche analytique, et sans faire choix d'aucun système de coordonnées.

En effet, pour constater que la ligne d'action est forcément normale au plan central de l'axe rotatif, il suffit d'invoquer d'une part les principes élémentaires de la dynamique des systèmes, en vertu desquels le centre de gravité d'un solide libre et primitivement immobile se met en mouvement dans la direction de la percussion ; et d'autre part l'axiome de cinématique en vertu duquel tout point commençant à tourner autour d'un axe, se déplace normalement au plan fixe qui le reliait à l'axe.

Quant à la réciprocité des distances de la ligne d'action et de l'axe rotatif à l'*axe central* (axe parallèle à l'axe rotatif, mené par le centre de gravité), elle s'établit en écrivant l'équation du moment des quantités de mouvement autour de l'axe rotatif :

$$M\omega\rho(\rho + r) = M(k^2 + \rho^2)\omega ,$$

dans laquelle $M\omega\rho$ est la quantité de mouvement équivalente à

[1] *Bulletin technique*, avril 1911, p. 196.

l'impulsion de la percussion, et égale au produit de la masse totale M par la vitesse linéaire $\omega\varrho$ du centre de gravité, $\omega$ étant la vitesse angulaire, $\varrho$ et $r$, les distances respectives de l'axe rotatif et de la ligne d'action à l'axe central, $k$ le rayon de giration de l'axe central.

Cette formule, en se simplifiant, donne la condition de réciprocité :

$$\varrho r = k^2. \qquad (1)$$

Ces recherches préliminaires étant faites, on pourra choisir un système d'axes coordonnés ayant le centre de gravité pour origine, l'axe central pour axe des $z$, et une parallèle à la ligne d'action pour axe des $y$. Si l'on désigne par $x_0$ et $x_1$ respectivement l'abscisse des différents points de l'axe rotatif, et celle des différents points de la ligne d'action, la formule (1) devient :

$$x_0 x_1 = - k^2. \qquad (2)$$

Ce point acquis, on résoudra le problème par l''évaluation des moments des quantités de mouvement autour des axes des $y$ et des $x$.

Le moment autour des $y$ étant nul en vertu du choix des axes, entraîne l'annulation du produit d'inertie par rapport aux $x$. On écrira donc, en désignant par $m$ chacune des masses élémentaires :

$$\Sigma myz = 0, \qquad (3)$$

Cette formule exprime la condition nécessaire et suffisante pour que le plan diamétral conjugué à l'axe des $z$ dans l'ellipsoïde central d'inertie soit normal au plan central de cet axe.

En conséquence, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un alignement soit axe rotatif, c'est qu'il se trouve dans un plan central perpendiculaire au plan diamétral conjugué à sa direction dans l'ellipsoïde central d'inertie.*

Or, comme cette condition est commune à toutes les droites de même direction contenues dans un même plan central, il en résulte que si une droite est axe rotatif, toutes ses parallèles, appartenant à son plan central, le sont aussi.

Si l'on désigne par $I_x$, $I_y$, $I_z$, $p_x$, $p_y$, $p_z$, respectivement les moments d'inertie et les produits d'inertie par rapport aux trois axes coordonnés, et si l'on tient compte de ce que le produit d'inertie $p_x$, égal à $\Sigma myz$, est nul, l'équation de l'ellipsoïde central est la suivante :

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2p_y zx - 2p_z xy = C. \qquad (4)$$

Or on sait que dans un ellipsoïde d'inertie construit sur un point quelconque $x_0$, 0, $z_0$ du plan des $xz$ (le centre de gravité étant origine) les produits d'inertie par rapport aux $x$ et par rapport aux $z$ conservent les mêmes valeurs que dans l'ellipsoïde central.

Dans un tel ellipsoïde, le terme en $y(z-z_0)$ s'annule, condition nécessaire et suffisante pour que le plan diamétral conjugué à la direction des $z$ soit normal au plan des $xz$.

En conséquence, *le plan diamétral conjugué à la direction de l'axe rotatif dans tout ellipsoïde d'inertie ayant pour centre un point du plan central est normal à ce plan central.*

Or, dans chacun des ellipsoïdes considérés, le diamètre parallèle aux $z$ étant conjugué à un plan diamétral normal au plan central des $xz$, est à la fois diamètre de l'ellipse d'intersection avec le plan central, et de l'ellipse de contour apparent sur le plan central[1].

En conséquence, *les axes rotatifs compris dans un plan central donné, coïncident avec les alignements qui joignent les deux points communs à l'ellipse d'intersection et à l'ellipse de contour apparent dans tout ellipsoïde construit sur un des points de ce plan central.*

On en conclut que si pour un des points du plan central, — et par conséquent pour chacun d'entre eux, — les deux ellipses d'intersection et de contour apparent se confondent, si en d'autres termes le plan central est plan diamétral principal de tous les ellipsoïdes construits sur ses différents points, tous les alignements de ce plan, quelle que soit leur inclinaison, sont axes rotatifs).

D'autre part, toute section plane de l'ellipsoïde, faite normalement au plan central et passant par les points communs à l'ellipse d'intersection et à l'ellipse de contour apparent, a évidemment pour tangentes en ces points des normales au plan central. L'axe rotatif passant par le centre de l'ellipsoïde est donc l'un des axes de cette section elliptique.

En conséquence, *un axe rotatif constitue l'un des axes de la section elliptique faite suivant son alignement, et normalement à son plan central, dans tout ellipsoïde d'inertie construit en un de ses points*[2].

On trouve, par la différentiation de la formule (4), l'équation

---

[1] Cette proposition, qui intéresse tous les ellipsoïdes construits sur des points du plan central, n'avait été formulée dans notre article précédent (*Bulletin technique*, avril 1911, p. 207) que pour l'axe central et l'ellipsoïde central d'inertie.

[2] Dans l'article cité (*Bulletin technique*, avril 1911, p. 208), nous nous étions borné à établir que « tout axe rotatif est parallèle à l'un des deux axes de la section diamétrale (de l'ellipsoïde central) *qui lui fait face* », ou qui, en d'autres termes, est normale à la perpendiculaire abaissée du centre sur cet axe.

du plan diamétral conjugué à l'axe central :

$$\frac{z}{x} = \frac{P_y}{I_z}$$

$$= \frac{P_y}{Mk^2} . \quad (5)$$

Or, pour tout ellipsoïde construit en un point quelconque, $x_0 z_0$, du plan central, le produit d'inertie par rapport aux $y$ et le moment d'inertie par rapport aux $z$ ont respectivement pour pression :

$$P_y + Mx_0 z_0 , \quad \text{et} \quad M(k^2 + x_0^2) .$$

Pour un tel ellipsoïde, l'équation (5) du plan diamétral conjugué se transforme en la suivante :

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \frac{P_y + Mx_0 z_0}{M(k^2 + x_0^2)} . \quad (6)$$

Pour trouver l'intersection de deux plans diamétraux conjugués à un même axe rotatif, menés par deux points $x_0 z_0$, $x_0 z'_0$ de cet axe, on égalera les expressions de $z$ tirées de l'équation (6) appliquée successivement à chacun des deux points, ce qui donnera à $x$ et à $z$ des valeurs indépendantes de $z_0$ et de $z'_0$ :

$$x = -\frac{k^2}{x_0} = x_1 , \qquad z = -\frac{P_y}{Mx_0} = \frac{P_y x_1}{Mk^2} .$$

La formule (6) permet donc de vérifier la seconde proposition de M. Bouny, en montrant que *tous les plans diamétraux conjugués à un même axe rotatif, dans les ellipsoïdes construits sur ses différents points, se coupent suivant un alignement satisfaisant à la condition de réciprocité et appartenant au plan diamétral conjugué à l'axe central dans l'ellipsoïde central.*

D'autre part, on peut, en se fondant sur la formule (6), déterminer le lieu des points où des plans parallèles entre eux et normaux au plan central sont conjugués ; en d'autres termes le lieu des points où ils sont percés par les axes rotatifs auxquels ils sont conjugués.

Si l'on désigne par $\varphi$ et $\alpha$ les inclinaisons respectives du plan

diamétral conjugué au centre, et d'un plan diamétral conjugué quelconque, sur le plan des $xy$, la formule (6) devient :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k^2 \operatorname{tg} \varphi + x_0 z_0}{k^2 + x_0^2} .$$

Si l'on donne à $\alpha$ une valeur constante, on forme le lieu :

$$\operatorname{tg} \alpha (k^2 + x^2) = k^2 \operatorname{tg} \varphi + xz \qquad (7)$$

de tous les points du plan central pour lesquels le plan diamétral conjugué fait un angle bien déterminé $\frac{\pi}{2} - \alpha$ avec l'axe rotatif correspondant.

Ce lieu est une hyperbole ayant pour asymptotes d'une part l'axe central, d'autre part une parallèle, menée par le centre de gravité, aux traces des plans diamétraux considérés.

On voit que selon l'inclinaison choisie, ces hyperboles, ayant toutes une asymptote commune, forment une famille qui couvre tous les points du plan central. Chacun des plans normaux au plan central est conjugué en un seul point : celui où il est percé par l'hyperbole correspondant à son inclinaison. Les plans qui passent par le centre de gravité ne sont conjugués qu'à l'infini (exception faite pour le plan d'inclinaison $\varphi$).

On peut se représenter facilement la disposition de cette famille d'hyperboles en construisant le lieu de leurs sommets : il suffit pour cela d'éliminer $\alpha$ entre l'équation d'une hyperbole et celle de l'ensemble de ses deux axes :

$$\frac{z^2}{x^2} - 2 \frac{z}{x} \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0 .$$

Ce lieu est le suivant :

$$2k^2 xz \operatorname{tg} \varphi + x^2 z^2 = k^2 (z^2 - x^2) - x^4 . \qquad (8)$$

Il est formé de deux branches qui se coupent à angle droit au centre, et ont l'une et l'autre pour asymptotes les deux parallèles à l'axe central, distantes de celui-ci du rayon de giration $k$. La branche qui passe dans l'angle aigu formé par l'axe central et la trace du plan diamétral conjugué au centre se développe entre les asymptotes. L'autre branche coupe les asymptotes et se développe ensuite à l'extérieur de celles-ci.

L'équation (8) peut être mise sous la forme :

$$\frac{z}{x} = \frac{k^2 \operatorname{tg} \varphi \pm \sqrt{k^4 \sec^2 \varphi - x^4}}{k^2 - x^2}$$

Si dans cette formule on fait $x^2 = k^2$, et si l'on adopte devant le radical le signe opposé à celui de $\text{tg}\,\varphi$ (signe qui se rapporte à la branche située dans l'angle obtus) on trouve :

$$\frac{z}{x} = -\frac{1}{\text{tg}\,\varphi}$$

ce qui détermine les deux points où la courbe coupe les asymptotes.

Si l'on fait $x^2 = k^2 \sec\varphi$, expression dans laquelle on considèrera toujours la sécante comme positive (l'angle $\varphi$ variant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$), on trouve :

$$\frac{z}{x} = -\frac{\text{tg}\,\varphi}{\sec\varphi - 1} = -\frac{\sec\varphi + 1}{\text{tg}\,\varphi}$$

ce qui fait voir que le rapport $\frac{z}{x}$ croît dans une proportion supérieure à 2 lorsqu'on passe du point d'intersection au point le plus éloigné de l'axe central.

Si dans la formule (7) on choisit, parmi toutes les valeurs possibles de $\alpha$ la valeur particulière $\alpha = 0$, on obtient l'hyperbole équilatère :

$$xz = -k^2\,\text{tg}\,\varphi$$

ou, en substituant à $\text{tg}\,\varphi$ sa valeur $\frac{p_y}{Mk^2}$ :

$$Mxz = -p_y \quad . \qquad (9)$$

En tous les points de cette hyperbole équilatère les axes sont principaux par construction, puisqu'on a choisi les points pour lesquels les plans diamétraux conjugués sont normaux aux axes rotatifs. Cette propriété se vérifie d'ailleurs par la formule (9) qui exprime que le produit d'inertie par rapport aux $y$ s'annule en chacun des points de l'hyperbole équilatère [1].

Après avoir tiré de l'équation des moments des quantités de mouvement autour de l'axe des $y$ les diverses conclusions ci-dessus, qui concernent exclusivement les axes rotatifs et les plans conjugués à ces axes, on pourra, par l'évaluation du moment des quantités de mouvement autour de l'axe des $x$, déterminer la position de la ligne d'action et constater que celle-ci est contenue dans le plan diamétral conjugué à l'axe central, et coïncide avec l'axe du faisceau de plans déterminé par M. Bouny.

---

[1] Dans notre précédent article (*Bulletin technique*, avril 1911, p. 210), nous avons étudié cette hyperbole équilatère, à l'exclusion de toutes les autres hyperboles correspondant à des plans diamétraux conjugués qui ne sont pas normaux aux axes rotatifs.

On peut conclure de cè qui précède qu'un système d'axes coordonnés ayant pour origine le centre de gravité se prête avec la plus grande facilité à la recherche des propriétés des axes rotatifs.

D'autre part, nous croyons avoir montré que la propriété qu'a l'axe rotatif d'être principal par rapport à l'un de ses points, n'a pas l'importance qu'on lui attribue généralement : elle peut figurer au nombre — et même à la suite, — d'une série de propriétés dont chacune constitue une condition nécessaire et suffisante de la qualité d'axe rotatif.

En effet, pour qu'un alignement soit axe rotatif, il faut et il suffit :

Que le plan diamétral conjugué à sa direction dans l'ellipsoïde central d'inertie (plan qui contient la ligne d'action correspondante) soit normal à son plan central.

Que le plan diamétral conjugué à sa direction dans un ellipsoïde d'inertie construit sur un point quelconque de son plan central soit normal à ce plan central.

Que le diamètre parallèle à sa direction, dans l'ellipsoïde central, ou dans tout autre ellipsoïde d'inertie construit sur un des points de son plan central, — soit un des axes de la section faite suivant ce diamètre par un plan normal au plan central.

Que le diamètre parallèle à sa direction dans l'ellipsoïde central, ou dans tout autre ellipsoïde d'inertie construit sur un des points de son plan central, soit diamètre commun à l'intersection de l'ellipsoïde par le plan central, et au contour apparent de l'ellipsoïde sur le plan central.

Que le faisceau des plans diamétraux conjugués à cet alignement dans les ellipsoïdes construits sur ses différents points ait pour axe une normale à son point central.

Que l'alignement soit axe principal par rapport à l'un de ses points.

Chacune de ces conditions peut évidemment être considérée comme LA condition qui définit un axe central. De chacune d'entre elles peuvent être déduites toutes les autres. Mais nous pensons que la condition classique, celle que nous avons énoncée la dernière, n'est pas de nature à rendre de grands services. C'est en considérant l'ellipsoïde central, et en utilisant la première condition, que l'on résoudra le plus facilement, nous semble-t-il, le problèmes relatifs aux axes rotatifs[1].

Mais il est à remarquer qu'aucune des conditions énoncées ci-dessus n'est nécessaire pour les recherches concernant les solides destinés à subir une percussion dans un plan de symétrie. Dans ce cas, qui se présente presque exclusivement dans la pratique, les deux conditions de perpendicularité et de réciprocité,

---

[1] Cf. *Centres de Percussion et Axes de Rotation.* Bulletin technique d'avril, 1911, p. 198, ss

établies préalablement à toute recherche analytique, sont pleinement suffisantes pour déterminer toutes les inconnues. En effet, on peut considérer comme évident, par raison de symétrie, que l'axe rotatif correspondant à une percussion développée dans un plan de symétrie, est normal à ce plan, et comme tout aussi évident que si l'axe est normal au plan de symétrie, ce plan contient la ligne d'action de la percussion.

En ce qui concerne la cinquième condition, celle qui se rapporte au faisceau de plans conjugués à un même axe en différents points de son alignement, condition déduite de la proposition de M. Bouny, nous l'avons énoncée sous une forme qui suppose que les axes rotatifs ne sont pas seuls à posséder des plans diamétraux conjugués formant un faisceau. En effet, cette propriété est commune *à tous les alignements de l'espace*. En outre, l'axe du faisceau de plans diamétraux conjugués passe toujours par le centre de percussion correspondant, point commun au plan central de l'alignement, et à la ligne d'action de la percussion pour laquelle cet alignement est axe hélicoïdal, c'est-à-dire axe instantané de rotation et de glissement. L'axe du faisceau possède une direction intermédiaire entre celles de la ligne d'action et de la normale au plan central. Il se confond respectivement avec celle-ci et celle-là, à l'origine et à l'infini.

Ces propriétés s'établissent facilement en choisissant pour plan des $xz$ le plan central de l'alignement considéré, pour axe des $z$ l'axe central (parallèle à l'alignement, menée par le centre de gravité) et pour origine le centre de gravité.

Ici l'équation de l'ellipsoïde central contient tous les termes du second degré, y compris le terme en $yz$, et le plan diamétral conjugué à l'axe central a pour équation :

$$\mathrm{M}k^2 z - p_x y - p_y x = 0 \ .$$

Le plan diamétral conjugué à l'alignement donné en un de ses points $x_0 \, z_0$ est le suivant :

$$\mathrm{M}(k^2 + x_0^2)(z - z_0) - p_x y - (p_y + \mathrm{M} z_0 x_0)(x - x_0) = 0 \ .$$

En faisant $x$ constant, on voit que l'intersection de ce plan et d'un plan parallèle aux $yz$ a une inclinaison indépendante de $z_0$.

En cherchant, — comme précédemment pour l'axe rotatif, — l'intersection de deux plans diamétraux conjugués au même alignement, on trouve :

$$x = -\frac{k^2}{x_0} \ , \quad \left(z + \frac{p_y}{\mathrm{M}x}\right)(k^2 + x_0^2) = \frac{p_x y}{\mathrm{M}} \ .$$

L'élimination de $x_0$ entre ces deux formules donne la surface gauche du troisième degré :

$$Mk^2z - p_y x - \frac{x^2}{x^2 + k^2} p_x y = 0 ,$$

constituant le lieu des axes des faisceaux de plans diamétraux conjugués et ayant pour plan asymptotique le plan diamétral conjugué à l'axe central. (On sait que ce plan diamétral conjugué est le lieu des lignes d'action des percussions correspondant aux diverses valeurs de $x_0$.)

Nous remarquerons pour terminer que les deux propositions établies par M. Bouny eussent pu être déduites du théorème que Poinsot avait formulé dans le cas particulier d'un solide tournant autour d'un point fixe, mais qui est encore vrai si le point, sans être fixe, passe par l'état de repos : le plan du moment des quantités de mouvement d'un solide par rapport à l'un de ses points, actuellement en repos, est conjugué à l'axe de rotation dans l'ellipsoïde d'inertie construit sur ce point.

Or, si l'on considère d'une part la percussion correspondant à un axe rotatif, d'autre part un des points de cet axe rotatif, on constatera que la ligne d'action de la percussion détermine avec le point considéré le plan du moment des quantités de mouvement par rapport à ce point. Mais il en est de même pour tous les autres points de l'axe rotatif, d'où il résulte que la ligne d'action, appartenant à tous les plans diamétraux conjugués à l'axe rotatif, est l'axe du faisceau formé par ces plans ; d'où il résulte encore que cette ligne d'action étant normale au plan central de l'axe rotatif, tous les plans diamétraux conjugués sont normaux à ce plan central.

Une démonstration analogue pourrait être faite pour le faisceau de plans diamétraux conjugués à un alignement quelconque, considéré comme axe hélicoïdal. Il faudrait en ce cas supposer deux percussions appliquées simultanément, — l'une dans l'alignement de l'axe hélicoïdal, l'autre au centre de percussion correspondant à cet axe, — de façon à réaliser autour de l'axe une rotation sans glissement. La seconde de ces percussions occuperait l'axe du faisceau de plans diamétraux conjugués.

Mais une telle démonstration ne présenterait pas l'extrême simplicité que l'on constate dans le cas des axes rotatifs.

Bruxelles, août 1913. Lucien Anspach.

# CHRONIQUE

## Conférence internationale de l'Enseignement mathématique.

**Paris, 1-4 avril 1914.**

La Commission internationale de l'Enseignement mathématique se réunira à Paris, du 1er au 4 avril 1914, en une Conférence ayant principalement pour objet l'étude des deux questions suivantes :

A. — *Les résultats obtenus dans l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement moyen.*

B. — *De la place et du rôle des mathématiques dans l'enseignement technique supérieur.*

Les séances auront lieu à la Sorbonne ; entrées : rue des Ecoles et rue de la Sorbonne.

PROGRAMME :

MERCREDI 1er AVRIL.

**Après-midi, $2\,^1/_2$ h.** — Séance du Comité central.
» **4 h.** — Séance des délégués.
**Soir, $8\,^3/_4$ h.** — Sorbonne, séance de la Société Mathématique de France.

JEUDI 2 AVRIL.

**Matin, $9\,^1/_2$ h.** — *Séance générale d'ouverture,* sous la présidence de M. Lucien POINCARÉ, directeur de l'enseignement secondaire, représentant le Ministre de l'Instruction publique.

Allocution de bienvenue de M. P. APPELL, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences.

Discours de M. le Prof. F. KLEIN (Gœttingue), président de la Commission.

Allocution du représentant du Ministre de l'Instruction publique.

Conférence de M. Emile Borel, *sur l'adaptation de l'enseignement aux progrès de la Science.*

Conférence de M. d'Ocagne, *sur le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur.*

**Après-midi, 2 $^1/_2$ h.** — *Séance de travail* consacrée à l'étude de la question A : *Introduction des premières notions du Calcul des dérivées et des fonctions primitives dans l'enseignement secondaire.*

Rapport général de M. le Prof. Beke (Budapest), sur les réponses reçues relativement à la question A.

Rapport spécial de M. Ch. Bioche, sur l'organisation de l'enseignement du Calcul des dérivées et des fonctions primitives dans les lycées de France, et sur les résultats obtenus.

Indications complémentaires fournies par les divers délégués.

Discussion.

Vendredi 3 Avril.

Les séances du vendredi seront réservées à l'étude de la question B : l'*Enseignement des Mathématiques aux élèves ingénieurs.*

**Matin, 9 $^1/_2$ h.** — *Séance de travail* consacrée à l'étude de la question B.

Rapport général de M. le Prof. Paul Stæckel (Heidelberg), sur les réponses reçues relativement à la question B.

Indications complémentaires fournies par les divers délégués.

Discussion.

**Après-midi, 2 $^1/_2$ h.** — Discussion sur l'enseignement mathématique dans les Ecoles d'ingénieurs.

**Soir, 9 h.** — Séance de la Société des Ingénieurs civils de France, 19, rue Blanche.

Samedi 4 Avril.

**Matin, 9 $^1/_2$ h.** — Continuation des discussions sur les questions A et B.

Présentation par les rapporteurs-généraux, MM. les Prof. Beke et Stæckel, de résumés et de conclusions sur les questions A et B.

**Après-midi, 2 $^1/_2$ h.** — Séance des délégués : Les travaux futurs de la Commission.

Les délégués seront appelés à examiner les grandes lignes du programme de la Réunion que la Commission tiendra en 1915 à Munich, et dont l'objet principal sera la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques des divers degrés de l'enseignement.

**Soir, 9 $^1/_2$ h.** — Réception chez S. A. le prince Bonaparte, membre de l'Institut, 10, avenue d'Iéna.

### Admission aux Séances.

La séance générale d'ouverture est publique.

Les séances de travail sont réservées : 1° aux membres de la Commission et des Sous-commissions nationales ; 2° aux personnes munies d'une carte de participant. Cette carte peut être obtenue auprès du secrétaire-général par l'intermédiaire des membres de la Commission.

Les *adhésions* sont reçues, dès maintenant jusqu'au 1[er] mars 1914, auprès du secrétaire-général, M. le Prof. H. Fehr, 110, Florissant, Genève (Suisse).

### Réunion organisée par la Société française de Philosophie.

La Société française de Philosophie, d'accord avec les Editeurs de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques, convie les Mathématiciens réunis à Paris à l'occasion de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique à un certain nombre de séances où l'on étudiera et discutera diverses questions de philosophie mathématique.

Ces séances auront lieu à la Sorbonne les *lundi 6 avril*, *mardi 7 avril* et *mercredi 8 avril*. Elles seront consacrées à la lecture de Rapports sur des sujets choisis d'avance. Des séances seront spécialement réservées à des entretiens et discussions sur les principaux sujets mis à l'ordre du jour.

## Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Délégation française. — A la suite du décès de notre regretté collègue C. Bourlet et de la démission, pour raisons d'âge et de santé, de M. de Saint-Germain et de M. Laisant, le Comité central a fait appel à M. Bioche, qui avait déjà pris une part très active aux travaux de la Commission, et à MM. Hadamard et d'Ocagne. La nouvelle délégation française se compose donc de MM. Ch. Bioche, prof. au Lycée Louis-le-Grand; J. Hadamard, membre de l'Institut, prof. au Collège de France et à l'Ecole polytechnique; d'Ocagne, prof. à l'Ecole polytechnique et à l'Ecole des Ponts-et-Chaussées.

Le Comité central tient à renouveler ici l'expression de sa profonde gratitude à MM. de Saint-Germain et Laisant pour le concours très précieux qu'ils ont apporté à la Commission dès sa fondation, il y a cinq ans.

Délégation russe. — Nous avons le regret d'annoncer le décès de M. Ch. Vogt, membre de la délégation russe. M. le Ministre

de l'Instruction Publique a désigné comme successeur M. C. Possé, professeur émérite de l'Université de Saint-Pétersbourg, auteur du Rapport sur l'enseignement mathématique dans les universités et les écoles techniques supérieures russes.

Comité Central. — Dans sa réunion de Heidelberg (21-23 juillet 1913), le Comité central a décidé de porter de 4 à 7 le nombre de ses membres. Il a estimé, en effet, qu'à la veille des réunions qui auront lieu à Paris en 1914 et à Munich en 1915, il convenait de compléter le Comité, afin de faciliter les suppléances lorsque l'un ou l'autre des membres se trouverait empêché de prendre part à l'un des Congrès.

Le choix du Comité central s'était porté sur M. P. Appell, membre de l'Institut, Paris, M. G. Castelnuovo, professeur à l'Université de Rome et M. E. Czuber, professeur à l'Ecole technique supérieure de Vienne, qui, par leur situation et leurs connaissances des choses de l'enseignement sont tout particulièrement qualifiés pour participer à la direction des travaux et des séances de la Commission. Toutefois, en ce moment, les nombreuses occupations de M. Appell, notamment ses fonctions de Doyen de la Faculté des Sciences de Paris et sa présidence, en 1914, de l'Institut et de l'Académie des Sciences, ne lui ont pas permis d'accepter cette invitation. Le Comité central s'est alors adressé à M. Hadamard, membre de l'Institut, qui a bien voulu promettre son concours.

Le Comité central se compose donc actuellement de MM. les professeurs F. Klein (Gœttingue), *président;* Sir George Greenhill et Dav.-Eug. Smith (New-York), *vice-présidents;* H. Fehr (Genève), *secrétaire-général;* G. Castelnuovo (Rome), E. Czuber (Vienne) et J. Hadamard (Paris).

Le secrétaire-général de la Commission :

H. Fehr.

## Conférences et Exposition annuelle de la Société française de Physique.

Les *mercredi 15, jeudi 16* et *vendredi 17 avril*, auront lieu à Paris les Conférences et l'Exposition annuelle organisées par la Société française de Physique. Ces conférences sont faites, en partie par des professeurs français, en partie par des professeurs d'universités étrangères, sur des sujets d'actualité. L'Exposition a pour but de faire connaître des appareils récents soit pour des recherches scientifiques, soit pour l'enseignement.

## Congrès des Sociétés savantes françaises.

Le 52e Congrès des Sociétés savantes de Paris et des départements s'ouvrira le 14 avril 1914, à 2 h. de l'après-midi, à la Sorbonne; il se terminera le samedi 18 par une séance que présidera M. le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts.

## 3me Congrès des Mathématiciens scandinaves.

*Christiania, septembre 1913.*

Les mathématiciens scandinaves se sont réunis à Christiania, du 3 au 6 septembre 1913, sous la présidence de M. le professeur Störmer. La séance d'ouverture a été consacrée à une conférence de M. le prof. L. Sylow : « Sur les travaux et les projets d'Abel pendant la dernière période de sa vie, d'après les documents parus depuis l'édition des œuvres complètes publiées par Sylow et Sophus Lie. » Les séances, à raison de deux par jour, furent présidées successivement par MM. Mittag Leffler, suppléant Wiman ; MM. N. Nielsen, suppléant Heegaard ; MM. Fredlhom, suppléant von Koch ; MM. Lindelöf, suppléant Sundman ; MM. Juel, suppléant Jensen.

Nous donnons ci-après la liste des communications :

Prof. Niels Nielsen : Sur quelques applications des nombres de Bernoulli à la théorie des nombres.

Prof. Anders Wiman : La relation entre le module maximum et le plus grand terme d'une fonction analytique.

G. Strömberg : Analyse de la courbe représentant la température à Stockholm 1894-1911.

Prof. Mittag Leffler : Un théorème d'Abel et la série de Dirichlet.

Prof. Hjelmslev : La géométrie de la réalité.

Prof. Sundman : Sur un appareil pour trouver des perturbations spéciales.

Dr Steffensen : Représentation analytique des sommes dans la théorie des nombres.

Prof. Nörlund : Sur des séries de facultés.

Dr Vegard : L'action des champs de force de gravitation sur des solutions.

Prof. Heegaard : Contributions à la théorie des graphes.

Docent Marcel Riesz : Sur les séries de Fourier.

Prof. Phragmen : Remarques sur la conférence précédente.

J. L. W. V. Jensen : Deux communications : L'une sur une formule dans la théorie des nombres et l'autre sur les racines des équations algébriques.

Prof. C. Juel : Sur des surfaces toroïdes du quatrième ordre non algébriques.

Prof. Bjerknes : Sur le traitement mathématique des problèmes météorologiques.

Prof. Hjelmslev : Expériences géométriques.

M. Th. Skolem : Sur la constitution des groupes du calcul identique.
Aktuar Palmström : Calcul des rentes d'invalidité dans l'assurance sociale.
Prof. Johansson : Sur la représentation des potentiels automorphes.
Aktuar Holtsmark : Sur le calcul des rentes viagères sur deux têtes.

## Société italienne pour l'avancement des sciences.

La « Societa italiana per il progresso delle scienze » a tenu son VII^e Congrès à *Sienne* du 22 au 27 septembre dernier. Parmi les *conférences générales* se rapportant directement ou indirectement aux sciences mathématiques il y a lieu de signaler les suivantes :

A. Garbasso, Les principes de la mécanique.
S. Lussana, Sur la thermodynamique des gaz et des liquides.
E. Millosevich, Astronomie et chronologie historique.
C. Parvopassu, Progrès récents dans la science et dans la technique des constructions.
A. Pochettino, Phosphorescence et fluorescence : phénomènes et théories.
G. Foia, L'actuaire et la science des actuaires.

Parmi les *travaux des sections*, nous mentionnons les communications de MM. :

L. Conti, Sur le régime uniforme dans les tuyaux de conduite.
F. Enriques, Sur les conditions suffisantes dans le calcul des variations.
G. Gianfranceschi, La déviation vers l'Est et vers le Sud dans la chute libre des corps pesants.
E. Laura, Sur les distorsions de Volterra dans les solides de révolution.
F. Levi-Civita, Sur le théorème de Torricelli.

## Société mathématique suisse.

*Réunion de Frauenfeld, 9 septembre 1913.*

La Société mathématique suisse a tenu sa 4^e réunion ordinaire à Frauenfeld, le 9 septembre 1913, sous la présidence de M. le Prof. H. Fehr (Genève), comme section de la 96^e réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles. La séance d'ouverture de la Section a été présidée par M. le D^r K. Matter (Frauenfeld).

La *partie scientifique* comprenait onze communications dont deux, celles de MM. Einstein et Grossmann, ont été présentées dans une séance commune avec la Société suisse de Physique.

1. — M. le Prof. L. Crelier (Berne-Bienne), *Sur les correspondances en géométrie synthétique.* — Dans diverses notes parues dans l'*Enseignement mathématique* en 1906, 1907 et 1908, l'auteur a essayé d'étendre quelque peu la théorie géométrique des corres-

pondances $(m.n)$. En considérant principalement les correspondances $(1.n)$, il a pu simplifier et généraliser les résultats de Weyr et indiquer quelques constructions originales pour les cubiques à point double.

En continuant ses recherches, il a observé que l'emploi des correspondances $(1.2)$ peut conduire à la construction des points d'inflexion et des tangentes d'inflexion dans les cubiques à point de rebroussement, ainsi qu'à la construction des tangentes et des points de rebroussement dans les courbes de 3^me^ classe à tangente d'inflexion.

Dans ce cas, toutes les constructions sont réalisables avec la règle et le compas.

Le développement des constructions nécessaires peut être résumé dans la remarque dualistique suivante :

*Une cubique $C^3$ à point de rebroussement $S_2$ étant donnée par les points nécessaires, la ligne de jonction de $S_2$ avec chaque point $S_1$ est univoquement conjuguée avec la ligne de jonction de $S_2$ avec le point de tangence de la tangente de $C^3$ menée par $S_1$.*

*Ces droites forment deux faisceaux homographiques concentriques en $S_2$ dont les rayons doubles sont la tangente de rebroussement et la droite passant par le point d'inflexion.*

*Une courbe de 3^me^ classe $K^3$ à tangentes d'inflexion $P_2$ étant donnée par les éléments nécessaires, le point de coupe de $P_2$ avec chaque tangente simple $P_1$ est univoquement conjugué au point de coupe de $P_2$ avec la tangente de $K^3$ menée par le point d'intersection de $P_1$ avec $K^3$.*

*Ces points forment deux ponctuelles homographiques sur la même base $P_2$; les points doubles sont le point d'inflexion et le point de coupe de $P_2$ avec la tangente de rebroussement.*

Les mêmes méthodes de recherche peuvent être appliquées aux cubiques crunodales et acnodales, ainsi qu'aux courbes de 3^me^ classe à tangente double, avec points de tangence distincts ou imaginaires. Les constructions conservent la même valeur théorique, mais elles ne sont plus comme les précédentes, exclusivement réalisables par la règle et le compas. Elles nécessitent l'intersection d'une conique et d'un cercle dont un point commun est connu.

La remarque dualistique résumant les constructions prend la forme suivante :

*Une cubique $C^3$ à point double $S_2$ est donnée par les éléments nécessaires; la ligne de jonction de $S_2$ avec chaque point $S_1$ de la courbe est conjuguée aux deux lignes de jonction de $S_2$ avec les*

*Une courbe de 3^me^ classe $K^3$ à tangente double $P_2$ est donnée par les éléments nécessaires; le point de coupe de $P_2$ avec chaque tangente simple $P_1$ est conjugué aux deux points de coupe de $P_2$*

*points de tangence des deux tangentes de la courbe menées par* $S_1$ *et rencontrant* $C^3$ *en dehors de* $S_1$.

*Les droites considérées forment une correspondance* (1.2) *de rayons concentriques admettant un ou trois rayons doubles conjugués réels. Ceux-ci passent ensuite par les points d'inflexion de la courbe.*

*avec les tangentes de* $K^3$ *menées par les points d'intersection de* $P_1$ *avec* $K^3$.

*Les points considérés forment une correspondance* (1.2) *de base* $P_2$; *les points doubles conjugués sont sur les tangentes par les points de rebroussement. Il y a un ou trois points doubles réels.*

Le développement des détails de construction permet d'établir qu'un des éléments doubles conjugués seul est réel dans le cas des cubiques crunodales et dans celui des courbes de 3me classe dualistiques des cubiques crunodales.

Si le point double est isolé, ou si la tangente double est isolée, les éléments doubles conjugués des correspondances (1.2) sont tous les trois réels.

Le cas d'un seul élément double conjugué réel conduit à un intéressant groupement de triangles dans lesquels :

*Les paires de côtés homologues sont les éléments conjugués de trois involutions de rayons dont les sommets sont des points fixes.*

*Les paires de sommets homologues sont les éléments conjugués de trois involutions de points dont les bases sont des droites fixes.*

Les triangles sont liés involutivement dans chacune des constructions dualistiques.

*Les sommets des triangles sont sur trois coniques passant par un seul point commun.*

*Les côtés des triangles enveloppent trois coniques n'admettant qu'une seule tangente commune.*

Une étude plus approfondie de ces triangles conduit à un très grand nombre de propriétés fort intéressantes.

Les involutions supérieures $J_1^{m+1}$ ou $J_n^{m+1}$ peuvent être établies au moyen des courbes engendrées par les correspondances $(1.m)$ ou $(n.m-n+1)$.

$J_1^{m+1}$ s'obtient en coupant la courbe d'une correspondance $(1.m)$ par un faisceau de droites issues d'un point extérieur et en joignant les points de coupe avec le point multiple d'ordre $m$. Chaque rayon ainsi obtenu n'appartient qu'à un seul groupe de $(m+1)$ rayons conjugués.

$J_2^{m+1}$ s'obtient en coupant la courbe d'une correspondance $(1.m)$ comme précédemment et en joignant les points de coupe avec un point multiple d'ordre $m-2$. Chaque rayon appartient à deux groupes de $m+1$ rayons conjugués.

$J_2^{m+1}$ s'obtient également avec la courbe d'une correspondance $(2.m-1)$ coupée comme avant et en joignant chaque point de coupe avec le point multiple d'ordre $m-1$, dont l'existence est certaine. Chaque rayon appartient aussi à deux groupes de $m+1$ rayons conjugués.

On voit de suite par cet aperçu que l'étude des involutions supérieures est liée à celle des correspondances analogues.

Pour les cas faciles (1.1), (1.2), (1.3), (2.3), l'étude géométrique est relativement simple et conduit aisément aux propriétés des involutions $J_1^2$, $J_1^3$, $J_2^3$, $J_1^4$, $J_2^4$ et $J_3^4$.

2. — M. le Prof. Dr R. Fueter (Carlsruhe), *Ueber algebraische Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe (Sur les équations algébriques de groupe donné).* — Du grand problème de la détermination des équations algébriques ayant un groupe donné, le conférencier ne considère que le cas particulier où le groupe est donné par deux substitutions indépendantes

$$s^x S^y \qquad (0 \leq x < 2 \ , \quad 0 \leq y < l^r)$$

où $s$ appartient à l'exposant 2 et S à l'exposant $l^r$, $l$ étant un nombre premier quelconque.

Du fait que les substitutions $s^x S^y$ forment un groupe, résulte que

$$Ss = s^x S^y \ ,$$

ou, à cause de $s^{-1} = s$,

$$S = s^x S^y s \ .$$

Si l'on avait $x = 0$, il viendrait $s = S^{y-1}$, contrairement à l'hypothèse que $s$ et S sont indépendants. On a donc $x = 1$, par suite

$$S = sS^y s = s\{sS^y s\}^y s \ .$$

Mais à cause de $s^2 = 1$, on déduit

$$\{sS^y s\}^2 = sS^y s \, . \, sS^y s = sS^{2y} s \ , \qquad \{sS^y s\}^y = sS^{y^2} s \ .$$

Par conséquent,

$$S = s \, . \, sS^{y^2} s \, . \, s = S^{y^2}$$

d'où

$$y^2 \equiv 1 \, (\text{mod.}\ l^r) \ .$$

Lorsque $l$ est *impair*, on a $y \equiv \pm 1 \, (\text{mod.}\ l^r)$. Au cas $y \equiv +1$ (mod. $l^r$) correspondent des corps de la division du cercle, au cas

$y \equiv -1 \pmod{l^r}$ des corps de la multiplication complexe. Lorsque par contre $l = 2$, en plus des solutions $y \equiv \pm 1 \pmod{2^r}$, il y a encore les solutions

$$y \equiv \pm 1 + 2^{r-1} \pmod{2^r}\ , \qquad (r > 2)$$

Nous savons que les premières solutions conduisent encore aux corps de la division du cercle et aux corps des modules singuliers; nous pouvons nous demander s'il existe des corps relatifs aux solutions du second cas. La réponse est affirmative. Le conférencier le montre dans le cas $r = 3$. Si l'on prend en effet $x = i = \sqrt{-1}$, $y = \sqrt[8]{2}$, $x$ appartient à un groupe $s$ tel que $s^2 = 1$. Formant ensuite le corps $K(i, \sqrt[8]{2})$, on peut, puisque $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ est une racine huitième de l'unité, exprimer de la manière suivante les conjugués de $y$.

$$\begin{array}{lll}
y_1 = \sqrt[8]{2} = y\ , & \text{ou lorsque} \quad S = \left(y \,\middle|\, \frac{1+i}{y^3}\right)\ , & y_1 = y \\
y_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt[8]{2} = \frac{1+i}{y^3} & \text{»} & y_2 = Sy \\
y_3 = -i\sqrt[8]{2} = -iy & \text{»} & y_3 = S^2y \\
y_4 = -i\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt[8]{2} = -i\frac{1+i}{y^3} & \text{»} & y_4 = S^3y \\
y_5 = -y & \text{»} & y_5 = S^4y \\
y_6 = -\frac{1+i}{y^3} & \text{»} & y_6 = S^5y \\
y_7 = iy & \text{»} & y_7 = S^6y \\
y_8 = i\frac{1+i}{y^3} & \text{»} & y_8 = S^7y \\
 & & S^8 = 1
\end{array}$$

Par suite $s^x S^y$ est le groupe de Galois du corps K et à cause de

$$sSy = s\,\frac{1+i}{y^3} = \frac{1-i}{y^3} = y_4 = S^3sy$$

on a $sS = S^3s$, (où $3 \equiv -1 + 2^2 \pmod{8}$).

3. — M. le Prof. Gustave Dumas (Lausanne), *Sur les singularités des surfaces*. — M. G. Dumas donne, en grands traits, un aperçu général de sa méthode de résolution des singularités des surfaces

analytiques dans le voisinage d'un point donné. Faisant un parallèle entre la théorie des courbes et celle des surfaces, il en signale les analogies et les différences et montre comment se posent les problèmes dans le dernier de ces deux cas.

4. — M. le Dr A. Speiser (Strasbourg). *Ueber die Zerlegung der algebraischen Formen (Sur la décomposition des formes algébriques).* — La notion de *composition* des formes quadratiques binaires occupe une place centrale dans la théorie que donne Gauss de ces formes. Cette notion est susceptible d'une généralisation encore plus grande que celle que lui donne la théorie des nombres algébriques.

Nous dirons que la forme $f(x_1, \ldots, x_m)$ est composable avec elle-même, lorsque l'équation

$$f(z_1, \ldots z_m) = f(x_1, \ldots, x_m) f(y_1, \ldots, y_m)$$

se transforme en identité au moyen de la substitution bilinéaire à coefficients rationnels

$$z_l = \sum_i \sum_k a_{ikl} x_i y_k \qquad \text{(S)}$$

Si la forme $f$ est indécomposable dans le domaine des nombres rationnels, on obtient des nombres généralisés (hypercomplexes) en définissant des nombres $e_1, \ldots, e_m$ ayant la propriété de rendre identiques les deux membres de l'équation

$$e_1 z_1 + \cdots + e_m z_m = (e_1 x_1 + \cdots + e_m x_m)(e_1 y_1 + \cdots + e_m y_m)$$

lorsque les $z_l$ sont exprimés au moyen de la substitution (S). Il faut pour cela que les nombres $e_1, \ldots, e_m$ vérifient les équations

$$e_i e_k = \sum_l a_{ikl} e_l .$$

Lorsque cette multiplication est *associative* et *commutative*, le domaine des nombres $e_1 x_1 + \ldots + e_m x_m$, dans lequel $x_1, \ldots, x_m$ sont des valeurs rationnelles quelconques, se réduit à des domaines holoédrique-isomorphes à certains corps algébriques et à leurs conjugués.

Lorsque la multiplication n'est qu'associative, on obtient des nombres hypercomplexes. Certaines formes quaternaires donnent naissance de cette manière à de nouvelles classes de nombres, telles que les quaternions dont l'arithmétique a été donnée par M. Hurwitz. C'est une image de l'arithmétique des formes quaternaires correspondantes.

Remarquons encore qu'une forme qui admet une composition, se décompose en deux facteurs dont l'un est $e_1 x_1 + \dots e_m x_m$.

De même, le *déterminant du groupe* admet une composition. Elle est à la base des profondes recherches de M. Frobenius ; en particulier, la décomposition du système correspondant de nombres hypercomplexes en systèmes partiels, tels que le produit de deux nombres quelconques pris dans deux systèmes partiels différents soit nul, conduit aux caractères du groupe.

Dans tous les cas, on peut attacher à tout nombre hypercomplexe une *norme* telle que le produit des normes de deux nombres soit égal à la norme du produit.

5. — Prof. Dr L. BIEBERBACH (Bâle). *Eine neue Methode der konformen Abbildung (Une nouvelle méthode de représentation conforme).* — Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans un cercle de rayon R, de centre à l'origine ; soit, de plus $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Donc

$$f(x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots , \quad |x| < R .$$

Une telle fonction effectue la représentation conforme du cercle dans un domaine dont l'aire (intérieure) est donnée par l'expression $\int\int f' \overline{f'}\, dx\, d\overline{x}$. L'intégrale double est étendue au cercle $|x| \leq R$, $x$ et $\overline{x}$, $\frac{df}{dx} = f'$ et $\overline{f'}$ étant imaginaires conjugués. Si l'on pose $x = re^{i\varphi}$, cette expression devient, après un calcul facile

$$\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r f' \overline{f'}\, d\varphi = \pi R^2 + \frac{4 a_2 \overline{a}_2 R^4}{4} + \frac{3^2 a_3 \overline{a}_3 R^6}{6} + \dots$$
$$+ \frac{n^2 a_n \overline{a}_n R^{2n}}{2n} + \dots > \pi R^2 .$$

Par conséquent : *La représentation conforme d'un cercle par une fonction* f(x), *holomorphe à l'intérieur de ce cercle, telle que* f(0) = 0, f'(0) = 1, *donne un domaine d'aire plus grande.* Par suite, si l'on considère la représentation conforme d'un domaine donné sur un cercle qui laisse fixe un point de ce domaine et dont le module d'agrandissement en ce point fixe est égal à 1, la fonction qui effectue cette représentation est caractérisée comme solution du problème : rendre minimum l'expression $\int\int f' \overline{f'}\, dx\, d\overline{x}$.

L'application de ce principe permet de démontrer très élémentairement la possibilité de la représentation conforme d'un domaine simplement connexe quelconque sur un cercle. Après avoir donné une démonstration très courte d'un théorème de Carathéodory sur la continuité de la variation de la fonction caractéristique de la représentation conforme lorsque le domaine se déforme

d'une manière continue (cette démonstration repose sur une remarque relative à la convergence des fonctions inverses d'une suite convergente de fonctions analytiques), le conférencier expose un procédé de calcul très simple pour la détermination effective de la fonction effectuant la représentation conforme. Ce procédé, par exemple, est applicable aux domaines dont l'ensemble complémentaire forme lui-même un domaine, ayant même frontière. Il consiste à approcher la fonction cherchée par le polynôme de degré $n$ qui, parmi tous les polynômes du même degré, donne au domaine la plus petite aire ($f(0) = 0$, $f'(0) = 1$). Le calcul de ces polynômes déterminés univoquement conduit chaque fois à la résolution d'un système d'équations linéaires, à déterminant $\neq 0$.

6. — Dr E. Marchand (Zurich). *Sur la règle de Newton, dans la théorie des équations algébriques.* — Newton a publié, dans son « Arithmetica universalis » (1707), une règle pour la détermination du nombre des racines positives, négatives et imaginaires d'une équation algébrique à coefficients réels, qui permet de préciser les résultats obtenus par l'application de la règle des signes de Descartes. Newton n'a pas jugé à propos d'en donner la démonstration. C'est à Sylvester (1865) que revient l'honneur d'avoir trouvé le principe d'une démonstration, en même temps qu'une généralisation[1].

Les travaux de Newton et de Sylvester, ainsi que leur exposé dans les traités d'algèbre supérieure de Petersen[2] et de H. Weber[3], renferment bien des lacunes que j'ai essayé de combler, sur le conseil de M. le Prof. Dr Hurwitz. Il s'agissait avant tout de trouver une démonstration *complète* de la règle de Newton, démonstration qui embrasse tous les cas possibles.

Voici l'énoncé que je propose pour la *règle de Newton :*

Soit $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$, une équation à coefficients réels du $n^{me}$ degré ($a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$).

Formons la différence

$$A_i = \frac{i(n-i)}{(i+1)(n-i+1)} a_i^2 - a_{i-1} a_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \dots, (n-1)) .$$

et considérons, au point de vue des signes, la double suite (I) :

$$\left.\begin{matrix} a_0 , & a_1 , & a_2 , & \dots , & a_{n-2} , & a_{n-1} , & a_n \\ + , & A_1 , & A_2 , & \dots , & A_{n-2} , & A_{n-1} , & + \end{matrix}\right\} (I) .$$

[1] J.-J. Sylvester, *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 24, 1871.
J.-J. Sylvester, *Philosophical Magazine*, 4me sér., vol. 31, p. 214.
[2] Jul. Petersen, *Theorie der algebraischen Gleichungen*, 1878, p. 203.
[3] Heinrich Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 1895, t. 1, p. 304.

Désignons par

$vP$, le nombre total des variations-permanences[1] de (1), par
$pP$, » » » permanences-permanences[1] de (1), et par
$V$, » » » variations que présente la série

$$+ , A_1 , A_2 , \ldots , A_{n-2} , A_{n-1} , + ,$$

avec les conventions suivantes au sujet des zéros qui peuvent se présenter dans (1) :

1° Si $a_{i-1} \neq 0 \quad a_i = a_{i+1} = \ldots = a_{i+i'-1} = 0 \quad a_{i+i'} \neq 0$, $i$ étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, (n-1)$, et $i'$, l'un des nombres $1, 2, \ldots, (n-i)$, on donnera aux zéros représentant $a_i , a_{i+i} , \ldots , a_{i+i'-1}$, le même signe que celui de $a_{i-1}$.

2° Si $A_{k-1} \neq 0 \quad A_k = A_{k+1} = \ldots = A_{k+k'-1} = 0 \quad A_{k+k'} \neq 0$, $k$ étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, (n-1)$ et $k'$, l'un des nombres $1, 2, \ldots, (n-k)$, on donnera, en général,

au zéro représentant $A_k$, le signe contraire de celui de $A_{k-1}$
» » $A_{k+1}$, le même signe que » » $A_{k-1}$,

etc., en variant toujours les signes ; sauf toutefois dans le cas où les $a_k$ correspondants sont tels que

$$a_{k-1} \neq 0 \quad a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{k+k'-1} = 0 \quad a_{k+k'} \neq 0 \quad \text{et} \quad a_{k-1} \cdot a_{k+k'} < 0 .$$

Il faut alors que le zéro représentant $A_{k+k'-1}$ ait le même signe que $A_{k+k'}$.

Il y a encore un cas d'exception, celui où $f(x) \equiv (x-\alpha)^n = 0$ ; dans ce cas $A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} = 0$ ; ces zéros-là doivent tous être considérés comme des quantités positives.

La règle de Newton s'exprime alors par les formules :

$$N_+ = vP - 2\lambda_1 , \qquad N_- = pP - 2\lambda_2 , \qquad I = V + 2\lambda_3 ,$$

$N_+$, $N_-$ et $I$ désignant les nombres de racines positives, négatives et imaginaires de $f(x) = 0$, chaque racine étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont des nombres entiers, non négatifs[2].

7. — M. le Prof. F. Rudio (Zurich). *Der Stand der Werke Leonard Euler. (Etat de la publication des Œuvres d'Euler).* — M. Rudio présente les neuf volumes parus ; il saisit cette occasion

---

[1] Voir H. Weber, *loc. cit.*

[2] La démonstration complète de la règle de Newton paraîtra dans le *Bulletin de la Société neuchâteloise des Sciences naturelles*, t. 40 ; 1912-1913.

pour signaler à l'attention de ses collègues la Société Léonhard Euler destinée à fournir un appui financier au Comité de publication. La Commission Euler espère obtenir le concours des principales sociétés mathématiques.

8. — M. le Dr D. Mirimanoff (Genève), *Sur quelques points de la théorie des ensembles.* (En l'absence de l'auteur, le mémoire est déposé sur le bureau de la présidence.) — M. Mirimanoff donne, en se bornant aux ensembles linéaires, une démonstration nouvelle du théorème de Cantor-Bendixson : tout ensemble fermé F se compose d'un ensemble dénombrable D et d'un ensemble parfait P. Cette démonstration peut être rapprochée de celles de W. H. Young, F. Bernstein, L. E. J. Brouwer dans lesquelles la partie dénombrable de F est détachée à l'aide d'un ensemble d'intervalles auxiliaires convenablement choisis. Les intervalles auxiliaires de M. Mirimanoff, qu'il appelle *crochets,* ont pour extrémités les milieux (ou des points intérieurs quelconques) des intervalles contigus à F et deux points arbitraires pris sur les demi-droites extérieures à F. (Ce mémoire sera inséré dans l'*Enseign. mathém.* du 15 janvier 1914. — *Réd.*)

9. — M. le Prof. Dr W. H. Young, F. R. S. (Liverpool et Genève). *L'intégrale de Stieltjes et sa généralisation.* — En l'absence de l'auteur, son mémoire est déposé sur le bureau de la présidence.

L'intégrale de Stieltjes est une limite formée de la même manière que l'intégrale d'une fonction continue. C'est la limite d'une somme de termes de la forme $f(x_i)\, \Delta g(x_i)$, $(\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i))$, $g(x)$ étant une fonction non décroissante.

Lebesgue a montré que l'intégrale de Stieltjes se ramène à l'intégrale de Lebesgue d'une fonction bornée et il a indiqué la possibilité de prolonger l'opération de l'intégrale de Stieltjes à tout le champ des fonctions continues. Il se sert pour cela d'un changement de variable élégant, mais d'application difficile. Il remarque encore que procéder d'une autre manière à cette extension ne lui paraît guère possible.

Cette dernière remarque ne paraît pas fondée pour celui qui examine la théorie de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée, telle que la développe M. Young. Cette théorie n'exige pas la connaissance des théories modernes de l'intégration, mais procède uniquement par la considération de suites monotones de fonctions. Le principe est le suivant :

*On dira qu'une fonction* f(x) *possède une intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante* g(x), *si elle peut s'exprimer comme limite d'une suite monotone de fonctions* $f_1$, $f_2$, ... *dont les intégrales par rapport à* g(x) *sont déjà définies, pourvu que la limite*

*des intégrales de toute suite ayant ces propriétés soit la même et ait une valeur finie. Cette limite s'appelle l'intégrale de* f(x) *par rapport à* g(x).

En partant de fonctions constantes à l'intérieur (au sens étroit) d'un nombre fini d'intervalles, on obtient au moyen de suites monotones de fonctions des fonctions de classe *l*, *u*, *lu*, *ul*, *lul*, *ulu*,... etc,... et des fonctions qui n'appartiennent à aucune de ces classes. Après avoir démontré l'unicité du problème d'intégration pour les fonctions de classes *l*, *u*, *lu* et *ul*, on se sert ensuite du théorème suivant :

*Etant donnée une fonction* f(x), *bornée et représentable analytiquement, on peut trouver une fonction* lu *qui ne dépasse pas* f(x) *et une fonction* ul *qui n'est pas moindre que* f(x), *ces deux fonctions auxiliaires ayant la même intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante* g(x).

Par conséquent, toute fonction bornée représentable analytiquement a une intégrale par rapport à une fonction positive non décroissante. L'extension aux fonctions non bornées se fait sans nouvelles difficultés et le passage à l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée est immédiat.

Un exemple de l'utilité de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée nous est donné dans la théorie des séries trigonométriques. De même que l'intégrale de Lebesgue a élargi le champ des séries trigonométriques maniables en étendant la signification de l'expression *série de Fourier*, l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée a permis à M. Young d'agrandir encore plus ce champ en remplaçant la classe des séries de Fourier par la classe plus étendue des séries obtenues par dérivation terme à terme des séries de Fourier des fonctions à variation bornée. Parmi les propriétés des séries de Fourier qui restent vraies pour cette classe plus étendue, M. Young en cite deux : 1° les coefficients d'une série impaire (paire) de cette classe, introduits comme multiplicateurs dans une série de Fourier (dans sa série alliée), engendrent la série de Fourier d'une fonction de même sommabilité que celle de la fonction associée à la première série de Fourier ; 2° une telle série converge (C1) ou (C$\delta$) $(0<\delta<1)$ presque partout vers la dérivée de la fonction à variation bornée attachée à cette série.

Le mémoire se termine par une démonstration en quelques lignes n'employant que des théorèmes bien connus d'un résultat, établi jadis par M. Young au moyen d'un raisonnement long et difficile faisant usage du changement de variable indiqué par Lebesgue.

10. — M. le Prof. Dr A. EINSTEIN (Zurich). *Physikalische Grundlagen und leitende Gedanken für eine Gravitationtsheorie (Base*

*physique et idées directrices d'une Théorie de la Gravitation).* — Une des lois naturelles les plus remarquables et le plus exactement vérifiée est celle de l'identité de la masse inerte et pesante des corps, elle exprime que l'accélération de chute dans un champ de pesanteur est indépendante du matériel constituant le corps qui tombe. La conception que dans un système de référence accéléré, les phénomènes se produisent comme dans un champ de gravitation, est voisine de cette loi.

Cette conception (Hypothèse de l'Equivalence) fournit un moyen de déduire théoriquement les propriétés du champ de la pesanteur. Le principal résultat ainsi obtenu est la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation; pour un rayon passant à côté du soleil, la déviation est de 0″,84, elle est donc susceptible d'observation.

Ce résultat ne concorde pas avec l'état actuel de la théorie de la Relativité, parce qu'il établit que la vitesse de la lumière dans le vide dépend du potentiel de gravitation.

J'ai montré, avec M. Grossmann, qu'on peut généraliser la théorie de la relativité au point de rester en concordance avec cette hypothèse d'équivalence[1].

D'après cette théorie, le champ de gravitation est défini par un « tenseur » symétrique ($g_{\mu\nu}$) avec 10 composantes.

Au lieu de l'élément de ligne

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 ,$$

c'est l'expression plus générale

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

qui intervient comme invariant fondamental.

Les relations du calcul vectoriel à 4 dimensions se transforment en celles du calcul différentiel absolu.

D'après cette généralisation, tout système d'équations physiques contient l'influence que le champ de gravitation exerce sur les phénomènes correspondants à ce système d'équations.

Ces équations généralisées sont généralement covariantes. En revanche, il paraît logiquement impossible de poser, pour déterminer le champ de gravitation (c'est-à-dire les $g_{\mu\nu}$), des équations qui soient covariantes par rapport à des substitutions quelconques.

En partant des théorèmes de la conservation de l'impulsion et de l'énergie, nous parvenons à choisir le système de référence (auxquelles les coordonnées d'espace et de temps $x$, $y$, $z$ et $t$ se

[1] A. Einstein u. M. Grossmann. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. — 1 broch. in-8°, 38 p.; B. G. Teubner, Leipzig. — *N. de la Réd.*

rapportent de telle sorte que les équations ne sont plus covariantes que pour des substitutions linéaires, mais, au contraire de la théorie habituelle de la relativité, pour des substitutions linéaires quelconques [1].

En soumettant le système de référence à cette restriction, nous obtenons des équations de gravitation entièrement déterminées et qui satisfont à toutes les conditions qu'on peut imposer à des équations de gravitation.

Il résulte, en particulier, de ces équations que l'inertie des corps n'est pas une propriété de chaque corps accéléré seulement, mais une action réciproque, c'est-à-dire une résistance à une accélération relative des corps par rapport aux autres corps. Cette conception a déjà été exposée par Mach et d'autres qui y arrivaient en se basant seulement sur la théorie de la connaissance.

11. — M. le Prof. Dr Marcel Grossmann (Zurich). *Mathematische Begriffsbildungen, Methoden und Probleme zur Gravitationstheorie.* (*Définitions, Méthodes et Problèmes mathématiques relatifs à la théorie de la Gravitation.*) — La formation des notions de l'analyse vectorielle générale constitue la seule difficulté mathématique à pénétrer dans la théorie d'Einstein sur la gravitation.

Si l'analyse vectorielle, auxiliaire indispensable de la physique théorique, ne se généralise que lentement, je pense que c'est parce que les physiciens n'établissent les théorèmes de l'analyse vectorielle que dans la mesure de leur application aux problèmes de physique qui en ont provoqué la découverte ou auxquels ils seront applicables.

Cette méthode, justifiée dans chaque cas particulier, ne saurait satisfaire les mathématiciens, ni susciter de notions générales.

Les mathématiciens, d'autre part, en introduisant les théories des quaternions et de Grassmann ont inutilement compliqué la compréhension de l'analyse vectorielle aux physiciens par des représentations abstraites qui n'étaient pas indispensables.

A ces difficultés s'ajoute la confusion babylonienne des termes et des signes qu'une commission internationale n'a pas réussi à corriger.

L'idée fondamentale de la théorie de la gravitation d'Einstein, qui est de caractériser un champ de gravitation par une forme différentielle quadratique à coefficients variables, nécessite une généralisation des définitions et des méthodes de l'analyse vectorielle, afin d'obtenir un aperçu plus distinct.

Le célèbre traité de Christoffel, *Sur la transformation des*

---

[1] Le texte allemand de l'auteur dit : derart zu wählen, dass *nur* mehr lineare, aber im Gegensatz zur gewöhnlichen Relativitätstheorie *beliebige* lineare Substitutionen die Gleichungen kovariant lassen. — (Note du traducteur E. Chatelain.)

*expressions différentielles homogènes du deuxième degré,* 1869 (Journal f. Math. 70) et le travail trop peu remarqué de Ricci et de Levi-Civita, 1901 (Math. Ann. 54) où les auteurs exposent une méthode pour donner aux équations différentielles de la physique une forme indépendante des coordonnées, sont, pour le sujet qui nous préoccupe, d'une importance fondamentale.

Le développement ultérieur de l'analyse vectorielle a mis en lumière les avantages qu'il y a à traiter cette branche au point de vue général de la théorie des invariants, puisque cette dernière intervient dans tout le système des notions de l'analyse vectorielle et du même coup marque la place naturelle des nouvelles conceptions introduites par Minkowski, Sommerfeld, Laue, etc., dans le monde à quatre dimensions de la théorie de la relativité.

Il ne saurait être question ici de développer l'application des méthodes de la théorie des invariants à l'analyse vectorielle, je me bornerai à montrer la différence des méthodes sur les notions et les théorèmes les plus simples de l'analyse vectorielle.

La définition même de vecteur manque souvent de précision et de généralité, elle n'est pas susceptible d'extension. En définissant le vecteur comme une grandeur dirigée, déterminée par ses composantes suivant trois directions rectangulaires, on se restreint sans nécessité à l'espace euclidien, le seul où « direction » ait un sens immédiat.

On obtient une meilleure définition en se représentant un vecteur variable en grandeur et en direction de point en point, c'est-à-dire un champ vectoriel.

Ses trois composantes

$$A_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sont des fonctions du lieu, les transformations qu'elles subissent lors d'une rotation du système de coordonnées sont essentielles. Cette rotation est exprimée par une substitution orthogonale

$$x'_i = \sum_k p_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

dont la solution est :

$$x_i = \sum_k p_{ki} x'_k .$$

Nous dirons qu'un vecteur est déterminé par trois fonctions $A_i(x_1, x_2, x_3)$ si elles se transforment comme les coordonnées elles-mêmes, donc si

$$A'_i = \sum p_{ki} A_k .$$

De sorte que les coordonnées rectangulaires sont elles-mêmes aussi composantes de vecteur, ainsi que leurs différentielles.

L'élément de ligne :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

est un invariant absolu, pour chaque vecteur

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

est aussi un « scalaire », c'est-à-dire un invariant absolu, savoir : le carré de la grandeur du secteur.

Les opérations différentielles sont particulièrement importantes, la plus simple est la *divergence* du vecteur A

$$\text{div A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

qui est un scalaire, ce qu'on peut prouver en effectuant la substitution orthogonale. On le montre habituellement en imaginant que le vecteur représente la vitesse dans le champ du courant d'un liquide incompressible. Dans un espace fini S, limité par une surface $\sigma$ se trouvent des points où le liquide entre et d'autres où il sort. Si l'on calcule la quantité de liquide qui traverse la surface dans l'unité de temps on trouve

$$\int_\sigma A_k d\sigma = \int_S \text{div A} dS$$

et l'on a ainsi montré en appliquant le théorème de l'intégrale de Gauss que la divergence est indépendante du système de coordonnées : que c'est un scalaire.

En concentrant le domaine S en un point, on peut obtenir la divergence comme limite.

On peut déduire ces notions et d'autres encore d'une façon plus satisfaisante en abandonnant les coordonnées cartésiennes pour introduire des coordonnées curvilignes quelconques.

L'élément de ligne s'exprime alors par

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k \ .$$

Le caractère de généralité de cette forme différentielle quadratique permet de ne pas se préoccuper de ce que l'espace soit euclidien, non euclidien ou même à courbure variable.

Par une transformation de coordonnées :

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3) \qquad i = 1, 2, 3$$

ou une transformation des différentielles

$$dx_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} dx'_k = \sum_k p_{ik} dx'_k$$

ou résolue

$$dx'_i = \sum_k \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} dx_k = \sum_k \pi_{ki} dx_k$$

les coefficients de l'élément de ligne se transforment suivant les formules :

$$g'_{rs} = \sum_{ik} p_{ir} p_{ks} g_{ik} \ ,$$

si l'on suppose que l'élément de ligne est un scalaire.

Nous déterminons de nouveau un vecteur par trois fonctions $A_i(x_1, x_2, x_3)$ qui se transforment suivant les formules

$$A'_i = \sum_k p_{ki} A_{k'}$$

et nous constatons que les coordonnées ne constituent plus de vecteur, que leurs différentielles se transforment différemment, parce que les quotients différentiels partiels $\pi_{ki}$ sont différents des $p_{ki}$. C'est pourquoi nous appellerons A : *vecteur covariant*. Les différentielles des coordonnées constituent, au contraire, un *vecteur contravariant*, nous constatons immédiatement l'utilité de ce dualisme.

Soient

$$A_1, A_2, A_3 \qquad \text{et} \qquad B_1, B_2, B_3$$

deux vecteurs variables, formons les grandeurs

$$T_{ik} = A_i B_k$$

qui se transforment de la manière suivante :

$$T'_{rs} = \sum_{ik} p_{ir} p_{ks} T_{ik} \ .$$

Un tel système de neuf grandeurs définit ce que nous appelons *tenseur covariant* de deuxième rang, puisque ses composantes sont caractérisées par deux indices. On voit que les coefficients de

l'élément de ligne constituent aussi un tenseur covariant de deuxième rang : le *tenseur fondamental.*

Soit

$$g = |g_{ik}|$$

le discriminant de la forme différentielle, c'est-à-dire le déterminant des neuf coefficients, les déterminants mineurs de deuxième ordre divisés par le déterminant lui-même, sont les composantes d'un tenseur contravariant de deuxième rang, leurs formules de transformation étant :

$$\gamma'_{rs} = \sum_{ik} \pi_{ir} \pi_{ks} \gamma_{ik} \, .$$

On peut définir, plus généralement, le tenseur covariant de rang $\lambda$ par un système de fonctions $T_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda}$, qui se transforment d'après les formules

$$T'_{r_1 r_2 \ldots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \cdots p_{i_\lambda r_\lambda} T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \, .$$

De tels systèmes covariants, que nous appelons maintenant tenseurs, jouent un grand rôle dans la théorie de la transformation de Christoffel qui a montré comment on peut passer d'un tenseur de rang $\lambda$ à un autre de rang $\lambda + 1$ par une seule opération de différentiation.

Interrompons ces considérations générales pour montrer comment on obtient la divergence du vecteur.

Soient $A_1$, $A_2$, $A_3$ les composantes d'un vecteur covariant, le problème consiste à déduire du vecteur, par une différentiation, un scalaire, c'est-à-dire un invariant absolu. Dans ce but, formons d'abord, d'après Christoffel, l' « extension » (Erweiterung) du vecteur, c'est-à-dire le tenseur covariant de deuxième rang

$$A_{rs} = \frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \sum_{ik} \frac{1}{2} \gamma_{ik} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_i} \right) A_k = \frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \sum_k \begin{Bmatrix} rs \\ k \end{Bmatrix} A_k$$

puis le scalaire

$$\operatorname{div} A = \sum_{rs} \gamma_{rs} A_{rs} \, ,$$

auquel on peut donner la forme

$$\operatorname{div} A = \sum_{rs} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \sqrt{g} \, \gamma_{rs} A_r \right) \, .$$

Il en résulte, comme extension du vecteur, lorsque l'élément de ligne est euclidien

$$A_{rs} = \frac{\partial A_r}{\partial x_s},$$

et comme divergence

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}.$$

Je prends encore, comme exemple, les notions de l'analyse vectorielle relatives au champ d'un scalaire.

Soit $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ un scalaire, alors

$$\partial\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} dx_3$$

en est aussi un. Comme les $dx_i$ constituent un vecteur contravariant, il faut que les $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ forment un vecteur covariant que nous appellerons le *Gradiant* de $\varphi$.

Comme carré de sa valeur nous avons le scalaire

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial\varphi}{\partial x_r} \frac{\partial\varphi}{\partial x_s},$$

c'est-à-dire le premier paramètre différentiel de Beltrami, qui, dans le cas de l'analyse vectorielle habituelle, devient le paramètre différentiel de Lamé

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2.$$

D'après la formule générale citée plus haut, la divergence du gradiant est

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \sum_{rs} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\sqrt{g}\, \gamma_{rs} \frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\right),$$

c'est-à-dire le deuxième paramètre différentiel de Beltrami, qui, dans le cas de l'analyse vectorielle habituelle devient

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$$

c'est le deuxième paramètre différentiel de Lamé.

Nous voyons, d'après ces simples exemples la fécondité des méthodes employées, qui sont en outre complètement indépen-

dantes du nombre des variables. Je suis persuadé que les questions de notation de l'analyse vectorielle pourraient être résolues facilement sur le terrain de ces considérations générales.

12. — *Partie administrative.* M. H. Fehr, président, rappelle d'abord le souvenir du professeur H. Weber (Strasbourg), membre honoraire, décédé au mois de juin dernier; puis il présente le rapport annuel. Sur la proposition des vérificateurs des comptes, la Société approuve le rapport du caissier. Le nombre des membres s'élève à 132.

Sur la proposition de son Comité, l'Assemblée décide d'adhérer à la *Société Léonhard Euler;* « elle engage ses membres et le public scientifique à s'associer aux efforts faits dans le monde entier pour élever un monument impérissable à l'un des plus illustres savants suisses. »

## Société Léonhard Euler.

La commission Euler de la Société helvétique des Sciences naturelles vient de créer, sous le nom de Société Léonhard Euler, une association destinée à fournir un appui financier à la publication des œuvres complètes d'Euler. Après une étude plus approfondie du plan et du prix de revient de cette vaste publication, la Commission a reconnu que les devis primitifs seront dépassés.

« Suivant un premier devis, dit la circulaire, l'édition complète des œuvres d'Euler devait comprendre 40 à 45 volumes, chiffre qui a servi de base pour le calcul des frais de publication. Ceux-ci, évalués à un demi-million de francs, semblaient couverts par des abonnements et des subventions volontaires.

« Neuf volumes ont paru jusqu'à ce jour. Ces volumes ont été accueillis avec une faveur marquée, grâce à la revision très soignée du texte et à leur belle impression. Par malheur, on a dû reconnaître que les frais de publication sont plus élevés qu'on ne l'avait prévu. Ainsi, malgré les 400 abonnements assurés (prix d'abonnement par volume 25 fr.) les 6 premiers volumes ont engendré un déficit de 45,000 fr. qui a dû être couvert par le fonds Euler. Ce fonds, constitué par les subventions de diverses autorités civiles, de sociétés scientifiques et par des dons de particuliers est déjà réduit à 84,000 fr. On a reconnu en outre qu'à moins de donner des dimensions inacceptables aux volumes, le nombre de ceux-ci, d'abord prévu, est insuffisant pour contenir les œuvres complètes de l'inépuisable savant. L'Académie de St-Pétersbourg a mis à la disposition de la Commission Euler un grand nombre de manuscrits inédits; de tous côtés on retrouve des lettres d'Euler. A toutes ces causes d'amplification s'ajoute encore le fait

que les mémoires d'Euler déjà publiés occupent dans le texte nouveau, par suite des annotations indispensables de la Rédaction, une étendue sensiblement supérieure à ce qu'on avait admis à l'origine.

« Ces diverses causes ont eu pour effet de porter les frais de publication au double, à peu près, de la première évaluation, soit à environ un million de francs. Dans ces conditions, le déficit de la publication atteindrait probablement la somme de 200,000 fr. ; car les engagements pris ne permettent pas d'augmenter le prix des volumes destinés aux abonnés.

« Si la Commission Euler de la Société helvétique ne désespère pas de mener à bien son énorme entreprise, c'est qu'elle a la conviction profonde que son œuvre est vraiment grande et utile et qu'elle ne doute pas de trouver auprès de ses amis des ressources nouvelles pour l'exécuter intégralement.

« C'est dans cette conviction que nous avons décidé de créer, pour la durée de la publication des œuvres d'Euler (c'est-à-dire pour 15 ans environ), sous le nom de Société Léonhard Euler, une association dont les membres s'engageraient à payer une cotisation annuelle de 10 fr. au minimum. Les membres recevraient chaque année un rapport succinct sur la marche de la publication. Il leur sera offert, au cours de celle-ci, de bonnes épreuves des divers portraits d'Euler, en témoignage spécial de gratitude. »

*Les adhésions sont reçues auprès de* M. E. His-Schlumberger, trésorier de la Commission Euler, Aeschenvorstadt, 15, Bâle.

La Commission Euler espère obtenir l'appui d'un grand nombre de mathématiciens ; mais elle compte aussi sur le concours des sociétés scientifiques. Jusqu'ici elle a reçu, entre autres, les adhésions de la Société helvétique des sciences naturelles, de la Société mathématique suisse, de la Société suisse des professeurs de mathématiques et de la Société mathématique allemande.

## Etats-Unis. — Thèses de Doctorat.

Pendant l'année universitaire 1912-1913, les Universités des Etats-Unis ont délivré 233 doctorats ès sciences, dont 21 concernant les sciences mathématiques. En voici la liste ; le nom de l'Université est indiqué entre parenthèses après celui de l'auteur.

D. F. Barrow (Harvard) : Oriented circles in space. — H. Batman (John Hopkins) : The quartic curve and its inscribed configurations. — E. T. Bell (Columbia) : The cyclotomic quinary quintic. — T. H. Brown (Yale) : The effect of radiation on a small particle revolving about Jupiter. — Miss J. E. Burns (Illinois) : The abstract definitions of the groups of degree eight. — G. R. Clements (Harvard) : Implicit functions defined by equations with

vanishing Jacobian. — C. W. COBB (Michigan) : The asymptotic development for a certain integral function of zero order. — Miss L. P. COPELAND (Pennsylvania) : On the theory of invariants of plane *n*-lines. — W. A. COIT (Boston) : Introduction to modern geometry. — W. H. CAMBLET (Yale) : On intermediate functions, being an extension of semi-continuous or upper and lower functions to a classification of discontinuous functions. — G. M. GREEN (Columbia) : Projective differential geometry of triple systems of surfaces. — R. A. JOHNSON (Harvard) : An analytic treatment of the conic as an element of space of three dimensions. — Miss F. P. LEWIS (John Hopkins) : A geometrical application of the theory of binary quintic. — C. E. LOVE (Michigan) : The asymptotic solutions of linear differential equations. — Miss M. L. SANDERSON (Chicago) : Formal modular invariants with an application to binary modular covariants. — F. SLEPIAN (Harvard) : On the functions of a complex variable defined by an ordinary differential equation of the first order and the first degree. — L. L. SMAIL (Columbia) : Some generalizations in the theory of summable divergent series. — W. H. STONE (Boston) : The elements of harmonic ratio. — L. E. WEAR (John Hopkins) : On self-dual plane curves of the fourth order. — K. P. WILLIAMS (Princeton) : The solutions of non-homogeneous linear difference equations and their asymptotic form. — H. W. WRIGHT (California).

## Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

**Allemagne.** — M. KRAZER, prof. à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe, a été nommé membre honoraire de la Société helvétique des sciences naturelles.

M. TOEPLITZ, professeur à l'Université de Goettingue, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Kiel.

**Etats-Unis.** — M. H. F. BLICHFELDT, prof. à l'University Stanford (Californie), est nommé professeur titulaire de mathématiques.

M. F. CAJORI, prof. au Colorado College, a été nommé docteur honoraire de l'Université de Colorado et docteur honoraire de l'Université de Wisconsin.

M. W. A. MANNING est nommé professeur adjoint de mathématiques appliquées à l'Université Stanford (Californie).

**France.** — L'*Académie des Sciences* a décerné les prix suivants : *Le Prix Poncelet* (3000 fr.) à M. Maurice LEBLANC, pour l'ensemble de ses recherches en mécanique ; — *le Prix Pontécoulant* (1500 fr.) à M. SÜNDMAN pour sa contribution au problème des trois corps ; — *le Prix Binoux* (2000 fr.) à M. J. MOLK, prof. à

l'Université de Nancy, pour les services rendus à l'édition française de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques.

*L'Académie des Sciences morales et politiques* a décerné le *Prix Le Dissez de Penanrun*, de 2000 fr. à M. Brunschwicg, maître de conférence à la Sorbonne, auteur du livre : *Les Etapes de la philosophie mathématique.* Nous avons eu l'occasion d'attirer l'attention de nos lecteurs sur cet intéressant Ouvrage dans l'*Enseignement Mathématique* du 15 janvier 1913.

**Italie.** — La *médaille* (1910-1912) *de la Société italienne des Sciences* (dite des XL) a été décernée à M. Max Abraham, professeur à l'Institut Technique Supérieur de Milan, pour ses récentes recherches tendant à relier la gravitation universelle à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques et lumineuses.

M. V. Volterra, professeur à l'Université de Rome, a été nommé membre d'honneur de la Société Royale d'Edimbourg.

## Nécrologie.

M. Alexandre Macfarlane, est décédé à Chatham le 28 août à l'âge de 62 ans. Il était d'origine écossaise et membre de la Société royale d'Edimbourg. Depuis de nombreuses années il s'était particulièrement attaché aux méthodes vectorielles suivant l'Ecole d'Hamilton. Macfarlane était président de l'Association internationale pour l'étude des quaternions et des systèmes connexes.

M. C. G. Rockwood, professeur à l'Université de Princeton, est décédé le 2 juillet à l'âge de 71 ans.

M. K. V. Vogt, Directeur de la deuxième Ecole réale de Saint-Pétersbourg, membre de la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique, est décédé le 1er août.

M. J. G. White, professeur à l'Université de Kentucky, est décédé le 18 juillet à l'âge de 67 ans.

H. Valentiner. — Les mathématiciens danois viennent de perdre l'un de leurs doyens, M. Hermann Valentiner. Né le 8 mai 1850, il est décédé le 17 septembre 1913, à la suite d'une longue maladie. En 1881, une thèse sur « la théorie des courbes gauches » lui valut le grade de Docteur de l'Université de Copenhague. Après un court stage dans l'enseignement, il entra dans la direction d'une compagnie danoise d'assurance sur la vie.

Les circonstances le tinrent un peu à l'écart de la vie scientifique, mais les quelques mémoires qu'il publia témoignent d'une profonde connaissance des mathématiques. Nous citerons en particulier son « Mémoire sur la théorie des groupes finis de transformation », 1889.

Menant une vie très tranquille et retirée, Valentiner était apprécié par son entourage à la fois pour sa profonde érudition et pour son commerce agréable.

---

# NOTES ET DOCUMENTS

## Commission internationale de l'enseignement mathématique.

*Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.*

(15e article)

## ILES BRITANNIQUES

### N° 27. — La préparation des maîtres de mathématiques.

*The Training of Teachers of Mathematics*[1] by Dr. T. P. Nunn, Vice-Principal of the London University (L. C. C.) Day Training College. — Dans ce rapport l'auteur examine la préparation des maîtres de mathématiques telle qu'elle se fait actuellement, puis il indique quels sont, à son point de vue, les principes qui devraient servir de base à cette préparation.

On commence à reconnaître aujourd'hui qu'une simple connaissance des mathématiques ne suffit pas pour faire un bon maître, il faut encore avoir étudié les diverses méthodes d'enseignement. La tâche du maître de mathématiques ne consiste pas uniquement dans la communication de certaines vérités, il doit chercher avant tout à développer d'une façon normale l'activité intellectuelle de ses élèves. Pour cela, il est nécessaire qu'il ait des connaissances suffisantes en psychologie, logique et histoire de la science et qu'il se soit occupé tout spécialement du développement mathématique de l'enfant. Le futur maître ne doit donc pas se contenter de suivre des cours et d'élargir le cercle de ses connaissances, il faut encore qu'il entre dans la pratique de sa vocation par un travail personnel d'observations et d'expériences faites à l'école même. Essayer d'acquérir la science de l'enseignement en dehors de l'école, c'est comme chercher à apprendre la chimie sans laboratoire.

En ce qui concerne la préparation mathématique des candidats à l'enseignement, il faut distinguer entre la préparation scientifique ou « académique », c'est-à-dire l'acquisition des connaissances nécessaires, et la préparation professionnelle, c'est-à-dire l'étude des diverses méthodes d'enseignement. Deux questions se posent : 1° Les préparations académique et professionnelle doivent-elles se faire concurremment ou successivement ? 2° Quel est le meilleur plan d'études mathématiques pour le futur maître ?

---

[1] 1 fasc. 17 p. ; 1 1/2 d. ; Wyman and Sons, Londres.

La réponse à la première de ces questions n'est pas douteuse : la préparation professionnelle doit suivre la préparation académique. Les collèges où étudient les candidats à l'enseignement ne devraient s'occuper que de la partie professionnelle de leur préparation, ou tout au moins, le côté purement scientifique devrait y jouer un rôle beaucoup moins considérable. C'est là une opinion qui tend à se répandre de plus en plus.

La deuxième question présente de plus grandes difficultés, et une distinction doit être faite entre les maîtres des écoles enfantines, les maîtres des écoles élémentaires (y compris ceux des écoles préparatoires et les maîtres non spécialistes des classes inférieures des « secondary schools »), les maîtres des écoles techniques et les maîtres spécialistes des « secondary schools. »

En ce qui concerne la préparation à l'enseignement dans les écoles élémentaires, deux alternatives sont offertes actuellement aux étudiants, l'une s'adressant à ceux qui ne poursuivront pas leurs études à l'université et conduisant à l'examen du « Board of Education » et l'autre pour « undergraduates » se proposant d'obtenir un diplôme en « Arts » ou « Science ». Dans la première alternative, les mathématiques sont obligatoires, mais le champ est plus vaste pour les garçons que pour les jeunes filles. Dans la seconde alternative les mathématiques ne forment pas une branche obligatoire du diplôme. Actuellement il se fait une revision des dispositions du « Board of Education » et, à ce sujet, le « Training College Association » a présenté quelques recommandations donnant une idée des tendances actuelles. Il propose en particulier : 1° que les mathématiques ne soient plus obligatoires ; 2° que les examens obligatoire et non obligatoire soient remplacés par un examen de passage et un examen avancé ; 3° qu'il n'y ait pas de différence entre le programme des garçons et celui des jeunes filles ; 4° que les étudiants ne se destinant pas aux mathématiques ne soient pas tenus de connaître les méthodes d'enseignement concernant cette branche. L' « Association » a en outre rédigé quelques plans d'études conformément à ce nouvel ordre d'idée ; on trouvera en appendice ceux qui concernent l'examen de passage et l'examen avancé.

L'auteur formule ensuite quelques critiques relativement à la partie mathématique des examens scolaires permettant l'entrée aux universités. Du reste, le but et le caractère de ces examens se modifieront très probablement avant qu'il soit longtemps. Ils finiront sans doute tous par comprendre dans leur programme les méthodes fondamentales du calcul infinitésimal et par rendre compte d'une préparation suffisante du maître non spécialiste des écoles élémentaires ou des classes inférieures des autres écoles. Pour le moment, cependant, ce résultat n'a pas encore été atteint, les méthodes employées dans la préparation du futur maître ne favorisent pas son initiative et ne contribuent pas à illuminer et à enrichir son travail. Ces mêmes critiques concernent également la préparation du maître spécialiste des écoles élémentaires et du maître non spécialiste des écoles secondaires ; cette préparation se fait en effet d'une façon trop étroite et trop « disciplinaire ».

Les établissements où se fait la préparation des maîtres peuvent être divisés en deux catégories : ceux qui relèvent du « Board of Education » et dépendent du gouvernement et ceux qui ont une existence indépendante de tout support officiel. Les premiers s'occupent de la préparation à l'enseignement dans les écoles élémentaires et secondaires. Pour les écoles

élémentaires, la préparation peut se faire soit par deux années d'études non universitaires (two-year course), soit par trois ou quatre ans d'études universitaires. Les étudiants qui choisissent le « two-year course » sont tenus d'enseigner pendant six semaines au moins dans une école élémentaire publique et sous la surveillance de membres du corps enseignant. Dans le cas d'études universitaires, l'étudiant, une fois admis à l'université, n'est pas obligé de continuer les mathématiques, c'est dire qu'il peut se contenter, en ce qui concerne cette branche, du champ représenté par son examen d'admission. Le règlement du « Board » exige également de la part des étudiants un stage de pratique dans une école élémentaire (huit semaines au minimum).

S'il s'agit de la préparation à l'enseignement dans les écoles secondaires, le candidat doit être un gradué universitaire ou l'équivalent, sa préparation proprement dite doit durer au moins une année, il doit faire 60 jours de pratique, au minimum, les deux tiers dans une école secondaire, il doit enfin étudier d'une façon spéciale une des branches du programme de l'école secondaire, cette branche pouvant être naturellement les mathématiques.

Outre les cours ordinaires concernant la préparation des maîtres, des conférences spéciales sur l'enseignement des mathématiques sont souvent organisées, soit par l'université de l'endroit, soit par le département de l'instruction.

## N° 28. — Changements récents dans les examens de mathématiques (Tripos) à Cambridge.

*Recent Changes in the Mathematical Tripos at Cambridge*[1], by Mr. Arthur Berry, Fellow and Assistant Tutor of King's College, Cambridge. — On sait le rôle important que jouent les examens dans les universités anglaises. On peut dire d'une façon générale que l'éducation universitaire y est dominée par les examens. Par conséquent toute tentative de modification du système d'instruction prendra la forme d'une transformation dans le règlement des examens. Les étudiants qui fréquentent une université comprennent ceux qui se contentent des examens de passage (pass examinations) et ceux qui se proposent d'obtenir un grade (Honours). Il n'est question ici que de ces derniers.

L'auteur nous expose tout d'abord le système des examens de Cambridge, tel qu'il prévalait avant les changements récents qui font l'objet de ce rapport. Les candidats doivent passer un examen élémentaire (Previous Examination) sur différents sujets; c'est un examen universitaire qui a généralement lieu à l'école ou au début de la première année d'université. Les études universitaires proprement dites sont alors consacrées à la préparation d'un ou plusieurs des « Tripos Examinations ». Ces derniers sont des examens spéciaux roulant sur l'un des sujets : mathématiques, classiques, sciences naturelles, histoire, mécanique, etc. Jusqu'en 1882 environ, il n'y avait qu'un simple « Tripos » pour chaque sujet; il avait lieu ordinairement au milieu de la quatrième année. Plus tard, l'examen fut divisé en deux parties : la première partie se passait à la fin de la troisième année et comportait un grade (Bachelor of Arts); la seconde partie était un examen plus avancé et

[1] 1 fasc. 17 p.; 1 1/2 d. Wyman and Sons, Londres.

avait lieu à la fin de la quatrième année. A cette même époque, d'importantes modifications furent apportées au système de classification des élèves ayant passé le « tripos ». Ces derniers étaient divisés en trois classes suivant les résultats, et on les classait d'après l' « ordre de mérite ». Les noms des candidats étaient publiés dans l'ordre, et le premier de chaque liste recevait quelquefois un titre honorifique tel que « Senior Wrangler » (pour les mathématiques) ou « Senior Classic ». A partir de 1882, le « Senior Classic » fut supprimé; les candidats du « Classical Tripos » furent simplement divisés en trois classes, avec quelques subdivisions. Les autres « Triposes » furent modifiés d'une façon analogue, les « ordres de mérite » étant supprimés, sauf pour le « Mathematical Tripos », où il survécut encore pendant une trentaine d'années.

L'examen pour le « Mathematical Tripos » comprend deux parties : la première (bookwork) consiste dans la démonstration d'un théorème connu, la deuxième est constituée par un « rider » ou exemple qui est, du moins en théorie, une conséquence du « bookwork ». Avant la dernière modification des règlements, il y avait également deux parties comprenant des exercices (problems) d'un genre plus difficile.

Quelques sérieuses difficultés se présentent dans la mise en vigueur de ce système d'examens. Tout d'abord il n'est pas commode de préparer des questions convenant simultanément à un grand nombre de candidats de capacité et de connaissances fort diverses. C'est pourquoi on divisa l'examen en deux parties, les « first four days » et les « second four days ». La seconde partie comprenait les sujets les plus difficiles et nécessitait déjà une certaine spécialisation de la part des candidats. Ensuite, on observe que dans ce système d'examens aucune place n'est réservée aux recherches originales. C'est pour obvier à cet inconvénient que furent créés, en 1885, les deux prix Smith, et plus récemment, les prix Rayleigh, pour encourager les candidats à présenter des dissertations sur divers sujets spéciaux. Citons également, dans ce même ordre d'idées, les « Fellowships », qui procurent de grands avantages à ceux qui les obtiennent. Le « Fellowship » est une institution spéciale d'Oxford et de Cambridge ; un « Fellow » obtient une bourse très enviée, comme récompense de certains travaux originaux.

Le système du « Mathematical Tripos » présentait encore un sérieux défaut, c'est la séparation presque complète des mathématiques et de la physique expérimentale. Pourtant, dans l'étude de certains sujets de physique, il est avantageux de traiter simultanément le côté mathématique et le côté expérimental. Les candidats désirant combiner les deux études devaient tout d'abord passer le « Mathematical Tripos », puis, un ou deux ans plus tard, le « Natural Sciences Tripos » ou le « Mechanical Sciences Tripos ».

Il faut enfin constater que le nombre d'étudiants se présentant pour le « Mathematical Tripos » diminuait de plus en plus, de sorte qu'une réforme s'imposait.

En 1900, on essaya d'apporter quelques modifications au « Tripos » et d'abolir, en particulier, l' « ordre de mérite » ; mais cela n'aboutit pas. Un nouveau projet fut alors préparé et ne fut adopté qu'en 1906, après de longues discussions. Le nouveau règlement permettait aux candidats ne désirant pas consacrer tout leur temps aux mathématiques de se spécialiser plus tôt qu'autrefois. Il permettait aussi à d'autres étudiants de consacrer une partie de leur temps aux mathématiques en tant que préparation à l'étude des sciences expérimentales. En même temps, on s'efforça de modi-

fier le caractère par trop traditionnel des questions, et le champ des mathématiques pures fut quelque peu allégé. Les étudiants ayant réussi le « Tripos » devaient être simplement divisés en trois classes, sans indication d' « ordre de mérite » ni subdivision de classes.

La première partie du « Tripos » était beaucoup plus simple qu'autrefois; elle pouvait être prise à la fin de la première ou de la seconde année et ne comportait pas de grade. La seconde partie pouvait être passée à la fin de la troisième année et comprenait un grade. En outre, les sujets d'examen de cette dernière partie étaient divisés en deux groupes : le « Schedule A », obligatoire, et le « Schedule B », facultatif.

Ces nouveaux règlements ont été appliqués pour la première fois en 1908, pour la première partie, et en 1910, pour la seconde partie; il est donc difficile, pour le moment, d'en apprécier la portée. Toutefois, les modifications apportées à la première partie du « Tripos » semblent bien répondre à ce qu'elles promettaient; mais il faut être moins affirmatif pour la seconde partie, qui est loin d'être exempte des défauts qu'elle présentait dans l'ancien système.

J.-P. Dumur (Genève).

---

## Cours universitaires.

### Semestre d'hiver 1913-1914 (suite).

## BELGIQUE [1]

**Gand.** 1er semestre. — A. Demoulin : Fonctions analytiques, 1; Application de l'Analyse à la Géométrie, 1. — C. Wasteels : Théor. dynam. de Jacobi et Mécanique céleste, 2. — E. Merlin : Réfraction, parallaxe, aberration, détermination des orbites, 2. — E. van Aubel : Phys. mathém. générale, 2; Chapitres choisis de Phys. mathém., 1. — A. Claeys : Histoire des mathém., 1; Probabilités, 1. — M. Stuyvaert : Géométrie non euclidienne, 2 et Exerc. de méthodologie; Théor. des grandeurs algébriques, 1. — C. Servais : Géom. projective appliq. aux formes du 2e et 3e ordres, 2.

**Liége.** 1er semestre. — J. Deruyts : Théor. des fonctions, Fonctions elliptiques, 3. — L. Meurice : Dynamique, 3; Phys. math. générale, 3. — C. le Paige : Astronomie sphér. et élém. d'astron. math., 2; Astronom. math. et Géodésie, 1; Compléments de Mécanique et Mécanique céleste, 2; Probabilités, 1. — J. Fairon : Géom. synthétique et Géom. réglée, 2; Méthodologie mathém., 1. — P. De Heen : Dynamique des ions, 1.

Bruxelles. 1er semestre. — E. Brand : Fonctions d'une variable complexe, 2; Formes algébriques binaires, 2. — Th. Dedonder : Théories cinétiques et statistiques et applic. à la théor. des quanta, 2. — P. Stroobant : Détermin. des orbites, 2; Exercices d'Astronomie. — A. Mineur : Géométrie supérieure, 2; Méthodologie mathém., 2

[1] Non compris les cours des deux premières années, ni ceux des Ecoles techniques annexées aux Universités. — Les chiffres indiquent le nombre des séances; celles-ci sont fréquemment de une heure et demie ou davantage.

Louvain. 1er semestre. — E. Pasquier, Dynamique, 2; Mécanique céleste, 1. — S. Demanet, Electro-optique, 1. — C. de la Vallée Poussin : Fonctions d'une variable complexe, 1; Applic. géométriques de l'Analyse, 1. — E. Goedseels : Astron. sphérique, 1; Astron. mathém., 1; Géodésie, 1; Probabilités, 1. — G. Verriest : Anal. algébrique, 1; Géom. supérieure, 1. — A. de Hemptinne : Ondes Hertziennes, Décharges électriques, Radioactivité, Quanta, 1.

## FRANCE

**Paris,** *Faculté des Sciences.* 1er semestre (nov.-févr.). — G. Darboux : Principes généraux de la Géométrie infinitésimale et leurs applications à la théorie des équations aux dérivées partielles, 2; des Travaux pratiques afférents au Certificat de Géométrie supérieure seront dirigés par M. Roubaudi, 1. — Goursat : Opérations du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Eléments de la Théorie des Fonctions analytiques, 2. — E. Borel : Fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, 1. — Painlevé, suppléé par le prof. Guichard : Statique, Théorèmes généraux de la dynamique, Eléments de Mécanique analytique, Mouvement des fluides, 2. — Guichard, suppléé par M. Lebesgue, maître de Conférences, et M. Montel, chargé de Conférences : Mathématiques générales, 2. — Boussinesq : Frottement intérieur des fluides avec applications, 2. — Kœnigs : Etude thermodynamique et expérimentale des Moteurs thermiques, et en particulier des Moteurs à combustion interne, 2; dans des conférences particulières le Professeur traitera des Principes généraux de la Dynamique des Machines; les Travaux pratiques auront lieu sous la direction de M. le Professeur Kœnigs. — Cahen, chargé de cours : Des Eléments de la Théorie moderne des Nombres, 1; du grand Théorème de Fermat, 1. — P. Puiseux : Constitution et Figure des planètes et des comètes, 2. — P. Andoyer : Théorie générale de l'interpolation et des quadratures mécaniques en vue des applications au Calcul des Perturbations, 2. — M. Bôcher, professeur à l'Université Harvard, agréé à l'Université de Paris : Les travaux de Sturm et de Liouville sur les équations différentielles, 2.

*Conférences.* — M. Vessiot : Calcul différentiel et intégral, 2; Mathématiques préparatoires, 1. — Cl. Guichard : Géométrie supérieure, 1. — Drach : Mécanique rationnelle, 2. — Montel : Conférences sur l'Algèbre, en vue du Certificat de Mathématiques préparatoires à l'Etude des Sciences physiques, 1. — Servant : Conférences de Mécanique physique et expérimentale coordonnées aux cours de M. le Prof. Kœnigs.

*Ecole normale supérieure.* Conférences de MM. E. Borel, Cartan, Vessiot et Lebesgue.

*Cours libres.* — E. Belot : Les idées cosmogoniques et la science moderne.

**Paris;** *Collège de France.* — Cours publics. — Brillouin : Physique générale et mathématique. Les déformations permanentes; les faits; les théories, 2 h. (dès le 6 janvier). — Hadamard : Mécanique analytique et mécanique céleste. Questions diverses de calcul des variations avec application à certains problèmes de physique mathématique, 2 h. (dès le 3 décembre). — Humbert : Mathématiques. Groupe de monodromie d'une équation algébrique et applications, 2 h. (dès le 11 janvier). — Langevin : Physique générale et expérimentale. Les propriétés électriques et thermiques des métaux, 2 h. (dès le 3 décembre).

---

# BIBLIOGRAPHIE

C. Bourlet. — **Cours de mathématiques.** Eléments d'analyse et de géométrie analytique à l'usage des élèves architectes et ingénieurs. 2e édition entièrement refondue. — 1 vol. in-8°, 252 p., 8 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Ce petit traité renferme les principales notions des Eléments de mathématiques supérieures indispensables aux élèves architectes et ingénieurs. Les quatre premiers chapitres sont consacrés aux éléments d'analyse et de géométrie analytique dont la connaissance est exigée des candidats à l'Ecole nationale de Beaux-Arts, section d'Architecture.

Le chapitre V contient les éléments du calcul intégral qui servent d'introduction au cours de théorie de la résistance des matériaux que le regretté C. Bourlet professait à l'Ecole des Beaux-Arts. Le dernier chapitre donne les éléments de géométrie analytique à trois dimensions.

Dans tous ses manuels et traités, C. Bourlet a mis beaucoup de soin au choix des exercices et des problèmes. C'est également le cas dans le présent volume, où l'on trouvera de nombreux exemples numériques.

R. Branford. — **Betrachtungen über mathematische Erziehung.** Vom Kindergarten bis zur Universität. Deutsch von R. Schimmack u. H. Weinreich. — 1 vol. in-8°, 114 fig., 334 p., 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Nous avons déjà signalé l'édition originale de cette étude publiée sous le titre *Study of mathematical Education.* Ce n'est pas un exposé dogmatique des principes destinés à ceux qui débutent dans l'enseignement mathématique. L'auteur apporte des faits, des observations nombreuses et les résultats d'une longue expérience de l'enseignement aux différents degrés, depuis la première initiation jusqu'à l'enseignement supérieur. Il montre, à l'aide de nombreux exemples, ce qui intéresse l'enfant et comment on peut développer chez lui les facultés intellectuelles.

La géométrie considérée comme science expérimentale, forme le point de départ, puis vient l'arithmétique. Il ne néglige cependant pas la partie démonstrative ; il montre précisément comment ces deux parties doivent se suivre et se compléter.

Le livre de M. Branford peut être recommandé à tous ceux qui enseignent les mathématiques dans les écoles élémentaires et secondaires. H. F.

F. Dingeldey. — **Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- u. Integralrechnung.** Zweiter Teil : Aufgaben zur Anwendung der Integralrechnung. — 1 vol. in-8°, relié, 382 p., 13 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

G. Vivanti. — **Esercizi di Analisi infinitesimale.** — 1 vol. gr. in-8°, 470 p., 15 L. ; Mattei et Cie, Pavie.

Voici deux nouveaux recueils d'exercices d'analyse. Ils se recommandent tous deux par la grande variété des questions et la nouveauté de la plupart d'entre eux.

La collection de M. Dingeldey, professeur à l'Ecole technique supérieure de Darmstadt, tient plus particulièrement compte des besoins des sciences appliquées, notamment de la mécanique, de la physique et de la chimie. Tandis que le premier volume, publié il y a 3 ans, comprenait les applications du calcul différentiel, le présent ouvrage est consacré à la résolution de problèmes exigeant le calcul intégral. Il sera consulté aussi bien dans l'enseignement universitaire que dans celui des écoles techniques supérieures. Une table analytique des problèmes facilite la recherche des questions qui se rattachent à un sujet donné ; l'on y trouvera des problèmes d'un grand intérêt théorique et pratique.

Les *Esercizi di Analisi infinitesimale* de M. G. Vivanti, professeur à l'Université de Pavie, s'étendent sur l'ensemble du champ de l'analyse. Au nombre de 575, ces exemples et problèmes comprennent, comme tous les recueils de cette nature, de nombreuses applications géométriques du calcul différentiel et intégral. Selon l'auteur plus des deux tiers des questions sont nouvelles. Chaque problème est suivi de sa résolution ou tout au moins d'indications concernant la marche à suivre.

Les problèmes ont été groupés d'après l'ordre suivi par l'auteur dans ses *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Pavie, 1911).

I. Préliminaires, limites, continuité, infiniment petits. — II. Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable. — III. *id.* de plusieurs variables. — IV. Applications géométriques : courbes planes, courbes gauches et surfaces. — V. Equations différentielles, ordinaires et aux dérivées partielles. — VI. Calcul des variations.

Comme on le voit, ces deux recueils se complètent ; ils sont appelés à rendre service à de nombreuses catégories d'étudiants des cours de mathématiques générales et du calcul différentiel et intégral.

Hugo Dingler. — **Ueber wohlgeordnete Mengen und zerstreute Mengen im allgemeinen** (Habilitationsschrift). — 1 vol. in-8°, 46 p.; Theodor Ackermann, München 1912.

Grâce aux recherches profondes de Cantor, Zermelo et Hessenberg, on connaît très bien à présent la structure des ensembles bien ordonnés. L'intéressant travail de M. Dingler se rattache à ces recherches. A l'aide de quelques notions nouvelles, dont la plus importante est celle de « limes » (ensemble ou suite limite) généralisée, M. Dingler aborde la théorie des ensembles bien ordonnés par un côté nouveau et il réussit à en modifier l'exposition de manière à mettre en relief les notions et les propriétés qui peuvent être utiles pour l'étude d'ensembles plus complexes. Des procédés de recherche analogues, basés sur la même notion de suite limite, légèrement élargie et transformée, permettent en effet, comme le montre M. Dingler, d'aborder des problèmes de même nature pour une catégorie étendue d'ensembles simplement ordonnés, celle d'ensembles « zerstreut », sur lesquels Hausdorff avait déjà attiré l'attention dans ses « Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen. »

Dans la seconde partie de sa thèse M. Dingler s'occupe, en s'appuyant toujours sur sa notion de suite limite, des fameux nombres transfinis de la seconde classe et plus particulièrement des systèmes de notations pour l'ensemble de ces nombres. En examinant ces questions de près, on est conduit à des conclusions qui peuvent paraître paradoxales ; on lira donc avec intérêt les remarques que fait à ce sujet M. Dingler, remarques qui sont à rapprocher de celles de Hessenberg, dans ses « Grundbegriffe der Mengenlehre. »

D. Mirimanoff (Genève).

Cl. Gaucher et R. Mortier. — **Livret de l'enseignement technique.** — 1 vol. p. in-8°, 342 p. ; 4 fr. 50 ; H. Dunod et E. Pinat, Paris.

Nous signalons ce recueil à tous ceux qui s'intéressent à l'organisation de l'enseignement technique. Ils y trouveront des documents très complets sur les établissements français d'enseignement technique publics et privés. Pour chaque établissement les auteurs indiquent, dans une notice succincte, le but poursuivi, les conditions d'admission, les programmes et tous les renseignements utiles aux jeunes gens. Le volume contient aussi des renseignements sur la préparation des candidats aux fonctions de professeurs de l'enseignement technique.

L'ouvrage comprend cinq parties et une partie annexe :

I. *Etablissements d'enseignement technique public du premier degré :* Ecoles pratiques de commerce et d'industrie ; Ecoles nationales professionnelles ; Ecoles nationales d'horlogerie ; Ecoles professionnelles de la Ville de Paris.

II. *Etablissements d'enseignement technique public de moyen degré :* Ecoles nationales d'Arts et Métiers.

III. *Etablissements d'enseignement technique supérieur et instituts techniques universitaires :* Ecoles normales de l'enseignement technique ; Conservatoire national des Arts et Métiers ; Ecole centrale des Arts et Manufactures ; Ecoles supérieures de Commerce ; Instituts techniques universitaires.

IV. *Etablissements privés.* — V. *Cours professionnels* de Paris, de province et des colonies. — VI. *Annexes,* règlements divers.

C. Guichard. — **Problèmes de Mécanique et cours de Cinématique.** Conférences faites en 1912 aux candidats au certificat de Mécanique rationnelle. Rédaction de MM. Dautry et Deschamps. — 1 vol. gr. in-8°, 150 p. ; 6 fr. ; A. Hermann et fils, Paris.

La première partie du volume comprend les problèmes du Cours de Mécanique rationnelle de la Sorbonne, année 1912. Ce sont des problèmes concernant la cinématique, de dynamique du point, la géométrie des masses et la dynamique des systèmes, avec des problèmes donnés aux examens dans les différentes Facultés.

Dans la seconde partie, qui est consacrée au Cours de Cinématique, M. Guichard répartit l'exposé en trois parties ; il étudie successivement, 1° la cinématique du point matériel ; 2° la cinématique des systèmes de points matériels ; 3° et enfin la théorie des mouvements relatifs quand on change de système de comparaison.

Ce volume sera sans doute le bienvenu non seulement auprès des étudiants, mais aussi auprès de tous ceux qui enseignent la Mécanique rationnelle.

C. Godfrey et A.-W. Siddons. — **Elementary Algebra**, II. — 1 vol. in-8°, xi-530-xlvi p. ; Cambridge University Press.

Les deux volumes de MM. Godfrey et Siddons, « Elementary Algebra I et II », parcourent le cycle des études mathématiques généralement suivies par les élèves de force moyenne. Dans le second de ces manuels les auteurs font une grande place à la notion de fonction ; ils introduisent la variation des fonctions au moyen de la représentation graphique. Les notions de dérivée, puis de différentielle, sont amenées par la tangente et la croissance des courbes et sont appliquées aux notions de vitesse, accélération, mouvement à deux dimensions, le tout accompagné de nombreux exemples algébriques, géométriques et mécaniques. Un chapitre est également réservé à l'intégration et à quelques-unes de ses applications.

Outre la notion de fonction qui caractérise tout le volume, les auteurs traitent entre autres les logarithmes, les progressions, les intérêts composés, les annuités et la valeur approchée de $(1 + x)^n$.

Un appendice renferme un grand nombre de problèmes et exercices dont une partie est plus spécialement destinée à la préparation aux examens. Il est suivi des réponses aux exercices proposés dans le cours du volume.

De même que les autres volumes déjà publiés par les mêmes auteurs, ce dernier est conçu dans l'esprit de réforme caractérisé par la circulaire du Board of Education et en tenant compte des essais de réforme qui en ont résulté. R. Masson (Genève).

A. Höfler. — **Didaktik der Himmelkunde u. der astronomischen Geographie.** (Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen, Band II.) — 1 vol. relié, 414 p. ; 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Après sa méthodologie de l'enseignement mathématique, qui forme le premier volume de cette collection, M. Höfler examine l'*enseignement de la Cosmographie*. C'est une étude complète et très approfondie de la place et de la méthode de l'enseignement de la Géographie mathématique et des premières notions d'Astronomie dans les établissements secondaires.

En réalité, les premières notions sont déjà données par le maître de Géographie ; elles sont complétées et développées plus tard par les maîtres de mathématiques et de physique, puis vient enfin, suivant les pays et les établissements, un enseignement proprement dit de Cosmographie. Envisagées au point de vue de la Géographie mathématique, ces différentes notions sont souvent mal coordonnées. M. Höfler se propose précisément de montrer les liens qui doivent exister entre ces étapes successives. Dans ce but, il passe en revue les plans d'études et examine la part qu'ils doivent faire à la première initiation astronomique. Il distingue *quatre cycles :*

I. Ce sont d'abord les premières notions concernant le Soleil et la Terre. Elles sont exposées dans les leçons de Géographie. (Elèves de 11 à 12 ans.)

II. Puis viennent les notions concernant le système solaire. Mouvement apparent et mouvement réel du Soleil, de la Terre et de la Lune. Dans quelques pays elles sont rattachées à l'enseignement de la Physique. (Elèves de 13 et 14 ans.)

III. Le professeur de mathématiques utilise ensuite les notions précédemment acquises et les examine au point de vue des applications numériques, stéréométriques et trigonométriques. (Elèves de 15 et 16 ans.)

IV. Le dernier cycle comprend la Cosmographie proprement dite, les lois de Kepler et de Newton. Suivant les pays, il fait partie du cours de Physique ou forme un enseignement spécial. (Elèves de 17 et 18 ans.)

L'auteur examine d'une manière approfondie le rôle que doivent jouer les notions fondamentales dans les plans d'études, et montre comment la méthode d'exposition doit être adaptée à l'âge des élèves. Son excellent ouvrage, qui est le fruit d'une grande expérience pédagogique, mérite d'être signalé à l'attention non seulement de ceux qui enseignent la Géographie mathématique et les premiers éléments d'Astronomie, mais aussi aux professeurs de Géographie chargés de donner la première initiation Ils y trouveront aussi des indications très utiles concernant le matériel d'enseignement. Nous mentionnerons ici le globe céleste destiné aux élèves et nous en donnerons ci-après une description sommaire.

A. Höfler. — **Himmelsglobus aus Modelliernetzen.** Die Sterne durchzustechen und von innen heraus zu betrachten. — Ausgabe I, 1 M. 50; Ausgabe II, 3 M.; Ausgabe III, 4 M. 50. Avec une brochure : *Der Sternenhimmel.* Anleitung zur Benützung des Himmelsglobus. — 1 fasc. in-16, VI-26 p.; B. G. Teubner, Leipzig.

La première initiation à l'Astronomie comprend généralement l'étude de la position apparente des constellations sur la voûte céleste. Les cartes célestes représentent ordinairement tout ou partie de cette voûte appliquée ou projetée sur une surface plane, ce qui produit des déformations dans le rapport des distances; de plus il faut, après l'avoir orientée, tenir la carte au-dessus de sa tête pour la consulter.

Les globes célestes n'ont pas ce défaut, mais en ont par contre un autre. Ils reproduisent sur une surface convexe ce qui, pour le spectateur terrestre, semble placé sur une voûte concave.

Le globe de M. Höfler est constitué de manière à obvier à ces inconvénients. Il porte extérieurement la carte céleste renversée, c'est-à-dire telle qu'elle apparaîtrait à un observateur supposé en dehors de la sphère céleste dont la terre serait le centre. Pour voir le ciel tel qu'il apparaît de la terre, il suffit de regarder à l'intérieur par une ouverture ménagée à cet effet au pôle austral. Les étoiles préalablement percées d'un petit trou se détachent alors en clair sur fond noir.

Des cercles gradués fixés au globe lui-même ou au socle permettent de l'orienter exactement pour chaque jour et chaque heure; il est donc facile de se rendre compte de l'aspect exact du ciel à un moment donné.

Une notice explique l'usage du globe et donne des indications sur les mouvements, quotidiens et annuels apparents des étoiles, du soleil sur l'écliptique, de la lune et des planètes.

Le globe peut être acheté soit prêt à construire en carton (édition A), soit avec le socle déjà construit (édition B), soit aussi complètement achevé (Edition C). R. Masson (Genève).

A. S. Ramsey. — **A Treatise on Hydromechanics.** — Part. II, *Hydrodynamics.* — 1 vol. in-8°, XII-360 p.; 10 sh. 6; G. Bell and Sons, Londres.

Ce volume forme la seconde partie d'un traité sur la mécanique des fluides, écrit primitivement par le Dr Besant, mais entièrement refait par M. A. S. Ramsey en ce qui concerne l'hydrodynamique. C'est une étude toute théo-

rique du mouvement des fluides, poussée jusqu'aux phénomènes tourbillonnaires, mais faisant abstraction des effets de viscosité.

L'auteur emploie à tour de rôle les méthodes d'Euler et de Laplace : la première exprimant les composantes de la vitesse en un point du fluide, en fonction du temps et des coordonnées de ce point ; la deuxième utilisant le temps et les trois coordonnées initiales d'une particule fluide pour en déduire sa position, sa vitesse ou son accélération à une époque quelconque.

Le premier chapitre est consacré à la cinématique des fluides et plus spécialement, à l'établissement de l'équation de continuité. Les équations du mouvement des fluides sont exposées dans le chapitre II suivant les deux méthodes, et il en est fait dans le chapitre III diverses applications, en limitant le problème au cas d'un écoulement plan.

L'étude du mouvement plus général des fluides dans un espace à trois dimensions fait l'objet du chapitre IV ; il y est question du mouvement irrotationnel des liquides ; ce problème implique l'existence d'un potentiel de vitesse qui doit satisfaire à l'équation connue de Laplace, avec des conditions limites données. Des cas très divers, avec conditions aux limites variées, sont examinés dans les chapitres V et VII, tandis que le chapitre VI est consacré à des applications de la notion de représentation conforme au mouvement des fluides et que le chapitre VIII traite du mouvement d'un solide dans une masse liquide.

Le mouvement tourbillonnaire est examiné au chapitre IX et les trois derniers chapitres sont consacrés à l'étude des ondes en général, des cordes vibrantes et des ondes sonores cylindriques et sphériques.

L'Ouvrage, par la nature de son exposé, forme une excellente introduction à l'étude des équations aux dérivées partielles du second ordre du type de Laplace. Il est complété par l'énoncé d'un très grand nombre de problèmes proposés aux examens de grades anglais. P.-Ad. Mercier (Genève).

P. Stæckel u. H. Beck. — **Lösungen der Aufgaben aus Borel-Stæckel Elemente der Mathematik.** — 2 fasc. in-8°, 44 et 39 p. ; 1 M. 50 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Pour répondre à un vœu qui lui a été exprimé de divers côtés, M. Stæckel vient de publier, en collaboration avec M. Beck, un recueil contenant la résolution des nombreux exercices et problèmes proposés dans l'édition allemande [1] des manuels de mathématiques élémentaires de M. E. Borel. Ces manuels, comme ceux de M. Bourlet, sont conçus dans un esprit moderne. Ils ont été consultés avec intérêt dans le corps enseignant des divers pays. Nous avons déjà signalé la traduction allemande des manuels de M. Borel. Les deux fascicules que nous annonçons aujourd'hui forment un complément très utile, car ils apporteront des indications concernant la résolution selon la méthode adoptée dans l'ouvrage.

Le fascicule 1 renferme la résolution des problèmes d'arithmétique et d'algèbre, tandis que le fascicule 2 est consacré aux problèmes de géométrie.

---

[1] *Elemente der Mathematik* (für Lehrer der Mathematik und Abiturienten, die sich dem Studium der Naturwissenschaften, der Medizin, der Technik widmen wollen). Von E. Borel. Deutsche Ausg. v. P. Stäckel. In 2 Bdn. gr. 8. I. Band : Arithmetik und Algebra. 57 Fig. und 3 Tafeln. XVI, 431 S. 1908. M. 8.60. II : Geometrie. 403 Fig. XII, 324 S. 1909. M. 6.40.

# BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

## 1. Publications périodiques :

**Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto,** directeur F. Gomes Teixeira — Vol. VIII, 1913. Imprensa da Universidade, Coimbra.

**Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche,** pubblicato per cura di Gino Loria. Anno XV 1913. — Rosenberg & Sellier, Torino.

**Bollettino di Matematica.** Giornale scientifico didattico per l'incremento degli Studi matematici nelle Scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. Conti. Anno XII. Roma, 1913.

**Bulletins de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique,** 1913. Hayez, Bruxelles.

**Giornale di Matematiche di Battaglini,** diretta da Ernesto Pascal, colla collaborazione di P. del Pezzo, A. del Re, R. Marcolongo, D. Montesano, G. Torelli. Vol. LI (4° della 3a Serie). Pellerano, Naples.

**Intermédiaire des mathématiciens,** dirigé par C.-A. Laisant, Ed. Maillet, A. Maluski, A. Boulanger. — Tome XX, 1913. — Gauthier-Villars, Paris.

**Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.** Herausgegeben von Em. Lampe. B. 41. Jahrgang 1910, 1 vol., LXXVIII-1137 p. — G. Reimer, Berlin, 1912.

**Journal de Mathématiques élémentaires,** publié par H. Vuibert, 37e année, 1912-1913. — Librairie Vuibert, Paris.

**Mathematical Gazette** (The), edited by W.-J. Greenstreet. — Vol. VII. George Bell & Sons, Londres.

**Mathematics Teacher** (The). A Magazine devoted to the interests of Teachers of Mathematics, published quarterly by the Association of Teachers of Mathematics for the Middle States and Maryland. Editor : W. H. Metzler, Syracuse, N. Y. Vol. V. 1912-1913.

**Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter.** Organ des Verbandes mathematischer u. naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen, 10. Jahrgang, 1913. — Kommissionsverlag, B. G. Teubner, Leipzig.

**Mathésis.** Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg. 4e série, tome III, 1913. — Hoste, Gand ; Gauthier-Villars, Paris.

**Nieuw Archief voor Wiskunde** onder Redactie van J. C. Kluyver, D. J. Korterveg en F. Schuh. T. X. — Amsterdam, Delsman en Nolthenius.

**Nyt Tidsskrift for Matematik.** Revue dirigée par C. Juel et V. Trier, série A, 24e année ; série B, 24e année ; 1913. — Jul. Gjellerup, Copenhague.

**Pädagogisches Archiv.** Monatsschrift für Erziehung. Unterricht u. Wissenschaft, herausgegeben von J. Ruska u. K. Dürr, 55 Jahrg. 1913. — Quelle u. Meyer, Leipzig.

**Periodico di Matematica** per l'Insegnamento secondario. Diretto dal Prof G. Lazzeri. Série 3, vol. X. — Raffaelo Giusti, Livorno.

**Revista de la Sociedad Matematica Espanola.** Revue mensuelle, 2e année, 1912-1913. — Ed. Arias, Madrid.

**Revue de l'Enseignement des Sciences** (La). 7e année, 1913. — Librairie Félix Alcan, Paris.

**Revue de Mathématiques spéciales,** dirigée par E. Humbert et G. Papelier. 23e année, 1912-1913. — Librairie Vuibert, Paris.

**Revue générale des Sciences pures et appliquées,** fondée par L. Olivier, dirigée par J.-P. Langlois. 24e année, 1913. — Librairie Armand Colin, Paris.

**Revue semestrielle des publications mathématiques,** dirigée par H. de Vries, J. Cardinaal, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn. — Tome XXI, 1re partie, avril-octobre 1912. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam 1912.

**Revue scientifique,** paraissant le samedi. Directeur : Ch. Moureu. — 51e année, 1913. — 41bis, rue de Châteaudun, Paris.

**School Science and Mathematics.** A Journal for Science and Mathematics Teachers in secondary Schools, vol. XIII, 1913. Smith and Turton, Chicago.

**Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften,** herausgegeben von A. Thaer. XIX. Jahrgang. 1913. Otto Salle, Berlin.

**Wiadomoski Matematyczne,** dirigé par S. Dickstein. Tome XVII, 1913. — Varsovie.

**Wiskundige Opgaven** met de Oplossingen. Tome XI, Delsmann en Nolthenius, Amsterdam.

**Wiskundig Tijdschrift** onder Redactie van F.-J. Vaes, Chr. Krediet, N. Quint. IX Jahrgang, 1913. — P. Visser, Haarlem.

**Acta mathematica.** Stockholm. — Tome 36. Fasc. 2, 3 et 4. — K. Sudman : Mémoire sur le problème des trois corps. — J. L. W. V. Jensen : Recherches sur la théorie des équations. — H. Bohr : Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichletscher Reihen. — L. Zoretti : Contribution à l'étude des lignes cantoriennes. — S. Pincherle : Quelques remarques sur les fonctions déterminantes. — R. Lipschitz : Recherches sur le développement en séries trigonométriques des fonctions arbitraires d'une variable et principalement de celles qui, dans un intervalle fini, admettent une infinité de maxima et de minima. — J. Malmquist : Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre. — L. Lichtenstein : Zur Theorie der

linearen partiellen Differentialgleichungen 2ter Ordnung vom elliptischen Typus. Die erste Randwertaufgabe für analytische Gebiete mit Ecken.

Un fascicule supplémentaire, de 179 pages, contient la *Table générale des Tomes 1 à 35*, rédigée par Marcel Riesz; elle est suivie d'une table par noms d'auteurs et d'une belle collection de portraits des auteurs.

**American Journal of Mathematics**. Baltimore. — Vol. 35, nos 1-3. — G. A. Miller : Groups Containing a Given Number of Operators Whose Orders Are Powers of the Same Prime Number. — F. Waun Beal : Normal Congruences Determined by Centers of Geodesic Curvature. — A. R. Schweitzer : A Theory of Geometrical Relations (Continued). — H. Bateman : The Double Tangents of a Binodal Quartic. — F. M. Morgan : Involutorial Transformations. — A. F. Carpenter : A Theorem for the Development of a Function as an Infinite Product. — G. D. Birkhoff : The Reducibility of Maps. — L. L. Dines : The Highest Common Factor of a System of Polynomials in One Variable. — R. D. Carmichæl : Linear Mixed Equations and their Analytic Solutions. — R. D. Carmichæl : On the Theory of Linear Difference Equations. — Hilda P. Hudson : On the Product of Two Quadro-Quadric Space-Transformations. — S. Lefschetz : On some Topological Properties of Plane Curves and a Theorem of Möbius. — J. Eiesland : On a Flat Spread-Sphere Geometry in Odd-dimensional Space. — W. A. Manning : The Primitive Groups of Class Twelve. — C. Latimer-Bacon : The Cartesian Oval and the Elliptic Functions $p$ and $\sigma$. — P. A. Mac Mahon : The indices of Permutations and the Derivation therefrom of Functions of a Single Variable Associated with the Permutations of any Assemblage of Objects. — H. Brewster Owens : Conjugate Line Congruences of the Third Order Defined by a Family of Quadrics.

**American Mathematical Monthly** (The). — Lancaster et Chicago. — A partir du volume XX (1913) l' « American Mathematical Monthly » sera dirigé par un Comité de rédaction composé des représentants de neuf institutions de patronage, avec la collaboration du professeur B. F. Finkel, fondateur du journal et rédacteur dès les débuts en 1894. Les institutions représentées sont : le Colorado College, les Universités de Chicago, Illinois, Missouri, Minesota, Nebraska Kansas, Indiana et Iowa. Leurs représentants sont les professeurs Florian Cajori, H. E. Slaught, G. A. Miller, E. R. Hedrick, W. H. Bussey, W. C. Brenke, C. H. Ashton, R. D. Carmichæl et A. G. Smith. Le rédacteur-directeur est le professeur Slaught.

Le « Monthly » s'adresse principalement au corps enseignant des collèges. Il paraît tous les mois, juillet et août exceptés. A signaler, dans les premiers fascicules de 1913, une série de Notes de M. F. Cajori, intitulées : « History of the Logarithmic and Exponential Concepts », puis celles de MM. G. A. Miller : Errors in the Literature on Groups of Finite Order. — R. D. Carmichæl : The Remainder Term in a Certain Developpement of $f(a+x)$. — W. H. Bussey : Two New Books on the Calculus. — S. Epsteen : Minimum Courses in Engineering Mathematics. — L. E. Dickson : Amicable Number Triples. — G. A. Miller : Mathem. Literature for high School Teachers.

**Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse**, 3e série, tome III. — D. Hilbert : Théorie des corps de nombres algébriques. Notes de MM. G. Humbert et Th. Got. — A. Buhl : Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace. — S. Lattès : Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les

fonctions génératrices de ces suites. — H. Poincaré : Fonctions modulaires et fonctions fuchsiennes. — A. Blondel : Sur la théorie des marées. — G. Gotty : Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres. — L. Rouyer : Sur la déformation des quadriques et les surfaces conjuguées par rapport à un complexe du second degré.

**Annales de la Société Scientifique de Bruxelles**, 37e année, 1912-1913. C. Caratheodory : Sur la représentation conforme des polygones convexes. — P. Mansion : Sur les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs. — M. H. Janne : Extension de la théorie de Laplace due à G. Herglotz. — J. Neuberg : Sur une transformation par affinité.

**Annals of Mathematics**, Harvard University, Cambridge, Mass. — Tome 14. — H. H. Mac Gregor : Three-dimensional Chains and the Associated Collineations in Space. — E. J. Miles : Determination of the Constants in Euler's Problem Concerning the Minimum Aera Between a Curve and its Evolute. — O. E. Gleen : Theorems on Reducible Quantics. — G. D. Birkhoff : A Determinant Formula for the Number of Ways of Coloring a Map. — S. Lefschetz : Two Theorems on Conics. — H. Bateman : A New Type of Solution of Laplace's Equations. — A. Emch : Involutoric Circular Transformations as a Particular Case of the Steinerian Transformation and their Invariant Nets of Cubics. — T. H. Gronwall : On Analytic Functions of Constant Modulus on a given Contour. — T. H. Hildebrandt : Necessary and Sufficient Conditions for the Interchange of Limit and Summation in the Case of Sequences of Infinite Series of a Certain Type. — Maxime Bôcher : A Simple Proof of a Fundamental Theorem in the Theory of Integral. — O. Veblen : An Application of Modular Equations in Analysis Situs. — G. A. Miller : Groups which Contain an Abelian Subgroup of Prime Index. — L. Brand : On Infinite Systems of Linear Integral Equations. — R. P. Baker : The Method of Monodromie with Applications to Three Parameter Quartic Equation. — E. H. Swift : Note on the Existence Theorem of a Minimum of $\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} P dx + Q dy$. — L. H. Rice : Continuant Expressions for $\sqrt{a^2+b^2}$ and $(\sqrt{a^2+b^2}+a)^n$.

**Archiv der Mathematik und Physik**. — B. G. Teubner, Leipzig. — 21. Band, Hefte 1 u. 2. — E. Hahn : Grundlagen zu einer Theorie der Lorentztransformationen. — E. Landau : Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe. — R. Sturm : Gleichseitige Polardreiecke bei einer Ellipse. — C. Grötzsch : Zu meinem Kriterium für bedingte Konvergenz unendlicher Reihen. — R. Sturm : Minima bei projektiven Gebilden. — R. Sturm : Die Basen, in Bezug auf welche Kreise oder zwei Kugeln zueinander polar sind. — R. Weitzenböck : Ueber eine Erweiterung des Determinantenbegriffes. — K. Schwering : Ganzzahlige Dreiecke mit Winkelbeziehungen. — E. Wætzmann : Neuere Untersuchungen zur Resonanztheorie des Hörens. — H. Kapferer : Beweis des Fermatschen Satzes für die Exponenten 6 und 10.

**Bulletin de la Société mathématique de France**, Paris. — Tome XL, fasc. 3 et 4. — E. Picard : Sur les systèmes de deux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique. — E. Borel : Les fonctions monogènes non analytiques. — De Séguier : Sur les produits directs. — A. Denjoy : Sur quelques propriétés des séries à termes positifs. — E. Tur-

rière : Etude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan. H. Lebesgue : Sur un théorème de M. Volterra. — E. Delassus : Sur le principe des travaux virtuels. — H. Villat : Sur les mouvements (à la Helmholtz) d'un liquide dans un canal symétrique. — G. D. Birkhoff : Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques.. — H. Dulac : Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières. — F. Boulad : Sur les équations à quatre variables d'ordre nomographique supérieur.

*Tome XLI, fasc. 1 et 2.* — E. Borel : Les ensembles de mesure nulle. — G. Remoundos : Généralisation d'un théorème de M. Landau. — H. Galbrun : Sur un développement d'une fonction à variable réelle en séries de polynômes. — P. Fatou : Sur la convergence absolue des séries trigonométriques. — E. Cartan : Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. — Podtiaguine : Les conditions de convergence d'une intégrale multiple. — P. Fatou : Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. — A. Pellet : Des systèmes infinis d'équations. — Et. Delassus : Sur les systèmes de Lagrange à paramètre principal. — R. Garnier : Sur la rationalisation des coefficients d'une équation différentielle algébrique. — J. Sire : Sur la puissance de l'ensemble des points singuliers transcendants des fonctions inverses des fonctions entières. — O. Schmidt : Sur les produits directs. — De Séguier : Sur les produits directs et sur la structure de leurs diviseurs maxima.

**Bulletin des Sciences mathématiques.** — Gauthier-Villars, Paris. — Janvier-septembre 1913. — M. Tikhomandritzky : Résolution d'un problème concernant les surfaces de Riemann. — R. Garnier : Sur les congruences engendrées par les transformations homographiques d'une quadrique en elle-même. — H. Vergne : Sur une construction de Géométrie cinématique. — F. Müller : Mathematische Jibiläen des Jahres 1913. — E. Picard : Sur les développements de Cauchy en séries exponentielles et sur certaines identités remarquables. — C. Roubaudi : Trisecteur du Dr H. Grasset. — H. Dulac : Sur une forme de l'intégrale générale d'une équation différentielle dans le voisinage de certaines valeurs singulières. — Comptes rendus et Analyses. — Revue des publications académiques et périodiques.

**Isis,** revue consacrée à l'histoire et à l'organisation de la Science, publiée par George Sarton. — Tome I, fasc. 2. — Wondelgem-lez-Gand, Belgique. — G. Sarton : Le but d' « Isis ». — D. E. Smith : The Geometry of the Hindus. — G. Sarton : Comment augmenter le rendement intellectuel de l'humanité ? 1re partie : Introduction. Le génie scientifique. Le génie et la race. — Chronique et correspondance. Organisation de la science. Analyses. Bibliographie analytique.

**Nouvelles annales de Mathématiques.** Gauthier-Villars, Paris.— T. XIII, janvier-juillet 1913. — E. Keraval : Surfaces engendrées par le déplacement d'une courbe plane avec cône circonscrit le long de la courbe. — R. Bricard : Sur un hexaèdre particulier. — Lt Ballif : Cinématique d'aéroplane. — J. Lemaire : Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. — Comte de Sparre : Note au sujet du frottement. — G. Valiron : Sur la croissance des fonctions entières d'ordre nul. — F. Gomès Teixeira : Sur les développoïdes de l'ellipse. — P. Magiron : Sur le point de Frégier dans l'hyperbole. — G. Valiron : Sur quelques théorèmes de Laguerre. — Emile Turrière : Sur une congruence de droites associée au réseau conjugué

d'une surface octogonale en projection sur un plan. — Ch. Halphen : Sur un problème d'énumération. — Ch. Platrier : Sur les variations de la déterminante et de la résolvante de Fredholm avec le champ d'intégration. — R. Goormaghtigh : Sur la conchoïde de Kulp. — F. Balitrand : Sur la parabole de Chasles ou parabole des dix-huit droites. — Gaston Cotty : Sur quelques propriétés arithmétiques de l'espace réglé. — A. Buhl : Sur les applications géométriques des intégrales curvilignes. — E. Guillemain : Sur la déformation infiniment petite des surfaces réglées à plan directeur. — Emile Turrière : Généralisation des courbes de Ribaucour. — P. Delens : Extraction rapide de certaines racines exactes d'indice quelconque. — G. Fontené : Sur la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. — R. Bricard : Sur le mouvement à deux paramètres dans le plan. — C. Clapier : Concours d'agrégation de 1912. Solution de la question de calcul différentiel et intégral. — Certificats d'analyse supérieure. — Certificats de mécanique rationnelle. — Certificat de Mathématiques générales. — Solutions de questions proposées.

**Prace Matematyczno-Fizyczne,** revue dirigée par S. Dickstein, Varsovie. — Tome XXIII. — W. Sierpinski : Contribution à la dérivabilité des fonctions. — L. Lichtenstein : Bemerkung über die nicht linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Konvergente Folgen von Lösungen. — A. Rosenblatt : Sur les surfaces algébriques irrégulières de genre linéaire $p^{(1)} > 1$. — G. A. Miller : Gauss's Lemma and some related group theory. — A. Rosenblatt : Les progrès de la Théorie des surfaces algébriques. — W. Sierpinski : Sur les courbes qui remplissent un carré.

**Revue du Mois** (La), dirigée par E. Borel, Paris, Alcan. — 8e *année* 1913. — Nous mentionnons les articles suivants qui intéressent tout particulièrement les mathématiciens. — Vito Volterra : Henri Poincaré, l'œuvre mathématique. — Pierre Boutroux : Henri Poincaré, l'œuvre philosophique. — J. Hadamard : Henri Poincaré et le problème des trois corps. — P. Langevin : Henri Poincaré physicien. — E. Borel : La question de la population. — L. Bourgeois : Les anciennes mathématiques japonaises.

**Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterricht.** Leipzig. — Band 44. Nos 1-8. — C. Frenzel : Zur Kleinschen Einführung in die Lehre von den Logarithmen. — N. Gennimatas : Zu den pythagorischen Dreiecken. — H. Dressler : Ein mathematischer Scherz und seine didaktische Verwertung. — F. Bindemann : Zur Behandlung der Zinseszins- und Rentenrechnung. — Rud. Schimmack : Ein bewegliches Polareckenmodell. — Kiesling : Zwei Dreiecksaufgaben. — W. Lietzmann : Der Internationale Mathematikerkongress in Cambridge. — Weinreich : Nachruf an Rudolf Schimmack. — Chr. Lenhardt ; Graphische Darstellung realer und komplexer Lösungen von Gleichungen. — H. Pfaff : Koaxiale Kegelschnitte am Dreieck. — Kiesling : Elementare Begründung des Reflexionsgesetzes. — Alois Müller : Über eine Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes. — H. Dressler : Mathematische Lehrmittelsammlungen, insbesondere für höhere Schulen. — K. Hagge : Zur Geometrographie. — M. Luserke : Über die Methode des rein geometrischen Beweises, d. h. über die Möglichkeit zur anschaulichen Evidenz geometrischer Beziehungen zu gelangen. — Alexander Witting : Zum Unterricht in der Planimetrie. — Rudolf Sturm : Über

Maxima und Minima bei Pyramiden und Prismen. — Rudolf Sturm : Über das Maximum einer Entfernungssumme. — H. Dressler : Die Betonung funktioneller Beziehungen in der Reihenlehre. — Gg. Heussel : Die stereographische Projektion und ihre Anwendung auf die konstruierende Kugelgeometrie. — Gustav Berkhan : Eine mathematische Erörterung des optischen Brechungsgesetzes. — K. Wolletz : Die Behandlung der relativen Zahlen im Unterrichte. — Joh. Schumacher : Der Wilsonsche Satz. — W. Lietzmann : Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. — E. Eckhardt : Über die Radien der Berührungskreise des Kreisvierecks. — A. Tafelmacher : Verallgemeinerung eines von Herrn Linnich behandelten Lehrsatzes. — H. Rothe : Über ein einfaches arithmetisches Analogon zu einem Satze von C. Jordan. — Rudolf Sturm : Über Kreis- und Kugelsegmente. — F. Gauger : Die geometrische Deutung der Reihen von Taylor und Mac Laurin. — Wilh. Effenberger : Eine systematische Zusammenfassung merkwürdiger Punkte im geradlinigen Dreieck. — Dr. Rudolf Hunger : Ableitung des verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatzes und der heronischen Formel. — A. Richter : Ergebnis beim bisherigen Unterricht in der Differential- und Integralrechnung in Gymnasialoberprima. — Kaluza : Ein bewegliches Modell zur Zentralperspektive. — Josef Schlesinger : Zur Lehre von der Proportionalität. — Ernst Kochen : Über die Schreibweise der Logarithmen.

## 2. Livres nouveaux :

R. d'Adhémar. — **Leçons sur les Principes de l'Analyse**, avec une note de S. Bernstein. — *Tome II :* Fonctions synectiques. Méthode des majorantes Equations aux dérivées partielles du premier ordre. Fonctions elliptiques. Fonctions entières. — 1 vol. in-8°, VIII-297 p.; 10 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

W.-M. Baker and A.-A. Bourne. — **A shorter Algebra.** — 1 vol. in-8°, VIII-320-LIX p.; 2 sh. 6 d.; G. Bell and Sons, Londres.

H. Bergmann. — **Das Unendliche und die Zahl.** — 1 broch. in-8°, 88 p.; 2 M. 50; M. Niemeyer, Halle.

P. Boutroux. — **Les principes de l'Analyse mathématique**, exposé historique et critique. Tome I. — 1 vol. in-8°, XI-547 p.; 14 fr.; A. Hermann et fils, Paris.

E. Cahen. — **Théorie des nombres**. Tome I. Le premier degré. — 1 vol. in-8°, XII-408 p.; A. Hermann et fils, Paris.

G.-St.-L. Carson. — **Essays on Mathematical Education**. Avec une introduction de Dav.-Eug. Smith. — 1 vol. in-8°, IV-139 p.; Ginn a. Cie, Londres et Boston.

A. Chatelet. — **Leçons sur la théorie des nombres**. (Modules. Entiers algébriques. Réduction continuelle.) — 1 vol. in-8°, x-156 p.; 5 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

E. Delassus. — **Leçons sur la Dynamique des Systèmes matériels.** — 1 vol. in-8°, XII-421 p.; 14 fr.; A. Hermann et fils, Paris.

Th. Erb. — **Ueber die asymptotische Darstellung der Integrale** linearer Differenzen-Gleichungen durch Potenzreihen. — Thèse, Université de Munich. — 1 fasc. in-8°, 59 p. W. Neumann, Pirmasens.

J. Fitz-Patrick. — **Exercices d'Arithmétique, énoncés et solutions.** Avec une préface de J. Tannery. 3e édition augmentée. — 1 vol. in-8°, 710 p., 12 fr.; A. Hermann et fils, Paris.

Z.-G. de Galdeano. — **Nuevo Metodo de Ensenanza Matematica.** — 1 fasc. in-8°, xxiv-56 p.; G. Casanal, Saragosse.

Z.-G. de Galdeano. — **Sumario de mis Cursos de Calculo Infinitesimal con arreglo al Nuevo Metodo de Ensenanza.** 1 fasc. in-8°, 192 p., 4 pesetas; G. Casanal, Saragosse.

H.-H. Goodacre, E.-F. Holmes, C.-F. Noble, P. Steer. — **Bell's Outdoor and Indoor experimental Arithmetics.** Fasc. 3 à 7. — 5 fasc. in-16; N° 3, 31 p., 3 d.; N° 4, 32 p., 3 d.; N° 5, 39 p., 3 d.; N° 6, 39 p., 4 d.; N° 7, 48 p., 4 d.; G. Bell and Sons, Londres.

J. Grossmann. — **Ueber die Nullstellen der Riemannschen. ζ-Funktion und der Dirichletschen L-Funktionen.** Inaugural Dissertation (Göttingue). — 1 fasc. in-8°, 99 p.; E.-A. Huth, Göttingue.

J. Haag. — **Cours complet de Mathématiques spéciales.** Tome I. Algèbre et Analyse. — 1 vol. in-8°, vi-402 p.; 9 fr. — *Exercices du tome I.* — 1 vol. in-8°, iv-220 p.; 7 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

D. Hilbert. — **Théorie des corps de nombres algébriques,** ouvrage traduit de l'allemand par A. Lévy et Th. Got; avec une préface et des notes de G. Humbert, et des notes de Th. Got. — 1 vol. in-4°, xvi-380 p.; 25 fr.; A. Hermann et fils, Paris.

M. Lecat. — **Bibliographie du Calcul des variations 1850-1913.** — 1 vol. in-8°, 113 p.; 4 fr.; A. Hermann et fils, Paris. A. Hoste, Gand.

G. Loria. — **Le Scienze esatte nell'antica Grecia.** (Coll. Hœpli). — 2e édition. — 1 vol. in-16, xxiv-969 p.; 9 L. 50; U. Hœpli, Milan.

A. Mitzscherling. — **Das Problem der Kreisteilung.** Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung. Avec une préface de H. Liebmann. — 1 vol. in-8°; vi-214 p.; relié : 8 M. 40., broché : 7 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

F. Riesz. — **Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.** — 1 vol. in-8°, vi-182 p.; 6 fr. 50 (Coll. Borel, Théorie des fonctions.); Gauthier-Villars, Paris.

O. Staude. — **Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte.** — 1 vol. in-8°, viii-242 p.; relié : 10 M., broché : 9 M.; B.-G. Teubner, Leipzig.

A. Vaucher. — **Théorie mathématique de l'échelle musicale.** — 1 fasc. in-8°, 68 p.; Gauthier-Villars, Paris.

V. Volterra. — **Leçons sur les fonctions de lignes** professées à la Sorbonne en 1912, recueillies et rédigées par J. Pérès. — 1 vol. in-8°, vi-230 p.; 7 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

**Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées.** Edition française dirigée par J. Molk. — Tome II, vol. 4 : *Equations aux dérivées partielles;* fasc. 1; Propriétés générales des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Equations linéaires du premier ordre; exposé, d'après l'ar-

ticle allemand de E. von Weber, par G. Floquet. Equations non linéaires du premier ordre. Equations d'ordre plus grand que un; exposé, d'après l'article allemand de E. von Weber, par E. Goursat.

Tome VII, vol. 1 : *Astronomie sphérique;* édition française dirigée par J. Molk et H. Andoyer. — Fasc. 1 : Système de référence et mesure du temps; exposé d'après l'article allemand de E. Anding, par H. Bourget. — Réfraction et extinction; exposé d'après l'article allemand de A. Bemporad, par P. Puiseux. — Réduction des observations astronomiques; exposé d'après l'article allemand de F. Cohn, par E. Doublet et L. Picart. — Détermination de la longitude et de la latitude; exposé, d'après l'article allemand de C.-W. Wirtz, par G. Fayet. — B.-G. Teubner, Leipzig et Gauthier-Villars, Paris.

**Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.** *Heft* 17 : Vorschläge zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen im Schulunterricht. — 1 fasc. in-8°, iv-14 p.; 0 M. 50; B.-G. Teubner, Leipzig.

# TABLE DES MATIÈRES

## ARTICLES GÉNÉRAUX

### Méthodologie et Notes diverses.

## Organisation de l'enseignement.



## Philosophie et histoire.



## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

## CHRONIQUE

### Congrès internationaux et Sociétés savantes.



### Articles divers.

## Nécrologie.

## NOTES ET DOCUMENTS

### Commission internationale de l'enseignement mathématique.

*Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.*

### Cours universitaires :



## BIBLIOGRAPHIE

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

### 1. *Sommaire ou annonce des principaux périodiques.*

*2. Publications non périodiques.*

# TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.

Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.